УДК 531.38

©2014. **А.И. Синенко**

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ Н.Е. ЖУКОВСКОГО ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ГИРОСТАТА

Изучены зависимости от времени компонентов вектора угловой скорости в решении Н.Е. Жуковского, которое описывает движение гиростата с неподвижным центром масс.

**Ключевые слова:** *гиростат, решение Жуковского.*

**Введение.** Модель гиростата Н.Е. Жуковского занимает особое место в динамике твердого тела, поскольку она описывает важный механический объект: систему связанных твердых тел, содержащих три вращающихся ротора. Результаты, полученные в исследовании движений такого гиростата, могут быть использованы в прикладных задачах управления механическими системами.

Решение Н.Е. Жуковского [1] получено при изучении задачи о движении твердого тела, имеющего полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью. Сведение задачи о движении свободного гиростата к квадратурам выполнил В. Вольтерра [2]. Он использовал аппарат сигма-функций Вейерштрасса. Й. Виттенбург [3] указал способ нахождения компонент вектора угловой скорости гиростата через эллиптические функции времени, тем самым предложив более наглядное представление решения Н.Е. Жуковского. Частные случаи данного решения рассматривали Е.И. Харламова [4], Л.М. Ковалева [5], Д.Н. Кравчук [6]. Обзор результатов, полученных в данном направлении, приведен в [7].

Статья посвящена получению явных зависимостей от времени компонент вектора угловой скорости гиростата в решении Н.Е. Жуковского с помощью метода Й. Виттенбурга. Они могут быть использованы в кинематическом истолковании движения свободного гиростата методами [8–10].

**1. Основные соотношения. Редукция уравнений движения.** Запишем уравнения движения гиростата Жуковского, используя главную систему координат [1, 7]:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_1, A_2, A_3$ – главные моменты инерции; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора угловой скорости тела-носителя; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненты гиростатического момента. Уравнения (1) имеют два первых интеграла

$$\begin{gathered}A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 = 2E,\\ (A_1\omega_1 + \lambda_1)^2 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)^2 + (A_3\omega_3 + \lambda_3)^2 = L_0^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $E$ и $L_0$ – произвольные постоянные. Поскольку случай равенства главных моментов инерции рассмотрен [4], то в дальнейшем считаем

$$A_1 < A_2 < A_3. \tag{3}$$

Приведем дифференциальную систему уравнений (1) к безразмерному виду, полагая

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2E}{\mu_*}}\Omega_i, \qquad \lambda_i = \beta_i\sqrt{2\mu_* E}, \qquad t = \sqrt{\frac{\mu_*}{2E}}\tau, \qquad b_i = \frac{A_i}{\mu_*}, \tag{4}$$

где $\mu_*$ – параметр, имеющий размерность момента инерции, а $\Omega_i$, $\beta_i$ – безразмерные величины, $\tau$ – безразмерное время. В безразмерных величинах (4) уравнения (1) таковы

$$\begin{aligned}b_1\dot{\Omega}_1 &= (b_2 - b_3)\Omega_2\Omega_3 + \beta_2\Omega_3 - \beta_3\Omega_2,\\ b_2\dot{\Omega}_2 &= (b_3 - b_1)\Omega_3\Omega_1 + \beta_3\Omega_1 - \beta_1\Omega_3,\\ b_3\dot{\Omega}_3 &= (b_1 - b_2)\Omega_1\Omega_2 + \beta_1\Omega_2 - \beta_2\Omega_1.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь для обозначения производной по безразмерному времени $\tau$ сохраним точку над переменными $\Omega_i$. Приведем к безразмерному виду интегралы (2). На основании (4) имеем

$$b_1\Omega_1^2 + b_2\Omega_2^2 + b_3\Omega_3^2 = 1, \tag{6}$$

$$(b_1\Omega_1 + \beta_1)^2 + (b_2\Omega_2 + \beta_2)^2 + (b_3\Omega_3 + \beta_3)^2 = l_0^2, \tag{7}$$

где $l_0^2 = \dfrac{L_0^2}{2\mu_* E}$ – безразмерный параметр.

Исследуем дифференциальные уравнения (5) на основе метода, предложенного Й. Виттенбургом [3]. Умножив обе части (6) на параметр $\varepsilon_0$ и вычитая (7), представим разность в виде

$$\sum_{i=1}^{3} b_i(\varepsilon_0 - b_i)\big(\Omega_i - \frac{\beta_i}{\varepsilon_0 - b_i}\big)^2 = f(\varepsilon_0) - l_0^2, \tag{8}$$

где $f(\varepsilon_0) = \varepsilon_0\Big(1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3}\dfrac{\beta_\alpha^2}{\varepsilon_0 - b_\alpha}\Big)$. Пусть в равенстве (8) выполняется условие $F(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0) - l_0^2 = 0$, т. е.

$$F(\varepsilon_0) = \frac{\beta_1^2}{\varepsilon_0 - b_1} + \frac{\beta_2^2}{\varepsilon_0 - b_2} + \frac{\beta_3^2}{\varepsilon_0 - b_3} - \frac{l_0^2}{\varepsilon_0} + 1 = 0. \tag{9}$$

Уравнение $F(\varepsilon_0) = 0$ имеет действительный корень [3]. В силу (3) существует корень этого уравнения, который удовлетворяет, например условию

$$b_1 < b_2 < \varepsilon_0 < b_3. \tag{10}$$

Введем вместо $\Omega_i$ переменные $w_i$, используя соотношения

$$\Omega_i = w_i + \frac{\beta_i}{\varepsilon_0 - b_i}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{11}$$

Тогда, указанная в (8) комбинация уравнений (6), (7) приводит к уравнению

$$\frac{w_1^2}{k_1^2} + \frac{w_2^2}{k_2^2} = w_3^2, \tag{12}$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{b_3(b_3 - \varepsilon_0)}{b_1(\varepsilon_0 - b_1)}}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{b_3(b_3 - \varepsilon_0)}{b_2(\varepsilon_0 - b_2)}}. \tag{13}$$

Уравнению (12) соответствуют параметрические уравнения

$$w_1 = k_1 w_3 \sin\varphi, \qquad w_2 = k_2 w_3 \cos\varphi, \tag{14}$$

где $\varphi$ – новая переменная. Из интеграла (6) после подстановки в него значений (11), (14) получим квадратное уравнение

$$a_1(\varphi) w_3^2 - 2a_2(\varphi) w_3 + a_3 = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\varphi) &= b_1 k_1^2 \sin^2\varphi + b_2 k_2^2 \cos^2\varphi + b_3, \\ a_2(\varphi) &= \frac{b_1 k_1 \beta_1}{b_1 - \varepsilon_0} \sin\varphi + \frac{b_2 k_2 \beta_2}{b_2 - \varepsilon_0} \cos\varphi + \frac{b_3 \beta_3}{b_3 - \varepsilon_0}, \\ a_3 &= \frac{b_1 \beta_1^2}{(\varepsilon_0 - b_1)^2} + \frac{b_2 \beta_2^2}{(\varepsilon_0 - b_2)^2} + \frac{b_3 \beta_3^2}{(\varepsilon_0 - b_3)^2} - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Для получения зависимости $\varphi(\tau)$ обратимся к системе (5). Применяя подход, используемый в [3], имеем

$$\chi_0 \tau = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{g(\varphi)}}, \tag{17}$$

где

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 - b_1)(\varepsilon_0 - b_2)}{b_1 b_2 b_3}}, \qquad g(\varphi) = a_2^2(\varphi) - a_3 a_1(\varphi).$$

Запишем функцию $g(\varphi)$ с учетом (16):

$$g(\varphi) = c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi, + c_3 \sin 2\varphi + c_4 \sin \varphi + c_5 \cos \varphi + c_0, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
&c_1 = b_1 k_1^2 \Big(1 - \frac{b_2 \beta_2^2}{(\varepsilon_0 - b_2)^2} - \frac{b_3 \beta_3^2}{(\varepsilon_0 - b_3)^2}\Big),\\
&c_2 = b_2 k_2^2 \Big(1 - \frac{b_1 \beta_1^2}{(\varepsilon_0 - b_1)^2} - \frac{b_3 \beta_3^2}{(\varepsilon_0 - b_3)^2}\Big),\\
&c_3 = \frac{b_1 b_2 k_1 k_2 \beta_1 \beta_2}{(\varepsilon_0 - b_1)(\varepsilon_0 - b_2)}, \qquad c_4 = \frac{2 b_1 b_3 k_1 \beta_1 \beta_3}{(b_1 - \varepsilon_0)(b_3 - \varepsilon_0)},\\
&c_5 = \frac{2 b_2 b_3 k_2 \beta_2 \beta_3}{(b_2 - \varepsilon_0)(b_3 - \varepsilon_0)}, \qquad c_0 = b_3 \Big(1 - \frac{b_1 \beta_1^2}{(\varepsilon_0 - b_1)^2} - \frac{b_2 \beta_2^2}{(\varepsilon_0 - b_2)^2}\Big).
\end{aligned} \tag{19}$$

Представим (18) в виде функций по $u$, где $u = \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$:

$$g(u) = \frac{A u^4 + 4 B u^3 + 6 C u^2 + 4 B' u + A'}{(1 + u^2)^2}. \tag{20}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
A = c_2 - c_5 + c_0, \qquad B = \frac{1}{2}(c_4 - 2c_3), \qquad C = \frac{1}{3}(2c_1 - c_2 + c_0),\\
B' = \frac{1}{2}(2c_3 + c_4), \qquad A' = c_2 + c_5 + c_0.
\end{gathered} \tag{21}$$

В силу (20) интеграл из (17) примет вид

$$\int \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}} = \frac{\chi_0 \tau}{2}, \tag{22}$$

где

$$\Phi(u) = A u^4 + 4 B u^3 + 6 C u^2 + 4 B' u + A'. \tag{23}$$

**2. Первый частный случай.** Вид тригонометрического многочлена $g(\varphi)$ из формулы (18) позволяет достаточно наглядно свести задачу интегрирования уравнений движения (5) к определению переменных $\Omega_i$ от времени в частных случаях.

Рассмотрим вначале частный случай $\beta_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_3 \neq 0$. Тогда из (17)–(19) получим

$$\chi_0 \tau = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sigma_1 \cos 2\varphi + \sigma_0}}, \tag{24}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(k_2^2 b_2 - k_1^2 b_1)\Big(1 - \frac{b_3\beta_3}{(\varepsilon_0 - b_3)^2}\Big),$$
$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(k_1^2 b_1 + k_2^2 b_2)\Big(1 - \frac{b_3\beta_3}{(\varepsilon_0 - b_3)^2}\Big) + b_3. \tag{25}$$

Сведем решение уравнения (24) к эллиптическим функциям времени. Будем полагать, что параметры (25) удовлетворяют условиям

$$0 < \sigma_1 < \sigma_0. \tag{26}$$

При выполнении неравенств (25) из (24) имеем

$$\varphi = \mathrm{am}\mu_0\tau, \quad \cos\varphi = \mathrm{cn}\,\mu_0\tau, \quad \sin\varphi = \mathrm{sn}\mu_0\tau, \quad \dot{\varphi} = \mu_0\mathrm{dn}\mu_0\tau, \tag{27}$$

где $\mu_0 = \chi_0\sqrt{\sigma_1 + \sigma_0}$; модуль эллиптических функций из (27) имеет значение $\widehat{k}_1^2 = \dfrac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_0}$. Из формул (14), (15), используя (27), определим зависимость от времени переменных $w_i$:

$$w_1^{1,2} = k_1\Big(\frac{b_3\beta_3}{b_3 - \varepsilon_0} \pm \sqrt{\sigma_1 + \sigma_0}\mathrm{dn}\,\mu_1\tau\Big)\mathrm{sn}\,\mu_0\tau,$$
$$w_2^{1,2} = k_2\Big(\frac{b_3\beta_3}{b_3 - \varepsilon_0} \pm \sqrt{\sigma_1 + \sigma_0}\mathrm{dn}\,\mu_1\tau\Big)\mathrm{cn}\,\mu_0\tau, \tag{28}$$
$$w_3^{1,2} = \frac{b_3\beta_3}{b_3 - \varepsilon_0} \pm \sqrt{\sigma_1 + \sigma_0}\mathrm{dn}\,\mu_0\tau.$$

Тогда на основании (28) компоненты угловой скорости $\Omega_i$ можно найти по формулам (11).

**3. Второй частный случай.** Он характеризуется равенством $\beta_3 = 0$. Из формул (19) следует, что параметры $c_4, c_5$ обращаются в нуль. Запишем при указанных условиях выражения для $g(\varphi)$ из (18)

$$g(\varphi) = g_0 + g_1\sin 2\varphi + g_2\cos 2\varphi, \tag{29}$$

где $g_0 = c_0 + \dfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$, $\quad g_1 = c_3$, $\quad g_2 = \dfrac{1}{2}(c_2 - c_1)$.

Функцию $g(\varphi)$ из (29) представим в виде

$$g(\varphi) = g_0 + g_3\cos(2\varphi + \varphi_0^*), \tag{30}$$

где $g_3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, $\quad \cos\varphi_0^* = \dfrac{g_2}{g_3}$, $\quad \sin\varphi_0^* = -\dfrac{g_1}{g_3}$. Подставим выражение (30) в интеграл (17) и введем в нем новую переменную $\psi$: $2\psi = 2\varphi + \varphi_0^*$. Тогда

$$\chi_0\tau = \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{g_0 + g_3\cos 2\psi}}\ . \tag{31}$$

Исследование интеграла (31) можно провести по аналогии с интегралом (24).

**4. Третий частный случай.** Он характеризуется тем, что функция $g(\varphi)$ из (18) не содержит выражений $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$. Из (19) следует, что должны выполняться два условия на параметры

$$\beta_1 = 0, \qquad \beta_3^2 = \frac{(\varepsilon_0 - b_1)^2[b_2\beta_2^2 + (b_2 - b_1)(\varepsilon_0 - b_2)]}{b_3(b_2 - b_1)(\varepsilon_0 - b_2)}. \tag{32}$$

При наличии условий (32) интеграл (17) примет вид

$$\chi_0 b_3 \tau = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sigma_1' \cos\varphi + \sigma_0'}} , \tag{33}$$

где

$$\sigma_1' = \frac{2b_2k_2\beta_2\beta_3}{(b_2 - \varepsilon_0)(b_3 - \varepsilon_0)}, \qquad \sigma_0' = 1 + \frac{\beta_2^2 b_2}{(\varepsilon_0 - b_2)^2}\Big(\frac{b_3 - \varepsilon_0}{b_2 - b_1} - 1\Big). \tag{34}$$

Будем предполагать, что выполняются неравенства: $0 < \sigma_1' < \sigma_0'$. Тогда из (33), применяя стандартный метод обращения интеграла, получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} &\varphi = 2\mathrm{am}\mu_0'\tau, \qquad \cos\varphi = \mathrm{cn}^2\mu_0'\tau - \mathrm{sn}^2\mu_0'\tau,\\ &\dot{\varphi} = 2\mathrm{dn}\mu_0'\tau, \qquad \sin\varphi = 2\mathrm{sn}\mu_0'\tau\mathrm{cn}\mu_0'\tau, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\mu_0' = \dfrac{\chi_0\sqrt{\sigma_1' + \sigma_0'}}{2b_3}$, а модуль эллиптических функций в (35) имеет значение $\widehat{k}_3^2 = \dfrac{2\sigma_1'}{\sigma_1' + \sigma_0'}$.

Зависимость переменных $w_i$ от времени определим с помощью равенств (14), (15) и формул (35):

$$\begin{gathered} w_1(\tau) = 2k_1w_3(\tau)\mathrm{sn}\mu_0'\tau\mathrm{cn}\mu_0'\tau, \qquad w_2(\tau) = k_2w_3(\tau)(\mathrm{cn}^2\mu_0'\tau - \mathrm{sn}^2\mu_0'\tau),\\ w_3(\tau) = \frac{b_3\beta_3}{b_3 - \varepsilon_0} + \frac{b_2k_2}{b_2 - \varepsilon_0}(\mathrm{cn}^2\mu_0'\tau - \mathrm{sn}^2\mu_0'\tau) \pm \sqrt{\sigma_0' + \sigma_1'}\mathrm{dn}\mu_0'\tau. \end{gathered} \tag{36}$$

Компоненты $\Omega_i$ находим путем подстановки (36) в равенства (11).

**5. Обращение интеграла (22) в общем случае.** При обращении интеграла (22) возникают различные варианты, которые зависят от свойств корней полинома $\Phi(u)$ из (23). Уравнение $\Phi(u) = 0$ имеет четыре действительных корня, если выполняются условия

$$\begin{cases} G > 0, \qquad B^2 - AC > 0,\\ 12(B^2 - AC)^2 - A^2g_2 > 0, \end{cases} \tag{37}$$

где $G = g_1^3 - 27g_2^2$, $g_1 = AA' - 4BB' + 3C^2$, $g_2 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2$. Условия (37) имеют место, например, при следующих значениях параметров (примем здесь и далее в примерах $\mu_* = A_3$):

$$\varepsilon_0 = 0.89, \quad b_1 = 0.9, \quad b_2 = 0.3, \quad b_3 = 1,$$
$$\beta_1 = 0.3, \quad \beta_2 = 0.07, \quad \beta_3 = 90.$$

Уравнение $\Phi(u) = 0$ имеет два действительных и два комплексных корня при наличии неравенств

$$\begin{cases} G < 0, \qquad B^2 - AC > 0, \\ 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 > 0. \end{cases} \tag{38}$$

Приведем пример численных значений параметров, удовлетворяющих условиям (38):

$$\varepsilon_0 = 0.35, \quad b_1 = 0.9, \quad b_2 = 0.3, \quad b_3 = 1,$$
$$\beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 26.$$

В случае, если второе и третье неравенства системы (38) не выполняются, то уравнение (23) имеет четыре комплексных корня. Для того, чтобы привести пример существования четырех комплексных корней данного уравнения, достаточно считать в $c_i$ из (19) параметры $\beta_i$ $(i = \overline{1,3})$ малыми.

Как показано в [11], интеграл (22) заменой

$$u = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \tag{39}$$

где $\mu, \nu$ – корни квадратного уравнения

$$(p - p')y^2 + 2(q - q')^2 y + (p'q - pq') = 0$$

(значения $p, p', q, q'$ указаны в [11]), приводится к виду

$$\int \frac{dt}{\sqrt{D(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} = R_0 \tau, \tag{40}$$

где $R_0$ – const. Действительность величин $\mu, \nu$ доказана в [11].

Запишем каноническую форму данного интеграла для любых возможных комбинаций значений $D, m, m'$.

1) При $D = 1$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$ полином, стоящий под радикалом, имеет четыре действительных корня. Для того, чтобы радикал в (40) имел вещественные значения, нужно, чтобы было $t < \dfrac{1}{h}$ или $t > \dfrac{1}{h'}$.

Полагаем в (40) $ht = z$, где $0 < z < 1$ или $z > \dfrac{h}{h'}$. Тогда каноническая форма интеграла (40) примет вид

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2)}} = \tau\theta_1 \qquad (\theta_1 = hR_0). \tag{41}$$

Произведем в (41) замену $z = \sin\psi$, тогда

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} = \tau\theta_1, \tag{42}$$

где $k_1^2 = \dfrac{h'^2}{h^2}$. Обращая интеграл (42), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{am}\theta_1\,\tau, \qquad \sin\mathrm{am}\theta_1\,\tau = \mathrm{sn}\theta_1\tau,\\ &\cos\mathrm{am}\theta_1\tau = \mathrm{cn}\theta_1\tau, \qquad \mathrm{dn}\theta_1\tau = \sqrt{1-k_1^2\mathrm{sn}^2\theta_1\tau}. \end{aligned} \tag{43}$$

Таким образом, используя соотношения $ht = z$ и (43), мы можем выписать $u$ из (39) через эллиптические функции Якоби, заданные в (43):

$$u = \frac{\mu\mathrm{sn}\theta_1\tau + \nu h}{\mathrm{sn}\theta_1\tau + h}. \tag{44}$$

Функция $\varphi(t)$ находится из формулы $u = \mathrm{tg}\,\dfrac{\varphi}{2}$, а основные переменные – из (11), (14), (15).

2) При $D = 1,\ m = -h^2,\ m' = h'^2\ \ (h, h' > 0)$ уравнение $\Phi(u) = 0$ имеет два действительных и два мнимых корня. Радикал будет иметь вещественные значения, если $t < \dfrac{1}{h}$. Полагая $ht = \sqrt{1-z^2}$, где $0 < z \le 1$ и $z = \sin\psi$, представим интеграл (40) в форме Лежандра

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\psi}} = \theta_2\tau \qquad (\theta_2 = -R_0\sqrt{h^2+h'^2}), \tag{45}$$

где $k_2^2 = \dfrac{h'^2}{h^2+h'^2}$. Обращая интеграл (45), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{am}\theta_2\,\tau, \qquad \sin\mathrm{am}\theta_2\,\tau = \mathrm{sn}\theta_2\tau,\\ &\cos\mathrm{am}\theta_2\tau = \mathrm{cn}\theta_2\tau, \qquad \mathrm{dn}\theta_2\tau = \sqrt{1-k_2^2\mathrm{sn}^2\theta_2\tau}. \end{aligned} \tag{46}$$

Используя формулы $ht = \sqrt{1-z^2}$ и (46), выписываем $u$ из (39) через эллиптические функции

$$u = \frac{\mu\,\mathrm{cn}\theta_2\tau + \nu h}{\mathrm{cn}\theta_2\tau + h}. \tag{47}$$

На основании (17) функция $\varphi(t)$ находится из формулы $u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, а основные переменные – из (11), (14), (15).

3) При $D = 1$, $m = h^2$, $m' = h'^2$ $(h > h' > 0)$ имеем четыре мнимых корня. Полагаем $ht = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, $z = \sin\psi$. Из (40) имеем

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_3^2\sin^2\psi}} = \theta_3\tau \qquad (\theta_3 = R_0 h), \tag{48}$$

где $k_3^2 = \dfrac{h^2-h'^2}{h^2}$. Обращая интеграл (48), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{am}\theta_3\,\tau, && \sin\mathrm{am}\theta_3\,\tau = \mathrm{sn}\theta_3\tau,\\ &\cos\mathrm{am}\theta_3\tau = \mathrm{cn}\theta_3\tau, && \mathrm{dn}\theta_3\tau = \sqrt{1-k_3^2\mathrm{sn}^2\theta_3\tau}. \end{aligned} \tag{49}$$

Таким образом, используя формулы $ht = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ и (49), мы можем выписать $u$ из (39) через эллиптические функции

$$u = \frac{\mu\,\mathrm{sn}\theta_3\tau + \nu h\mathrm{cn}\theta_3\tau}{\mathrm{sn}\theta_3\tau + h\mathrm{cn}\theta_3\tau}. \tag{50}$$

Функция $\varphi(t)$ находится из формулы $u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ в силу (50), а основные переменные – из (11), (14), (15).

4) При $D = -1$, $m = -h^2$, $m' = h'^2$ $(h, h' > 0)$. Уравнение $\Phi(u) = 0$ имеет два действительных и два мнимых корня. Изменение $t$ ограничено неравенством $t > \dfrac{1}{h}$. Полагаем $ht = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $z = \sin\psi$, а $0 < z < 1$. Тогда каноническая форма интеграла (40) такова:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_4^2\sin^2\psi}} = \theta_4\tau \qquad (\theta_4 = R_0\sqrt{h^2+h'^2}), \tag{51}$$

$k_4^2 = \dfrac{h^2}{h^2+h'^2}$. Обращая интеграл (51), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{am}\theta_4\,\tau, && \sin\mathrm{am}\theta_4\tau = \mathrm{sn}\theta_4\tau,\\ &\cos\mathrm{am}\theta_4\tau = \mathrm{cn}\theta_4\tau, && \mathrm{dn}\theta_4\tau = \sqrt{1-k_4^2\mathrm{sn}^2\theta_4\tau}. \end{aligned} \tag{52}$$

Используя формулу $ht = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, выписываем $u$ из (39) через эллиптические функции

$$u = \frac{\mu + \nu h\mathrm{cn}\theta_4\tau}{1 + h\mathrm{cn}\theta_4\tau}. \tag{53}$$

На основании (52), (53) функция $\varphi(t)$ находится из формулы $u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, а основные переменные – из (11), (14), (15).

5) При $D = -1$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$. Уравнение $\Phi(u) = 0$ имеет четыре мнимых корня. Переменная $t$ изменяется между значениями $\dfrac{1}{h}$ и $\dfrac{1}{h'}$. Полагаем $h't = \sqrt{1 - \dfrac{h^2 - h'^2}{h^2}z^2}$, где $0 < z < 1$ и $z = \sin\psi$, из (40) получим

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_5^2 \sin^2\psi}} = \theta_5\tau \qquad (\theta_5 = -R_0 h), \tag{54}$$

где $k_5^2 = \dfrac{h^2 - h'^2}{h^2}$. Обращая интеграл (54), находим:

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{am}\theta_5\tau, \qquad \sin\mathrm{am}\theta_5\tau = \mathrm{sn}\theta_5\tau, \\ &\cos\mathrm{am}\theta_5\tau = \mathrm{cn}\theta_5\tau, \qquad \mathrm{dn}\theta_5\tau = \sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2\theta_5\tau}. \end{aligned} \tag{55}$$

Тогда, используя соотношение $h't = \sqrt{1 - \dfrac{h^2 - h'^2}{h^2}z^2}$ и (55), выражаем $u$ из (39) через эллиптические функции

$$u = \frac{\mu\mathrm{dn}\theta_5\tau + \nu h'}{\mathrm{dn}\theta_5\tau + h'}. \tag{56}$$

В силу (56) функция $\varphi(t)$ находится из формулы $u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, а основные переменные – из (11), (14), (15).

Итак, с помощью подхода Й. Виттенбурга получены зависимости основных переменных уравнений движения свободного гиростата в случае Н.Е. Жуковского. Выполнен полный анализ вариантов представления этих переменных через эллиптические функции времени.


1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч.: в 2–х т. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
2. *Volterra V.* Sur la theoriedes variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
3. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 288 с.
4. *Харламова Е.И.* О движении гиростата по инерции // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 10. – С. 34–40.
5. *Ковалева Л.М.* Один случай движения гиростата по инерции. Разделяющие движения // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 10. – С. 41–45.
6. *Кравчук Д.Н.* Геометрическое истолкование одного класса движений гиростата по инерции // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 15. – С. 15–22.
7. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.

9. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
10. *Горр Г.В., Синенко А.И.* О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 2014. – **78**, вып. 3. – С. 334–345.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

**A.I. Synenko**

**Investigation of M.E. Zhukovsky solution of the problem of the free gyrostat motion**

Time dependences for components of vector of the angular velocity are investigated in Zhukovsky solution, which describes a motion of a gyrostat with immovable centre of mass.

**Keywords:** *gyrostat, solution Zhukovsky.*

**А.І. Синенко**

**Дослідження розв'язку М.Є. Жуковського задачі про рух вільного гіростата**

Вивчено залежності від часу компонентів вектора кутової швидкості в розв'язку М.Є. Жуковського, який описує рух гіростата з нерухомим центром мас.

**Ключові слова:** *гіростат, розв'язок М.Є. Жуковського.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
forjobmain@gmail.com

Получено 20.02.14