ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.81

ОЧІКУВАНА КОРИСНІСТЬ У СИТУАЦІЯХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З ВИПАДКОВИМИ У ШИРОКОМУ СЕНСІ НАСЛІДКАМИ

В.І. ІВАНЕНКО, І.О. ПАСІЧНІЧЕНКО

Запропоновано розповсюдження теореми про очікувану корисність на ситуації прийняття рішень з випадковими у широкому сенсі наслідками. Статистична закономірність відповідного випадкового явища має форму сімейства скінченно-адитивних ймовірнісних мір. Це сімейство має об'єктивне походження і, взяте в цілому, описує закономірність випадкового явища. Рішенням поставлено у відповідність статистичні закономірності на множині наслідків. Запропоновано природні умови на відношення переваги на множині всіх статистичних закономірностей. Показано, що вони є необхідними і достатніми для існування і єдиності функціоналу корисності у формі мінімуму очікуваної корисності елементів статистичної закономірності. Отриманий результат застосовано у вирішенні задач прийняття рішень, а також до вимірювання інформативності експерименту та невизначеності ситуації прийняття рішень.

ВСТУП

Теорема про очікувану корисність, перший варіант якої належить фон Нейману і Моргенштерну [1], застосовується в задачах вибору зі стохастичним механізмом генерації наслідків рішень. Вона дає необхідні й достатні умови існування функції корисності рішень, яка має форму математичного сподівання деякої функції наслідків.

Спираючись на цю теорему отримано низку результатів за двома основними напрямками [2]. У дослідженнях першого [3–4] зберігається припущення наявності об'єктивної, зовнішньо заданої закономірності механізму генерації наслідків. У дослідженнях другого [5–10] таке припущення опускається, відкриваючи простір для трактування певних елементів моделі як «суб'єктивних» закономірностей. У роботі будемо дотримуватись першого напрямку.

На відміну від припущень очікуваної корисності, на практиці не завжди можна розраховувати на те, що розподіл ймовірності є адекватним засобом опису закономірності випадкового явища, тобто що механізм генерації наслідків у ситуації прийняття рішень дійсно є стохастичним. Такий стан речей спостерігається, якщо фактори, які впливають на явище, не мають достатньої стабільності, щоб спричинити збіжність відносних частот подій, пов’язаних з досліджуваним явищем. В [11] у зв’язку з цим А.М. Колмогоров вживає термін «масові випадкові в широкому сенсі явища», які природно поділити на стохастичні (є предметом теорії ймовірності) та нестохастичні. В [12] наведено теорему існування так званих «статистичних закономірностей» випадкових у широкому сенсі явищ у вигляді сімейства скінченно-адитивних ймовірнісних мір (більш детально зміст цього поняття буде розкрито нижче). Таке сімейство ймовірностей має об’єктивне походження і взяте в цілому описує закономірність випадкового явища.

Теорема про очікувану корисність потребує розповсюдження на задачі вибору, які можуть містити нестохастичні наслідки.

Мета роботи — побудувати узагальнення теореми про очікувану корисність для ситуацій прийняття рішень з випадковими в широкому сенсі наслідками, використовуючи поняття статистичної закономірності.

Умови існування функції корисності такого вигляду вперше були розглянуті у загальній постановці для параметричної моделі прийняття рішень у [6; 13–14]. Ці результати було розвинуто і доповнено у [10]. Для часткового випадку, а саме параметричної моделі типу Анскомба–Аумана, відповідні умови пізніше було запропоновано в [7]. На відміну від цих робіт, у статті розглядається непараметрична (або так звана лотерейна [15]) модель із заданими зовнішньо статистичними закономірностями на множині наслідків.

ПОНЯТТЯ СТАТИСТИЧНОЇ ЗАКОНОМІРНОСТІ

Нехай X — довільна непуста множина, PF — множина всіх скінченно-адитивних ймовірнісних мір на X, тобто

$$PF = \{p : 2^X \to [0;1] \mid p(X) = 1,\ p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A)\ \forall A, B \subseteq X\}.$$

Нехай M — банаховий простір обмежених дійсних функцій f на X із нормою $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, M^* — спряжений простір. Визначимо відображення PF в M^*, поставивши у відповідність $p \in PF$ лінійний функціонал $f \mapsto \int\limits_X f\,dp$, тобто інтеграл по скінченно-адитивній мірі p. Очевидно, що це відображення ін’єктивне. Розглядаючи PF як підмножину простору M^* визначимо на PF топологію τ як слід *-слабкої топології в M^*. Тобто визначаючою системою околів точки $p \in PF$ в τ є множини

$$O_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(p) = \{p' \in PF \mid |p'f_i - pf_i| < \varepsilon\ \ \forall i \in \overline{1, n}\},$$

$$\varepsilon > 0,\ f_1, \dots, f_n \in M,\ n \in N,$$

де $pf = \int\limits_X f\,dp.$

Топологічний простір (PF, τ) є компактом. Дійсно, множина PF передкомпактна в *-слабкій топології в M^* (це випливає, наприклад, з [16], теорема 1.11.4). З ізоморфності M^* простору обмежених адитивних функцій підмножин X [17, теорема IV.5.1] випливає

$$PF = \{\phi \in M^* \mid \phi f \geq 0 \ \ \forall f \in M : f \geq 0, \ \phi 1_X = 1\},$$

звідки ясно, що PF замкнена в *-слабкій топології в M^* (1_A — індикатор множини A).

Розглянемо тепер поняття статистичної закономірності послідовності. Нехай $\bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in X \quad \forall i \in N$ — довільна послідовність. Для всіх $A \subseteq X$ та $n \in N$

$$p_{\bar{x}}^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(x_i)$$

є частотою потрапляння до A перших n членів послідовності $\bar{x}$.

Очевидно, $p_{\bar{x}}^{(n)} \in PF \quad \forall n \in N$. Позначимо P множину граничних точок послідовності $\{p_{\bar{x}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ в топології τ, тобто $p \in P$ тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $k, n_0 \in N$, $f_1, ..., f_k \in M$, $\varepsilon > 0$ існує таке $n \geq n_0$, що $\left| p_{\bar{x}}^{(n)} f_i - p f_i \right| < \varepsilon$ для всіх $i = \overline{1,k}$. Множина P непуста в наслідок компактності (PF, τ). Неважко перевірити, що вона замкнена в τ. Множина P називається статистичною закономірністю послідовності $\bar{x}$. Більше того, будь-яка непуста замкнена множина простору (PF, τ) є множиною граничних точок вибіркової направленості, і навпаки (детальніше в [18, п. 2.3]). Виходячи з цього, статистичною закономірністю називається будь-яке непусте замкнуте в τ сімейство скінченно-адитивних ймовірностей.

ТЕОРЕМА ПРО ОЧІКУВАНУ КОРИСНІСТЬ

Необхідні й достатні умови існування функції корисності того або іншого виду дають теореми представлення [19]. Вони часто мають таку форму: бінарне відношення $(\prec, Y)$ задовольняє множину умов $\{A_1, ..., A_n\}$ тоді і тільки тоді, коли існує і єдина з точністю до певного класу перетворень така функція $U : Y \to R$, що

- $x \prec y \Leftrightarrow U(x) < U(y) \quad \forall x, y \in Y$ (тобто U є функцією корисності для відношення $\prec$);
- U має властивості $\{B_1, ..., B_m\}$.

Вони застосовуються тоді, коли кожна з умов $A_1, ..., A_n$ піддається перевірці легше, ніж твердження про існування функції U. Після того, як у певній задачі вибору встановлено існування функції корисності U, проводиться оцінка невідомих параметрів цієї функції і вирішується задача знаходження оптимального рішення згідно критерію U.

Більшість сучасних теорем представлення спираються на теорему про очікувану корисність, яку ми наведемо у цій роботі. Множину X надалі вважатимемо множиною наслідків, PF — множиною рішень. Нехай $\prec$ — бінарне відношення на PF, будемо називати його відношенням переваги. Для будь-яких $p, q \in PF$ запис $p \precsim q$ означає (не $q \prec p$), $p \sim q$ означає (не $q \prec p$ і не $p \prec q$).

Для будь-яких $p, q \in PF$, $\alpha \in [0;1]$ визначимо відображення $\alpha p + (1-\alpha)q : 2^X \to R$, поклавши

$$[\alpha p + (1-\alpha)q](A) = \alpha p(A) + (1-\alpha)q(A) \quad \forall A \subseteq X.$$

Очевидно, $\alpha p + (1-\alpha)q \in PF$. Поставимо у відповідність $x \in X$ елемент $\delta_x \in PF$, визначений співвідношенням $\delta_x(\{x\}) = 1$. Розглянемо наступні умови на відношення переваги $(\prec, PF)$, відомі під назвою «аксіоми очікуваної корисності»:

A1. $(\prec, PF)$ асиметричне і негативно транзитивне;

A2. $\forall p,q,r \in PF$ $(p \prec q$ й $q \prec r) \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in (0;1) : \alpha p + (1-\alpha)r \prec q$ та $q \prec \prec \beta p + (1-\beta)r$;

A3. $\forall p,q,r \in PF, \alpha \in (0;1)$ $p \prec q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \prec \alpha q + (1-\alpha)r$;

A4. $\forall p,q,r \in PF$, $A \subseteq X$

$(p(A) = 1,\ q \prec \delta_x\ \forall x \in A) \Rightarrow q \precsim p$, $(p(A) = 1,\ \delta_x \prec r\ \forall x \in A) \Rightarrow p \precsim r$.

Теорема (про очікувану корисність).

І. Відношення переваги $(\prec, PF)$ задовольняє умови **A1**–**A4** тоді й тільки тоді, коли існує така $U : PF \to R$, що

1) $p \prec q \Leftrightarrow U(p) < U(q) \quad \forall p,q \in PF$;

2) $U(p) = \int_X u(x)dp \quad \forall p \in PF$, де $u : X \to R$ — деяка обмежена функція.

ІІ. Нехай $U: PF \to R$ має властивості 1 і 2. Функція $V : PF \to R$ також має властивості 1 і 2 з v замість u тоді і тільки тоді, коли існують такі $a,b \in R$, $a > 0$, що $V(p) = aU(p) + b$ для будь-якого $p \in PF$.

Теорема дає загальний вигляд функції U та стверджує її єдиність з точністю до додатного лінійного перетворення. Очевидно, $U(\delta_x) = u(x)$ $\forall x \in X$, тому властивість 2 говорить, що U цілком визначається своїми значеннями на $\{\delta_x \mid x \in X\}$. Також властивість 2 тягне за собою лінійність U:

$$U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q) \quad \forall p,q \in PF,\ \alpha \in [0;1].$$

A1 є умовою слабкого порядку, **A4** — умовою домінування. Розглянемо $\alpha p + (1-\alpha)q$ як рішення, наслідок якого визначається складною подією: на першому етапі з ймовірностями α та $1-\alpha$ рішення $\alpha p + (1-\alpha)q$ зводиться до p або q відповідно, на другому етапі наслідок отримується відповідно розподілу ймовірностей p або q (залежно від результату першого етапу). Тоді можна інтерпретувати **A2** як умову неперервності, **A3** як умову незалежності переваг (детальніше див. [19, с. 169–173]).

УЗАГАЛЬНЕНА ОЧІКУВАНА КОРИСНІСТЬ ДЛЯ СТАТИСТИЧНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ

Нехай $\boldsymbol{P}$ — множина всіх статистичних закономірностей, тобто

$$\boldsymbol{P} = \{P \subseteq PF \mid P \text{ замкнена в } \tau,\ P \neq \varnothing\}.$$

Тепер множиною рішень вважатимемо $\boldsymbol{P}$ й розглядатимемо на ній відношення переваги $\prec$. Наша ціль — це побудова функції корисності вигляду

$$U(P)=\min_{p\in P}\int_X u(x)dp\ ,\ P\in\boldsymbol{P}\ ,$$

де $u:X\to R$ — деяка обмежена функція.

Надалі розглядатимемо PF як підмножину $\boldsymbol{P}$, ототожнюючи $p\in PF$ з одноточковою статистичною закономірністю $\{p\}\in\boldsymbol{P}$. Для будь-яких $P\in\boldsymbol{P}$, $q\in PF$ позначимо $\alpha P+(1-\alpha)q$ множину $\{\alpha p+(1-\alpha)q\mid p\in P\}$. У подальшому нам знадобляться дві допоміжні леми.

Лема 1. $\alpha P+(1-\alpha)q\in\boldsymbol{P}\ \ \forall P\in\boldsymbol{P},\ q\in PF,\ \alpha\in(0;1)$.

Доведення. Треба показати замкненість $\alpha P+(1-\alpha)q$. Розглянемо відображення $F:PF\to PF$, задане співвідношенням $F(p)=\alpha p+(1-\alpha)q$ $\forall p\in PF$, та доведемо його неперервність. Для цього покажемо, що $\forall p\in PF$ з $p'\in O_{\varepsilon/\alpha,f_1,\dots,f_n}(p)$ випливає $F(p')\in O_{\varepsilon,f_1,\dots,f_n}(F(p))$. Дійсно, $\forall i\in\overline{1,n}$:

$$|F(p')f_i-F(p)f_i|=|[\alpha p'+(1-\alpha)q]f_i-[\alpha p+(1-\alpha)q]f_i|=$$

$$=|\alpha p'f_i+(1-\alpha)qf_i-\alpha pf_i-(1-\alpha)qf_i|=\alpha|p'f_i-pf_i|<\alpha\frac{\varepsilon}{\alpha}=\varepsilon,$$

де друга рівність отримана з властивості інтеграла. Тоді множина $\alpha P+$ $+(1-\alpha)q=F(P)$ замкнена як образ компакта при неперервному відображенні.

Лема 2. Нехай $\alpha_n\in[0;1]$ $\forall n\in N$ та $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тоді для будь-яких $P\in\boldsymbol{P}$ та околу $A\in\tau$ точки $r\in PF$ існує таке $n_0\in N$, що $\alpha_n P+(1-\alpha_n)r\subseteq A$ для всіх $n\ge n_0$.

Доведення. Знайдуться $\varepsilon>0$, $f_1,\dots,f_k\in M$, при яких $O_{\varepsilon,f_1,\dots,f_k}(r)\subseteq A$. Зафіксуємо $i\in\{1,\dots,k\}$. Оскільки відображення $p\mapsto pf_i$ неперервне на компакті P, існують такі $p_0,p^0\in P$, що $p_0f_i=\inf_{p\in P}pf_i$ та $p^0f_i=\sup_{p\in P}pf_i$. Оскільки

$$|[\alpha p_0+(1-\alpha)r]f_i-rf_i|=|\alpha p_0f_i+(1-\alpha)rf_i-\alpha rf_i-(1-\alpha)rf_i|=\alpha|p_0f_i-rf_i|,$$

і аналогічно для p^0, то можна взяти $\delta_i>0$ настільки малим, щоб при $0\le\alpha<\delta_i$ було $|[\alpha p_0+(1-\alpha)r]f_i-rf_i|<\varepsilon$ та $|[\alpha p^0+(1-\alpha)r]f_i-rf_i|<\varepsilon$. Тоді й для будь-якого $p\in P$ маємо $|[\alpha p+(1-\alpha)r]f_i-rf_i|<\varepsilon$, оскільки

$$[\alpha p_0+(1-\alpha)r]f_i\le[\alpha p+(1-\alpha)r]f_i\le[\alpha p^0+(1-\alpha)r]f_i\ .$$

Залишилось взяти $\delta_0=\min\{\delta_i\mid i=\overline{1,k}\}$. Тоді при $0\le\alpha<\delta_0$ з $p\in$ $\in\alpha P+(1-\alpha)r$ випливає $p\in O_{\varepsilon,f_1,\dots,f_k}(r)$, що й треба було довести.

Наша множина умов на $(\prec,\boldsymbol{P})$ складається з таких семи елементів.

A1′. $(\prec,\boldsymbol{P})$ асиметричне і негативно транзитивне.

Умови **А2**–**А4** залишаються буквально тими самими з тією тільки різницею, що тепер $(\prec, PF)$ є звуженням $(\prec, \boldsymbol{P})$.

А5. $\forall P \in \boldsymbol{P},\ q \in PF\ \left(q \precsim p\ \forall p \in P\right) \Rightarrow q \precsim P.$

А6. $\forall P \in \boldsymbol{P}, r \in PF$, $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\alpha_n \in [0;1]\ \forall n \in N$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$,

$$P \precsim \alpha_n P + (1-\alpha_n) r\ \forall n \in N \Rightarrow P \precsim r.$$

А7. $\forall P \in \boldsymbol{P},\ p \in P\ \ P \precsim \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p$.

Очевидно, **А5** є умовою домінування. В **А6** множина $\alpha_n P + (1-\alpha_n) r$ при $n \to \infty$ й $\alpha_n \to 0$ у певному сенсі (лема 2) стягується в r, тому цю умову можна вважати певною формою неперервності відношення переваги. Умова **А7** показує, що статистична закономірність не стає гіршою після рандомізації кожного свого елемента з певним фіксованим.

Теорема.

I. Відношення переваги $(\prec, \boldsymbol{P})$ задовольняє умови **А1′**, **А2**–**А7** тоді й тільки тоді, коли існує така $U : \boldsymbol{P} \to R$, що

1) $P \prec Q \Leftrightarrow U(P) < U(Q)\ \ \forall P, Q \in \boldsymbol{P}$; ;

2) $U(P) = \min\limits_{p \in P} \int\limits_X u(x) dp\ \ \forall P \in \boldsymbol{P}$, де $u : X \to R$ — деяка обмежена функція.

II. Нехай $U : \boldsymbol{P} \to R$ має властивості 1 та 2. Функція $V : \boldsymbol{P} \to R$ також володіє властивостями 1 та 2 з v замість u тоді і тільки тоді, коли існують такі $a, b \in R$, $a > 0$, що $V(P) = aU(P) + b$ для будь-якого $P \in \boldsymbol{P}$.

Доведення. I) Доведемо достатність умов **А1′**, **А2**–**А7**. Звуження $(\prec, \boldsymbol{P})$ на PF задовольняє умови **А1**–**А4**, отже за теоремою про очікувану корисність існує $J : PF \to R$:

$$p \prec q \Leftrightarrow J(p) < J(q)\ \ \forall p, q \in PF, \quad J(p) = \int\limits_X u(x) dp\ \ \forall p \in PF,$$

де $u : X \to R$ — деяка обмежена функція. Зафіксуємо довільну $P \in \boldsymbol{P}$. Точна нижня границя множини $\{J(p) \mid p \in P\}$ досягається, тому що J неперервна на компакті P. Нехай p_0 — будь-який елемент P, для якого $J(p_0) = \min\limits_{p \in P} J(p)$. Тоді $p_0 \precsim P$ за умовою **А5**. З іншого боку, $P \precsim \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p_0$ за **А7** та $p_0 \in \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p_0$. Тоді знову за **А7**

$$\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p_0 \precsim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p_0\right) + \frac{1}{2}p_0.$$

Очевидно, що $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p_0\right) + \frac{1}{2}p_0 = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}p_0$. Отже, $P \precsim \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}p_0$. Продовжуючи так само далі, отримаємо послідовність статистичних закономірностей $P \precsim \frac{1}{2^n} P + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) p_0 \quad \forall n \in N$. Тоді за **A6** $P \precsim p_0$ а, отже, $P \sim p_0$. Покладемо $U(P) = J(p_0)$. Очевидно, $U : \mathbf{P} \to R$ має властивості 1 та 2 з теореми.

Необхідність **A1′** та **A5** очевидна. Необхідність **A2**–**A4** випливає з теореми про очікувану корисність, **A6** отримуємо з рівності

$$U(\alpha P + (1-\alpha)r) = \alpha U(P) + (1-\alpha)U(r) \ \ \forall P \in \mathbf{P},\ r \in PF,\ \alpha \in [0;1].$$

Встановимо необхідність **A7**. Для будь-яких $q, p \in P$ маємо

$$U\left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}p\right) = \frac{1}{2}U(q) + \frac{1}{2}U(p) \geq U(P).$$

Отже,

$$U\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p\right) = \min_{q \in P} U\left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}p\right) \geq U(P),$$

з чого випливає $P \precsim \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}p$.

II) Твердження про єдиність випливає з відповідного твердження в теоремі про очікувану корисність. Теорему доведено.

Очевидно, $U(p) = \int\limits_X u(x)dp$ при $p \in PF$, отже u є функцією корисності Неймана–Моргенштерна.

ВИСНОВКИ

Нехай ситуація прийняття рішень задана трійкою $S = (X, D, P_D)$, де D — довільна непуста множина (рішень), P_d ($d \in D$) — статистична закономірність на X (яка відповідає рішенню d), $P_D = \{P_d \mid d \in D\}$. Якщо відомо, що відношення переваги того, хто приймає рішення, задовольняє умови **A1′**, **A2**–**A7**, то, виходячи з доведеної теореми, впорядкування елементів D у ситуації S для нього зводиться до оцінки функції u та застосування критерію $d \mapsto \min\limits_{p \in P_d} \int\limits_X u(x)dp$ на D.

Природно виникає проблема узагальнення таких понять як байєсівський ризик, інформативність експерименту тощо [20]. У [18] в загальній постановці розглядаються величини ризику (цінності) ситуації, інформативності експерименту та невизначеності ситуації, встановлюються їх основні властивості. Доведена теорема служить обґрунтуванням застосування реалізацій цих величин, побудованих на основі функції корисності Неймана–Моргенштерна. Назвемо цінністю ситуації S величину

$$\psi(S) = \sup_{d \in D} \min_{p \in P_d} \int\limits_X u(x)dp.$$

Доступні в ситуації S спостереження $h \in H$ можна впорядкувати за цінностями відповідних ситуацій $S^h = (X, D_h, P_{D_h})$, де D_h — множина допустимих стратегій використання результатів спостереження h, тобто за величиною

$$\mathrm{INF}(h/S) = \psi(S^h) - \psi(S),$$

яку назвемо інформативністю експерименту $h \in H$. Тоді невизначеністю ситуації S природно назвати величину $v(S) = \max\limits_{h \in H} \mathrm{INF}(h/S)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
2. *Bouyssou D., Dubois D., Prade H., Pirlot M.* Decision-Making Process: Concepts and methods. — NY: John Wiley & Sons, 2010. — 928 p.
3. *Quiggin J.* A theory of anticipated utility // Journal of Economic Behavior and Organization. — 1982. — **3**. — P. 323–343.
4. *Jaffray J.-Y.* Linear utility theory for belief functions // Operation Research Letters. — 1989. — **8**, № 2. — P. 107–112.
5. *Savage L.J.* The foundations of statistics. — NY: Wiley & Sons, 1954. — 294 p.
6. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Об одном классе правил выбора критерия // ДАН СССР. — 1986. — **287**, № 3. — С. 564–567.
7. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with a non-unique prior // Journal of Mathematical Economics. — 1989. — **18**, № 2. — P. 141–153.
8. *Tversky A., Kahneman D.* Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty // Journal of Risk and Uncertainty. — 1992. — **5**, № 4. — P. 297–323.
9. *Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences // Econometrica. — 2006. — **74**, № 6. — P. 1447–1498.
10. *Михалевич В.М.* Задачи принятия решения с денежными доходами (потерями) при сочетании принципов гарантированного и наилучшего результатов // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 85–95.
11. *Колмогоров А.Н.* О логических основах теории вероятностей // Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. — С. 467–471.
12. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Одна модель нестохастической случайности // ДАН СССР. — 1990. — **310**, № 5. — С. 1059–1062.
13. *Ivanenko V.I., Labkovskii V.A.* A class of criterion-choosing rules // Soviet Physics Doklady. — 1986. — **31**, № 3. — P. 204–205.
14. *Ivanenko V.I., Labkovskii V.A.* On the functional dependence between the available information and the chosen optimality principle // Stochastic Optimization, Lecture Notes in Control and Information Sciences. — Springer–Verlag, 1986. — P. 388–392.
15. *Иваненко В.И., Куц А.В., Пасичниченко И.А.* К параметризации лотерейной модели непараметрической ситуации принятия решений // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 2. — С. 83–88.
16. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы (общая теория): Пер. с англ. — М.: Изд-во ИЛ, 1962. — 896 с.
18. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений — К.: Наук. думка, 1990. — 136 с.
19. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
20. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 491 с.

Надійшла 18.11.2014