

## Анотація

Реп'ях С. І., Жегур О. А.

### Модуль охолодження Т-подібного вузла виливка

Досліджено процес твердіння металу в протяжних Т-подібних термічних вузлах сталевих виливків, що виготовляються методом литва за моделями, що виплавляються. Отримано емпіричні формули для розрахунку модуля охолодження Т-подібного термічного вузла виливка.

## Ключові слова

твердіння, галтель, стінка, вузол термічний, виливок, модуль охолодження

## Summary

Repyakh S., Zhegur A.

### Cooling module of T-shaped hot spot of casting

The process of metal solidification in the extended T-shaped hot spot of steel castings produced by investment casting. The empirical formula for calculating the cooling module of the T-shaped thermal center of casting is found.

## Keywords

solidification, fillet, wall, hot spot, casting, cooling module

Поступила 01.04.11

УДК 621.78:532.525.6

**Э. Е. Бейгельзимер**

НПО «Доникс», Донецк

## Инженерная методика расчета радиуса пятна контакта охлаждающей струи на верхней поверхности горячекатаного листа

Выполнено аналитическое исследование кольцевого гидравлического прыжка, образующегося при вертикальном натекании одиночной круглой струи жидкости на верхнюю поверхность неподвижной горизонтальной пластины. Получены простые зависимости радиуса прыжка от толщины послепрыжкового слоя в стационарном режиме. Область растекания струи при этом упрощенно разделена на две зоны: невязкого и вязкого течения (для второй из этих зон принято допущение о постоянстве толщины потока жидкости). Методика рекомендуется для использования процесса охлаждения металлических листов круглыми струями жидкости в инженерных расчетах, а также решения задач автоматического управления этим процессом в режиме реального времени.

**Ключевые слова:** струя жидкости, металлический лист, кольцевой гидравлический прыжок, радиус прыжка, инженерный расчет

**В**ведение. Наиболее интенсивный теплоотвод при охлаждении верхней поверхности металлического листа круглыми жидкими струями обычно наблюдается в зоне, ограниченной кольце-

вым гидравлическим прыжком, под которым понимается скачкообразный рост толщины радиального потока жидкости [1]. Образование гидравлического прыжка связано с наложением собственного

течения жидкости и движения поверхностных волн против течения. Вблизи места падения струи жидкость растекается достаточно быстро, скорость течения оказывается выше скорости распространения поверхностных волн, и они уносятся вниз по течению. С удалением от места падения струи разница между этими скоростями сокращается (из-за трения между жидкостью и твердой поверхностью), а также изменения толщины радиального потока), и новая волна «догоняет» предыдущую. На определенном расстоянии, где скорость основного течения становится равной скорости обратного движения поверхностных волн, образуется большая стоячая волна – гидравлический прыжок. После прыжка толщина потока жидкости резко возрастает, и соотношение между скоростями основного течения и поверхностных волн меняется на противоположное.

Для адекватного решения задач струйного охлаждения листов необходимо знать размер зоны, ограниченной гидравлическим прыжком. В общем случае он зависит от наклона струи и скорости движения листа. Однако основой является расчет радиуса гидравлического прыжка при натекании вертикальной круглой струи на неподвижную горизонтальную поверхность. Именно такая задача является предметом рассмотрения в данной статье.

Изучению этой задачи посвящено множество теоретических и экспериментальных исследований. Все они могут быть разделены на две группы в зависимости от условий растекания жидкости по поверхности. Для случая свободного растекания, при котором на пути радиального потока жидкости нет никаких внешних препятствий, широко известна формула Бора (Bohr T.) [2]

$$R = cV^{5/8}g^{-1/8}v^{-3/8}, \quad (1)$$

где  $R$  – радиус кольцевого гидравлического прыжка, м;  $V$  – расход струи, м<sup>3</sup>/с;  $g$  – ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $v$  – кинематическая вязкость жидкости, м<sup>2</sup>/с;  $c = 0,18-0,26$  – безразмерная константа. Эта формула получена путем решения дифференциального уравнения ламинарного пограничного слоя, а приведенные значения константы  $c$  адаптированы к экспериментальным данным [3]. Следует обратить внимание на то, что в формулу (1) не входит толщина слоя жидкости после прыжка, поскольку параметры послепрыжкового слоя в условиях свободного растекания формируются исключительно внутренними факторами самого радиального потока, которые уже учтены в формуле (1).

Другая группа исследований посвящена случаю стесненного растекания, при котором радиальный поток жидкости струи ограничен внешними препятствиями (твердыми поверхностями, встречным потоком жидкости) [4-7]. В этом случае толщина послепрыжкового слоя уже должна рассматриваться как независимая переменная, существенно влияющая на радиус прыжка. Для условий стесненного растекания наиболее известной является методика Уотсона (Watson E. J.) [4], которая предусматривает расчет радиуса гидравлического прыжка  $R$ , м по одному из двух уравнений

$$\begin{aligned} & \text{– если } R < r_{vc}, \\ & \frac{Rga^2h_2^2}{V^2} + \frac{a^2}{2\pi^2Rh_2} = \\ & = 0,01676 \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^3 \text{Re}^{-1} + 0,1826 \right]^{-1}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{– если } R \geq r_{vc}, \\ & \frac{Rga^2h_2^2}{V^2} + \frac{a^2}{2\pi^2Rh_2} = \\ & = 0,10132 - 0,1297 \left( \frac{R}{a} \right)^{3/2} \text{Re}^{-1/2} \quad (3) \end{aligned}$$

где  $a$  – радиус невозмущенной струи перед наложением на поверхность, м;  $g$  – ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $h_2$  – толщина слоя жидкости после гидравлического прыжка, м;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса струи в виде

$$\text{Re} = V/av, \quad (4)$$

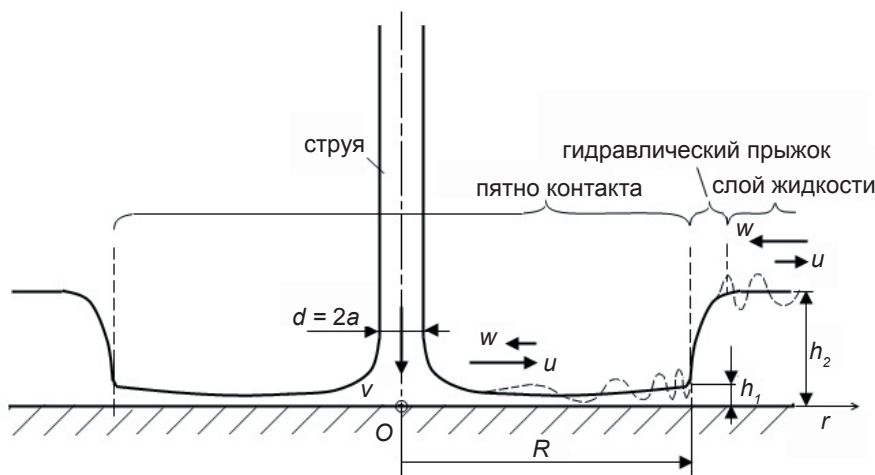
где  $V$  – расход струи, м<sup>3</sup>/с;  $v$  – кинематическая вязкость жидкости, м<sup>2</sup>/с;  $r_{vc}$  – радиус, при котором гидродинамический пограничный слой достигает верхней поверхности потока жидкости, м

$$r_{vc} = 0,315a\text{Re}^{1/3}. \quad (5)$$

Уравнения (2) и (3), так же как и формула (1), получены для ламинарного пограничного слоя в пятне контакта.

В технологических процессах охлаждения металлических листов круглой жидкой струей предпочтительнее второй из указанных случаев – стесненное растекание, поскольку даже при отсутствии препятствий со стороны элементов оборудования (например, прижимных роликов) радиальный поток от каждой струи ограничен потоками жидкости от соседних струй. Известные теоретические решения указанной задачи при стесненном растекании приводят к уравнениям, например, (2)-(3), из которых искомый радиус пятна контакта не выражается в явном виде, что требует применения итерационных процедур поиска корней. В инженерных приложениях это не всегда удобно, а при автоматическом управлении технологическим процессом в режиме реального времени – и вовсе неприемлемо. Поэтому путем разумных упрощений получена простая инженерная методика, позволяющая рассчитывать радиус гидравлического прыжка в явном виде. Решение выполнено в области значений исходных параметров, характерных для процессов охлаждения металлических листов струями жидкости на станах горячей прокатки.

**Постановка задачи.** Рассмотрим одиночную круглую струю жидкости, вертикально натекающую на верхнюю поверхность горизонтальной пластины больших размеров (рис. 1). Пересечение продольной оси струи с поверхностью пластины назовем осевой точкой (точка  $O$  на рис. 1). На поверхности пластины от этой точки, как от полюса, растекается радиальный поток жидкости малой толщины. На определенном расстоянии происходит скачкообразное увеличение толщины потока – кольцевой гидравлический прыжок.



**Рис. 1.** Схема вертикального натекания круглой струи жидкости на горизонтальную пластину:  $O$  – полюс растекания;  $u$  – скорость потока;  $w$  – скорость поверхностных волн; остальные обозначения – по тексту (пунктиром условно показаны поверхностные волны, распространяющиеся против течения потока)

Область поверхности пластины вокруг полюса растекания, ограниченную фронтом начала гидравлического прыжка, назовем «пятном контакта струи». Пластину считаем неподвижной, а условия растекания струи – симметричными относительно осевой точки. В установившейся стадии процесса гидравлический прыжок занимает стабильное положение, и пятно контакта вертикальной круглой струи представляет собой круг постоянного радиуса. Известны: расход струи (объем жидкости в единицу времени)  $V$ , ее диаметр перед поверхностью  $2a$  (где  $a$  – радиус) и толщина слоя жидкости после гидравлического прыжка  $h_2$ . Вместо расхода  $V$  может быть задана скорость струи  $v$  перед натеканием на поверхность, поскольку они связаны однозначным соотношением

$$v = V/\pi a^2. \quad (6)$$

Учитывая, что на некоторой высоте над поверхностью пластины начинается расширение струи, связанное с разворотом внешних струек жидкости в горизонтальном направлении, под радиусом  $a$  и скоростью  $v$  следует понимать параметры невозмущенной струи в непосредственной близости от поверхности.

Требуется определить радиус кольцевого гидравлического прыжка  $R$  (или, что то же самое, – радиус пятна контакта).

Все формулы записаны в системе СИ, то есть все линейные размеры (диаметр и толщина) измеряются в метрах, скорость – в метрах в секунду, расход жидкости – в кубических метрах в секунду и т. п.

**Общая идея решения.** Гидравлический прыжок является стоячей волной, которая образуется в результате наложения поверхностных волн, распространяющихся против течения потока жидкости (рис. 1). Вблизи места падения струи скорость жидкости больше скорости распространения поверхностных волн, и поток переносит волны вниз по течению. Поток в таком состоянии называют «бурным», или «сверхкритическим». По мере удаления от полюса растекания струи скорость течения снижается и на некотором расстоянии становится равной скорости обратного движения поверхностных волн. Это

приводит к образованию стоячей волны – гидравлического прыжка. После него поток переходит в «спокойное», или «докритическое» состояние, при котором скорость течения жидкости меньше скорости распространения поверхностных волн.

Обозначим толщину потока перед гидравлическим прыжком («допрыжковую»)  $h_1$ , после прыжка («послепрыжковую») –  $h_2$ . Между этими двумя толщинами располагается особая «критическая» толщина  $h_{cr}$ , которая отвечает минимуму суммарной (кинетическая плюс потенциальная) энергии сечения потока при плоскопараллельном течении (то есть гидростатическом распределении давлений по толщине) [8, 9]. Для осесимметричного потока эта критическая толщина равна

$$h_{cr} = (\alpha V^2/g4\pi^2 r^2)^{1/3}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – коэффициент кинетической энергии потока (отношение действительной кинетической энергии потока в данном сечении к кинетической энергии, которой обладал бы этот поток, если бы скорости во всех точках сечения были бы равны средней скорости потока в этом сечении);  $V$  – расход потока (объем жидкости в единицу времени);  $r$  – координата по радиусу от полюса растекания;  $g$  – ускорение свободного падения.

Известно, что указанные три толщины связаны между собой однозначным соотношением по типу «коромысла»: чем больше отношение «послепрыжковой» толщины  $h_2$  к критической  $h_{cr}$ , тем больше отношение критической толщины  $h_{cr}$  к «допрыжковой»  $h_1$ . Поэтому при фиксированной толщине потока после прыжка  $h_2$  «допрыжковая» толщина  $h_1$  будет тем меньше, чем ниже критическая толщина  $h_{cr}$ . Вблизи полюса фактическая толщина потока  $h$  меньше той, при которой мог бы начаться гидравлический прыжок  $h_1$  (рис. 2). По мере удаления от полюса растекания снижается критическая толщина  $h_{cr}$  (см. формулу (7)), а с ней и толщина потенциального начала гидравлического прыжка  $h_1$ . Именно в том месте, где толщина потенциального начала гидравлического прыжка  $h_1$  сравнивается с фактической толщиной растекающегося потока  $h$ , произойдет гидравлический прыжок.

Таким образом, найти радиус пятна контакта можно следующим образом: определить функцию изменения толщины потока по радиусу –  $h(r)$ ; определить функцию изменения по радиусу толщины потенциального начала гидравлического прыжка –  $h_1(r)$ ; найти искомый радиус кольцевого гидравлического прыжка  $R$  как значение координаты  $r$ , при котором указанные функции будут равны

$$h(R) = h_1(R). \quad (8)$$

Такова общая идея решения.

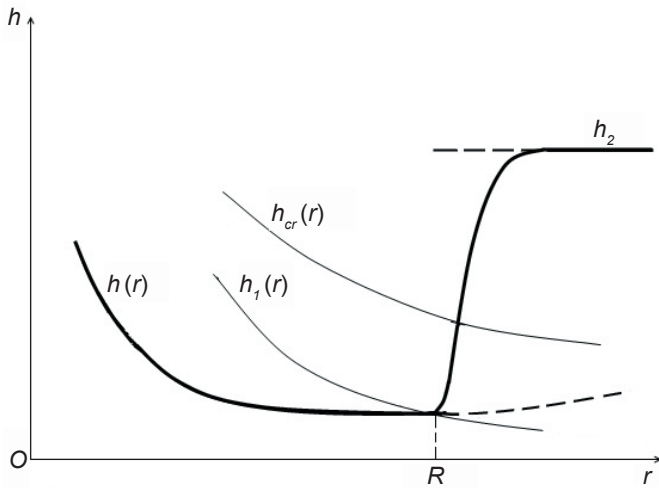


Рис. 2. Порядок определения радиуса пятна контакта кольцевого гидравлического прыжка

**Решение задачи.** Первый шаг – определение функции изменения толщины потока по радиусу. Из полюса растекания как из центра мысленно проведем круговое сечение радиусом  $r_s$ , в котором завершается поворот струек жидкости с вертикального направления на горизонтальное. Границу этого сечения на поверхности пластины назовем начальной окружностью. Дальше этой окружности течение жидкости по пластине будем рассматривать как поток в расширяющемся русле.

Осесимметричный поток жидкости по поверхности пластины предложено считать плавно меняющимся, то есть с достаточно медленным и постепенным изменением сечений и скорости элементарных потоков (допущение 1).

Это допущение позволяет применить уравнение Бернулли. Известно, что в этом случае для широкого русла с нулевым уклоном справедливо дифференциальное уравнение [8, с. 274]<sup>1</sup>

$$\boxed{1} \frac{dh}{dr} = \frac{\alpha V^2 / gh^2 b^3 \times db/dr - V^2 / h^3 b^2 C^2}{1 - \alpha V^2 / gh^3 b^2}, \quad (9)$$

где  $b = 2\pi r$  – ширина русла;  $\alpha$  – коэффициент кинетической энергии потока;  $C$  – коэффициент Шези, учитывающий потери на трение.

Коэффициент Шези можно выразить по формуле Павловского Н. Н. [10, с. 221]

$$C = \frac{1}{n} h^y, \quad (10)$$

где  $n$  – коэффициент шероховатости (значения этого коэффициента для воды – см. ниже),  $y$  – показатель степени (в этой формуле  $h$  – в метрах)

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{h}(\sqrt{n} - 0,10). \quad (11)$$

Следует заметить, что коэффициент Шези является размерной величиной. В системе СИ он имеет размерность  $m^{1/2} \cdot c^{-1}$ . Соответственно, коэффициент шероховатости  $n$  также является размерной величиной и в системе СИ измеряется в единицах  $m^{y-1/2} \cdot c^{-1}$ .

С использованием (10) уравнение (9) приводится к виду

$$\boxed{1} \frac{dh}{dr} = \frac{Fr \frac{h}{r} - Fr \frac{gn^2}{\alpha h^{2y}}}{1 - Fr}, \quad (12)$$

где  $Fr$  – число Фруда, выражающее отношение скорости течения потока к скорости распространения поверхностной волны (точнее, квадратную степень этого отношения)

$$Fr = \alpha V^2 / gh^3 4\pi^2 r^2. \quad (13)$$

В качестве начального условия в дифференциальном уравнении (12) можно задать толщину потока на начальной окружности радиуса  $r_s$

$$h = h_s \text{ при } r = r_s. \quad (14)$$

Применение графоаналитического метода для исследования формы свободной поверхности круглой струи диаметром  $2a$ , натекающей на перпендикулярно расположенную пластину, дает следующую оценку радиуса начальной окружности [11]:

$$r_s = \frac{1}{\sqrt{2}} 2a \approx 0,707 \cdot 2a. \quad (15)$$

С другой стороны, область внутри начальной окружности можно интерпретировать как зону застоя, радиус которой оценивается величиной примерно от 0,75 до 1 диаметра невозмущенной струи [7, 12], то есть

$$r_s \approx (0,75 \div 1,0) \cdot 2a. \quad (16)$$

Основываясь на этих данных, радиус начальной окружности можно принимать пропорциональным диаметру невозмущенной струи

$$r_s = k_s 2a, \quad (17)$$

с коэффициентом пропорциональности  $k_s$  в интервале от  $1/\sqrt{2}$  до 1

$$k_s = 1/\sqrt{2} \div 1,0. \quad (18)$$

Толщину потока в начальном сечении определяют из условия сохранения расхода жидкости

$$\pi a^2 v = 2\pi r_s h_s u_s, \quad (19)$$

где  $v$  – скорость невозмущенной струи перед натеканием на поверхность пластины;  $u_s$  – средняя скорость потока в сечении над начальной окружностью. Эта скорость равна скорости струи перед контактом с поверхностью (в этом можно легко убедиться, применив уравнение Бернулли для внешней струйки)

$$u_s = v. \quad (20)$$

Учитывая это соотношение, из условия сохранения расхода жидкости (19) следует выражение для толщины потока на начальной окружности

$$h_s = a^2 / 2r_s. \quad (21)$$

Уравнение (12) с начальным условием (14), (21) позволяет определить изменение толщины потока по радиусу пятна контакта. Численные решения этого уравнения в достаточно широком диапазоне ко-эффициента шероховатости (отвечающего наиболее характерному случаю, когда в качестве охлаждающей жидкости используется техническая вода),

<sup>1</sup> Слева от формулы в рамке указан номер допущения, при котором она получена

дают основания упрощенно разделить пятно контакта на две зоны – допущение 2: невязкого течения (эффекты вязкости жидкости достаточно малы, и толщина потока снижается обратно пропорционально радиусу растекания); вязкого течения (в результате проти-водействия двух факторов – трения и расширения потока – толщина жидкости остается постоянной и пропорциональной диаметру невозмущенной струи) – допущение 3. Границу между этими двумя зонами можно обозначить  $r_v$ .

На основе принятого допущения средняя по толщине потока скорость течения воды по поверхности на всем отрезке от  $r_s$  до  $r_v$  остается постоянной и равной скорости  $v$ . Таким образом, на этом участке условие сохранения расхода жидкости примет вид

$$2\pi r h v = \pi a^2 v, \quad (22)$$

$$\boxed{2} \quad \text{при } r \leq r_v \quad h = a^2/2r. \quad (23)$$

В зоне вязкого течения толщину потока жидкости представлено в виде

$$\boxed{2,3} \quad \text{при } r > r_v \quad h = c_0 2a, \quad (24)$$

где  $c_0$  – безразмерный параметр, характеризующий внутреннее и внешнее трение при движении жидкости по поверхности пластины.

Приравнивая значения толщины потока по формулам (23) и (24) при  $r = r_v$ , можно найти выражение для граничного радиуса

$$\boxed{2,3} \quad r_v = a/4c_0, \quad (25)$$

где  $a$  – радиус невозмущенной струей перед натеканием на поверхность.

Теоретически граничный радиус  $r_v$  может быть меньше начального радиуса  $r_s$ . Однако из сопоставления (13) и (22) следует, что это возможно только в том случае, если параметр  $c_0$  имеет значение, большее  $1/8 = 0,125$ . Как показано ниже, для воды реальные значения параметра  $c_0$  на порядок ниже. Поэтому можно допустить, что всегда  $r_v > r_s$ .

Второй шаг намеченной схемы решения – определение толщины потока  $h_1$ , с которой может начаться гидравлический прыжок. Значение этой толщины по радиусу пятна контакта уменьшается.

Гидравлический прыжок в рассматриваемых условиях на основе практического опыта относится к так называемому «совершенному» виду (допущение 4), при котором «послепрыжковая» толщина не менее чем вдвое превышает «допрыжковую»:  $h_2/h_1 \geq 2$ . Для прыжка совершенного вида справедливо следующее уравнение, связывающее «допрыжковую» и «послепрыжковую» толщины [11, с. 102]:

$$\boxed{4} \quad \frac{\alpha'_1 V^2}{g\omega_1} + \omega_1 h_1^* = \frac{\alpha'_2 V^2}{g\omega_2} + \omega_2 h_2^*, \quad (26)$$

где  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  – коэффициенты количества движения в «допрыжковом» и «послепрыжковом» сечениях соответственно (отношение действительного количества энергии потока в данном сечении к количеству движения, которым обладал бы этот поток, если бы скорости во всех точках сечения были бы равны средней скорости потока в этом сечении);  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – площади «допрыжкового» и «послепрыжкового» сечений

потока;  $h_1^*$  и  $h_2^*$  – глубины расположения центров тяжести соответствующих сечений. Для осесимметричного потока  $\omega_1 = 2\pi R_1 h_1$ ,  $\omega_2 = 2\pi R_2 h_2$ ,  $h_1^* = h_1/2$ ,  $h_2^* = h_2/2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы «допрыжкового» и «послепрыжкового» сечений соответственно. Кроме этого, на основе экспериментальных данных в уравнении (26) можно принимать  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 1,0$  [11, с. 102; 12, с. 336]. Тогда основное уравнение совершенного прыжка (27) записывают в виде

$$\boxed{4} \quad \frac{V^2}{2\pi g R_1 h_1} + \pi R_1 h_1^2 = \frac{V^2}{2\pi g R_2 h_2} + \pi R_2 h_2^2. \quad (27)$$

Длина гидравлического прыжка намного меньше радиуса пятна контакта:  $R_2 - R_1 \ll R$  (допущение 5).

Принимая на основании этого допущения

$$R_2 \approx R_1 \approx R, \quad (28)$$

из (26) можно получить выражения, аналогичные формулам сопряженных глубин совершенного гидравлического прыжка в призматических руслах [11, с. 105]

$$\boxed{4,5} \quad h_1 = \frac{h_2}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 \frac{V^2}{gh_2^3 4\pi^2 R^2}} - 1 \right]; \quad (29)$$

$$\boxed{4,5} \quad h_2 = \frac{h_1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 \frac{V^2}{gh_1^3 4\pi^2 R^2}} - 1 \right]. \quad (30)$$

Согласно условию (8) значение по формуле (29) должно быть равно фактической толщине потока при  $r = R$ . Последняя (в соответствии с допущениями 2 и 3) принята равной (23) или (24) в зависимости от зоны течения. Исходя из этого

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } R \leq r_v \quad \frac{h_2}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{2V^2}{gh_2^3 \pi^2 R^2}} - 1 \right] = \frac{a^2}{2R}; \quad (31)$$

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } R > r_v \quad \frac{h_2}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{2V^2}{gh_2^3 \pi^2 R^2}} - 1 \right] = c_0 2a. \quad (32)$$

Решая эти уравнения относительно радиуса кольцевого гидравлического прыжка  $R$ , получают

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } R \leq r_v, \quad R = \frac{V^2}{g\pi^2 h_2^2 a^2} - \frac{a^2}{2h_2}; \quad (33)$$

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } R > r_v, \quad R = \frac{V\sqrt{2}}{\pi} \left[ h_2^3 g \left( \left( \frac{4c_0 a}{h_2} + 1 \right)^2 - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

где граничное значение радиуса  $r_v$  определяется формулой (25).

Выражение (33) известно как формула Рэлея (Rayleigh J. W. S.) для идеальной жидкости [4, 13]. Определять, к какой из двух формул – (33) или (34) – относится конкретный частный случай по значению радиуса пятна контакта  $R$  неудобно, поскольку для этого необходимо выполнить расчет по обеим формулам и только затем путем сравнения результатов расчета с граничным радиусом  $r_v$  найти искомое значение. С тем, чтобы избежать этой процедуры, взамен граничного значения радиуса  $r_v$  можно найти граничное значение толщины слоя жидкости после гидравлического прыжка. Для этого из формулы (33) нужно выразить граничное значение толщины  $h_{2v}$ , отвечающее граничному значению радиуса  $r_v$  по (25)

$$h_{2v} = \sqrt{c_0^2 a^2 + \frac{4V^2 c_0}{g\pi^2 a^3}} - c_0 a. \quad (35)$$

Таким образом, окончательно получают

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } h_2 > h_{2v}, \quad R = \frac{V^2}{g\pi^2 h_2^2 a^2} - \frac{a^2}{2h_2}; \quad (36)$$

$$\boxed{1-5} \quad \text{если } h_2 \leq h_{2v},$$

$$R = \frac{V\sqrt{2}}{\pi} \left[ h_2^3 g \left( \left( \frac{4c_0 a}{h_2} + 1 \right)^2 - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

где граничное значение  $h_{2v}$  определяется формулой (35).

С увеличением толщины «послепрыжкового» слоя  $h_2$  согласно формулам (36)-(37) радиус кольцевого гидравлического прыжка уменьшается. В том случае, когда он становится равным радиусу начальной окружности (18), пятно контакта смыкается до размеров струи (образуется «надвинутый» гидравлический прыжок). Толщину «послепрыжкового» слоя, отвечающую этому предельному случаю, можно оценить, приравняв (36) и (18) (принято  $k_s = 1,0$ )

$$h_{2, \max} = \sqrt{\left(\frac{a}{8}\right)^2 + \frac{V^2}{2g\pi^2 a^3}} - \frac{a}{8}. \quad (38)$$

Более «компактное» решение можно получить, используя вместо (29) соотношение (30) и допущение, справедливое для прыжка совершенного вида, – число Фруда в «допрыжковом» сечении значительно больше единицы (допущение 6)

$$\boxed{6} \quad V^2 / gh_1^3 4\pi^2 R^2 \gg 1. \quad (39)$$

С учетом этого допущения соотношение (30) может быть трансформировано к приближенному виду

$$\boxed{4-6} \quad R = V / \pi h_2 \sqrt{2gh_1}. \quad (40)$$

Принимая, как и раньше,  $h_1$  равным фактической толщине по формуле (25) в зоне невязкого течения и толщине по формуле (26) в зоне вязкого течения, окончательно получают (формула (41) известна из работы [14])

$$\boxed{1-6} \quad \text{если } h_2 > h_{2v}, \quad R = V^2 / g\pi^2 h_2^2 a^2; \quad (41)$$

$$\boxed{1-6} \quad \text{если } h_2 \leq h_{2v}, \quad R = V / 2\pi h_2 \sqrt{gc_0 a}, \quad (42)$$

где граничное значение «послепрыжковой» толщины  $h_{2v}$  определяется формулой

$$h_{2v} = 2V / \pi a \sqrt{c_0 / ga}. \quad (43)$$

Оценка предельной толщины «послепрыжкового» слоя, при которой пятно контакта смыкается со струей, в этом случае выражается в виде

$$h_{2, \max} = V / \pi a \sqrt{2ga}. \quad (44)$$

Итак, получены простые формулы (36)-(37) и (41)-(42), позволяющие рассчитать радиус кольцевого гидравлического прыжка (пятна контакта) от одиночной круглой струи жидкости, вертикально натекающей на верхнюю поверхность горизонтальной пластины, при известных значениях расхода струи  $V$ , ее диаметра перед натеканием на поверхность  $2a$  и толщины после гидравлического прыжка  $h_2$ .

Неизвестным осталось только значение коэффициента пропорциональности  $c_0$ , определяющего в соответствии с выражением (24) толщину потока в зоне вязкого течения. Значение этого коэффициента должно быть связано с величиной гидравлического сопротивления при течении жидкости по поверхности пластины, то есть с коэффициентом шероховатости  $n$  (см. формулу (10)). По данным численных расчетов по уравнению (12) в условиях, характерных для процесса охлаждения горячекатаных листов и полос, константа  $c_0$  удовлетворительно описывается выражением

$$c_0 = 100n^{1,69}. \quad (45)$$

Коэффициент шероховатости  $n$  по сути является эмпирическим параметром. Автору не известны эксперименты по определению этого коэффициента (или гидравлического сопротивления) для условий растекания струй жидкости по поверхности горячих листов. До получения таких экспериментальных

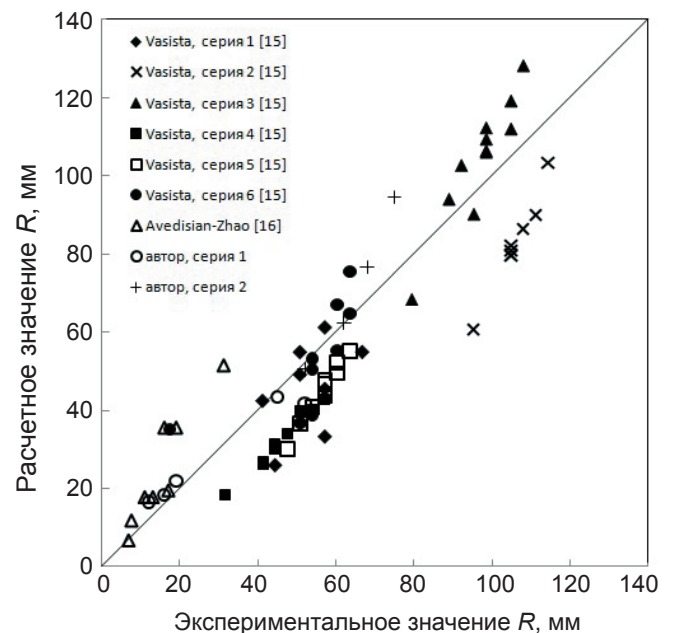


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета радиуса гидравлического прыжка по формуле (37) с экспериментальными данными

## Параметры опытных серий, использованных для проверки модели

Автор	Серия	Материал пластины	$V$ , л/мин	$h_2$ , мм	$n$ (принято)
Vasista [15]	1	плексиглас	1,9-3,8	6,4-9,5	0,009
Vasista [15]	2	плексиглас	7,5-12,8	10,3-11,9	0,009
Vasista [15]	3	плексиглас	7,2-14,2	8,7-10,3	0,009
Vasista [15]	4	плексиглас	1,6-3,8	10,3-11,9	0,009
Vasista [15]	5	плексиглас	1,9-3,4	7,5-7,9	0,009
Vasista [15]	6	плексиглас	1,8-3,8	6,0-7,9	0,009
Avedisian-Zhao [16]	–	стекло	0,1-1,6	2,0-6,0	0,010
Автор	1	пластик	2,0-7,5	5,0-11,0	0,011
Автор	2	нержавеющая сталь	2,0-6,8	3,0-4,0	0,012

данных можно ориентироваться на обширный опытный материал по исследованию гидравлических сопротивлений в трубах и открытых руслах. На основе анализа результатов этих исследований можно предположить, что для воды значения коэффициента шероховатости  $n$  в пятне контакта струи можно оценить диапазоном от 0,009 до 0,020 в зависимости от режима течения (ламинарное или турбулентное), числа Рейнольдса, качества поверхности листа и фазового состояния жидкости на контакте с поверхностью.

На рис. 3 показано сравнение результатов расчета радиуса кольцевого гидравлического прыжка по приведенной методике (37) с имеющимися экспериментальными данными разных авторов. Основные данные по каждой серии опытов приведены в таблице (во всех случаях жидкость – вода)

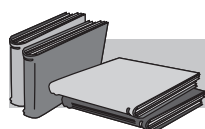
Расход струи  $V$  во всех опытах Vasista рассчитан на основе приведенных в работе [15] значений давления в контейнере для формирования струи. Значения коэффициента шероховатости  $n$  в указанных массивах данных приняты от 0,009 (для поверхности из плексигласа) до 0,012 (для поверхности из нержавеющей стали), таблица (последняя колонка).

Учитывая достаточно большую неопределенность, связанную с неизвестной погрешностью определения исходных данных (в частности, расхода струи в работе [15] и толщины «послепрыжкового» слоя в работе [16]), соответствие экспериментальных и расчетных данных, приведенное на рис. 3, следует признать удовлетворительным. Это дает основание для проведения специальных экспериментальных

исследований с целью уточнения значений коэффициента шероховатости для разных условий, которые могут применяться на практике.

### Выводы

Для проектирования и эффективного управления процессом охлаждения металлических листов круглыми водяными струями актуальным является расчет радиуса кольцевого гидравлического прыжка, образующегося при натекании вертикальных струй на верхнюю поверхность листа. Известные теоретические решения этой задачи неприемлемы для использования в режиме реального времени, поскольку требуют итерационных расчетов. Автором предложена простая методика для расчета радиуса кольцевого гидравлического прыжка в зависимости от толщины послепрыжкового слоя, расхода струи и других существенных параметров процесса на основе инженерного решения дифференциального уравнения осесимметричного потока жидкости. Основным допущением является условие постоянства толщины слоя жидкости в зоне вязкого течения перед гидравлическим прыжком. В качестве параметра модели автором использованы коэффициент шероховатости, учитывающий как качество поверхности листа, так и реологические свойства, режим течения и фазовое состояние жидкости. Результаты расчета предложенной методики удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Liu X., Lienhard J. H. The hydraulic jump in circular jet impingement and in other thin liquid films // Experiments in Fluids. – 1993. – Vol. 15. – P. 108-116.
2. Bohr T., Dimon P., Putkaradze V. Shallow-water approach to the circular hydraulic jump // J. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 254. – P. 635-648.
3. Numerical Simulation of the Abrasive Waterjet (AWJ) Machining: Multi-Fluid Solver Validation and Material Removal Model Presentation / M. Zaki, C. Corre, P. Kuszla, F. Chinesta // Int. Journal of Material Forming. – 2008. – V. 1., S.1. – P. 1403-1406.
4. Watson E. J. The Spread of a Liquid Jet Over a Horizontal Plane // J. Fluid Mech. – 1964. – Vol. 20. – P. 481-499.
5. Middleman S. Modeling Axisymmetric Flows. Chapter 5. – New York: Academic Press, 1995. – P. 195-199.

6. *Bush J. W. M., Aristoff J. M.* The influence of surface tension on the circular hydraulic jump // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 112. – P. 347-362.
7. Conjugated Heat Transfer on a Horizontal Surface Impinged by Circular Free-Surface Liquid Jet / Y. Zhao, T. Masuoka, T. Tsuruta, Ch.-F. Ma // JSME International Journal, Series B. – 2002. – № 2, Vol. 45. – P. 307-314.
8. *Богомолов А. И., Михайлов К. А.* Гидравлика. – М.: Стройиздат, 1972. – 648 с.
9. *Штеренлихт Д. И.* Гидравлика. Кн. 2. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 367 с.
10. Гидравлика / Н. Н. Кременецкий, Д. И. Штеренлихт, В. М. Алышев, Л. В. Яковлева. – М.: Энергия, 1973. – 425 с.
11. *Arsenjev S. L.* The fluid motion physics: The interaction mechanics of a free liquid jet with a body and with the other free liquid jet // <http://arxiv.org/pdf/0801.4160>.
12. *Liu X., Lienhard V. J. H., Lombara J. S.* Convective Heat Transfer by Impingement of Circular Liquid Jets // Journal of Heat Transfer. – 1991. – Vol. 113. – P. 571-582.
13. Rayleigh Lord. On the Theory of Long Waves and Bores // Proc. Roy. Soc., London. – 1914. – Ser. A 90. – P. 324-328.
14. *Brechet Y., Neda Z.* On the circular hydraulic jump // Am. J. Phys. – 1999. – № 8, Vol. 67. – P. 723-731.
15. *Vasista Vittal Krishnamurthy.* Experimental study of the hydrodynamics of an impinging liquid jet / Submitted to the department of the mechanical engineering in partial fulfilment of the requirements for the degree of Bachelor of science // USA: Massachusetts institute of technology, 1989. – 32 p.
16. *Avedisian C. T., Zhao Z.* The circular hydraulic jump in low gravity // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2000. – Vol. 456. – P. 2127-2151.

### Анотація

*Бейгельзімер Е. Ю.*

Інженерна методика розрахунку радіуса зони контакту охолоджуючого струменя на верхній поверхні гарячекатаного листа

*Виконано аналітичне дослідження кільцевого гідравлічного стрибка, що утворюється при вертикальному натіканні одиночного круглого струменя рідини на верхню поверхню нерухомої горизонтальної пластини. Отримано прості залежності радіуса стрибка від товщини післястрибкового шару в стаціонарному режимі. Область розтікання струменя при цьому спрощено розділено на дві зони: нев'язкої та в'язкої течії (для другої з цих зон прийнято припущення про сталість товщини потоку рідини). Методику рекомендовано для використання процесу охолодження металевих листів струменями рідини в інженерних розрахунках, а також при вирішенні задач автоматичного управління цим процесом у режимі реального часу.*

### Ключові слова

*струмінь рідини, металевий лист, кільцевий гідравлічний стрибок, радіус стрибка, інженерний розрахунок*

### Summary

*Beygelzimer E.*

An engineering method for estimation of the radius of a contact-spot formed by the round liquid jet on the upper surface of hot rolled sheet

*An analytical study of the circular hydraulic jump (CHJ) formed by impinging single round liquid jet on an upper surface of a fixed horizontal plate was carried out. The simple dependences for estimation of the CHJ radius according to the downstream flow height in the stationary mode are obtained. The jet spreading region was simplistically divided in two zones namely inviscid and viscous flow (second one was assumed constant for the layer thickness). The method is recommended for using in engineering calculations of the process of steel sheets cooling with liquid jets, also for solving problems of automatic process control in real-time operation mode.*

### Keywords

*liquid jet, steel sheet, circular hydraulic jump, jump radius, engineering calculation*

Поступила 16.05.11