

УДК 512.64+517.5/512.643.5; 519.6

**Ю.Н. Минаев**, д-р техн. наук  
Национальный авиационный университет  
(Украина, 03057, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,  
тел. (044) 2495454, e-mail: min\_14@ukr.net),  
**О.Ю. Филимонова**, канд. техн. наук, **Ю.И. Минаева**, канд. техн. наук  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры  
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-т, 31,  
тел.(044) 2486427; 2425462, e-mail: filimonova@nm.ru; jumin@big-mir.net)

## Нечетко множественные характеристики одномерных временных рядов

Исследовано структурирование временных рядов (ВР) (в виде окна, фрагмента, сегмента или других структурных частей) и представление отдельного окна в виде  $2D$  тензора  $\Xi$  с матрицей  $\mathbf{X}$  размерностью  $m \times m$  ( $m \cdot m$  равно числу элементов окна ВР) с последующим определением  $m$ -векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  (с отдельными ограничениями), которые для заданной матрицы данных  $\mathbf{X}$  минимизируют критерий  $\|\mathbf{X}_{-Kr} \mathbf{u} \mathbf{v}^T\|_F^2 + P_\lambda(u, v)$ , где  $\|\mathbf{X}_{-Kr} \mathbf{u} \mathbf{v}^T\|_F^2 = \text{tr} \{ (\mathbf{X} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T) (\mathbf{X} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^T \}$ ;  $P_\lambda(u, v)$  — штрафная функция;  $-Kr$  — символ кронекеровой разности. Векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  рассматриваются как подмножество упорядоченных пар, где вектор  $\mathbf{v}$  играет роль функции принадлежности ( $\mathbf{v} \rightarrow [0, 1]$ ). Показана целесообразность применения для этой цели процедуры сингулярной декомпозиции.

Подмножество упорядоченных пар  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , рассматриваемое как псевдонечетное множество, представляющее собой  $2D$  тензор с матрицей размерностью  $2 \times m$ , позволяет сократить объем хранимой информации ( $m \cdot m > 2m$ ), получить скрытые знания в форме спектра сингулярных величин и получить новые возможности для решения задач прогнозирования и идентификации аномалий ВР в результате использования инвариантов тензора.

Досліджено структурування часових рядів (ЧР) (у вигляді вікна, фрагменту, сегменту або інших структурних частин) та представлення окремого вікна у формі  $2D$  тензора  $\Xi$  з матрицею  $\mathbf{X}$  вимірністю  $m \times m$  ( $m \cdot m$  дорівнює кількості елементів вікна ЧР) з подальшим віднаходженням  $m$ -векторів  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  (з окремими обмеженнями), які для заданої матриці даних  $\mathbf{X}$  мінімізують критерій  $\|\mathbf{X}_{-Kr} \mathbf{u} \mathbf{v}^T\|_F^2 + P_\lambda(u, v)$ , де  $\|\mathbf{X}_{-Kr} \mathbf{u} \mathbf{v}^T\|_F^2 = \text{tr} \{ (\mathbf{X} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T) (\mathbf{X} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^T \}$ ;  $P_\lambda(u, v)$  — штрафна функція,  $-Kr$  — символ кронекерової різниці. Вектори  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  розглядаються як підмножина впорядкованих пар, де вектор  $\mathbf{v}$  відіграє роль функції належності ( $\mathbf{v} \rightarrow [0, 1]$ ). Показано доцільність використання для цієї мети процедури сингулярної декомпозиції.

Підмножина впорядкованих пар  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , що розглядається як псевдонечітка множина, яка представляє собою  $2D$  тензор з матрицею вимірністю  $2 \times m$ , дозволяє скоротити обсяг інформації, що зберігається ( $m \cdot m > 2m$ ), отримати додаткові приховані знання у формі

© Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева, 2016

ISSN 0204–3572. Электрон. моделирование. 2016. Т. 38. № 6

спектра сингулярных величин і отримать нові можливості для розв'язку задач прогнозування та ідентифікації аномалій ЧР в результаті використання інваріантів тензора.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* нечеткое множество, временной ряд, тензорная декомпозиция, сингулярные величины, кронекерово произведение.

**Состояние проблемы.** Современные подходы к моделированию многомерных (многокомпонентных, многофакторных) процессов и явлений в значительной мере основаны на свойствах одномерных (однокомпонентных) процессов и явлений с учетом математических методов тензорных декомпозиций (проекционные методы)[1]. Такой подход позволяет выделять в больших массивах данных скрытые знания, существующие в изучаемой системе или процессе. Исторически сложилось так, что анализ многомерных и сверхбольших объемов одномерных данных (современный подход к моделированию и анализу сложных процессов, объектов и систем, получивший название Chemometrics) обязан своим появлением аналитической химии. Однако в настоящее время он многократно перерос границы отрасли и стал повсеместно применяемым практически во всех областях и сферах управления объектами, требующими обработки больших массивов информации.

Особый интерес в настоящее время вызывает анализ трафика компьютерных сетей (КС), характерными особенностями которого являются высокая мерность, сверхбольшой объем обрабатываемой информации, трудности получения семантической оценки состояния системы и возможность прихода нежелательной или враждебной информации. Такая информация, практически скрытая от реального наблюдения, в состоянии полностью лишить систему (сеть) возможности выполнения ею функциональных задач или даже разрушить. Весьма важным является обстоятельство, связанное с разнородностью передаваемых данных. При попытке ограничить исследование только числовыми форматами (байты, пакеты, потоки) уменьшается размерность задачи, что связано с недопустимой потерей информации, и может привести к непредсказуемым последствиям.

Анализ трехмерных или многомерных рядов — сложная задача. При анализе трафика ее пытаются решить посредством анализа последовательности одномерных рядов. Однако в условиях гипертрофированных объемов это не позволяет получить полноценную первичную информацию, в частности скрытую информацию, которая содержится в многомерных массивах. Основные задачи анализа многомерных и сверхбольших объемов данных определяются целью, поставленной исследователем. В трафике КС такой задачей является идентификация аномалий временных рядов (ВР), так как выявление скрытых знаний — единственная возможность идентифициро-

вать аномалию. Неформально скрытые знания — это персональное знание, приобретаемое индивидуальным опытом. Это знание можно передать посредством прямого контакта «с глазу на глаз» или с помощью специальных процедур извлечения знаний, связанных, как правило, с преобразованием исходных данных.

Формально в литературе по интеллектуальному анализу данных (Data Mining) под скрытыми знаниями понимают знания с такими свойствами:

ранее не известные, т.е. такие, которые должны быть новыми (а не подтверждающими какие-то ранее полученные сведения);

нетривиальные, т.е. такие, которые нельзя просто увидеть (при непосредственном визуальном анализе данных или при вычислении статистических характеристик);

практически полезные, т.е. такие, которые представляют ценность для исследователя или потребителя;

доступные для интерпретации, т.е. такие, которые легко представить в наглядной для пользователя форме и легко объяснить в терминах предметной области.

Получить скрытые знания применительно к ВР можно:

моделированием структуры ВР;

решением задач классификации (например, идентификация аномалий, приводимых к задачам классификации), рассматриваемых в условиях неполной информации;

решением задач прогнозирования состояния КС (в том числе ранний прогноз аномалий), особенно с учетом явления самоподобия.

Будем рассматривать тензорные модели ВР и методы их декомпозиции как главный инструментальный метод получения скрытых знаний.

Исследование и анализ многокомпонентных и сверхбольших данных, в том числе ВР, исторически связано с использованием метода главных компонент [2]. Это — первый и наиболее применяемый метод анализа ВР, которому посвящено большое число работ. Однако сложность возникающих задач заставляет искать новые методы анализа. Целесообразность такого поиска наиболее полно представлена в работах [3, 4] об извлечении знаний через матричные (тензорные) декомпозиции (ТД).

В результате исследований установлено, что в данном научном направлении недостаточно изучены следующие вопросы:

связь ТД с теорией нечетких множеств (НМ), так как окно (фрагмент) ВР может быть представлено не только тензором, но и подмножеством упорядоченных пар со свойствами НМ;

анализ одномерных ВР, так как, рассматривая объект в структуре окно-фрагмент-сегмент-ряд на уровне представления окна ВР  $2D$  тензо-

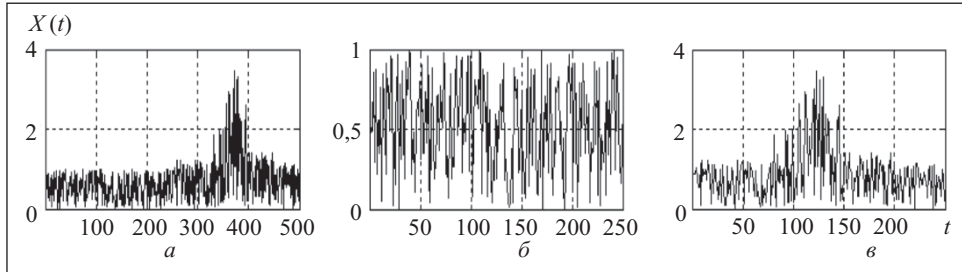


Рис. 1. Исходный (а), нормальный (б) и аномальный (в) фрагменты ВР

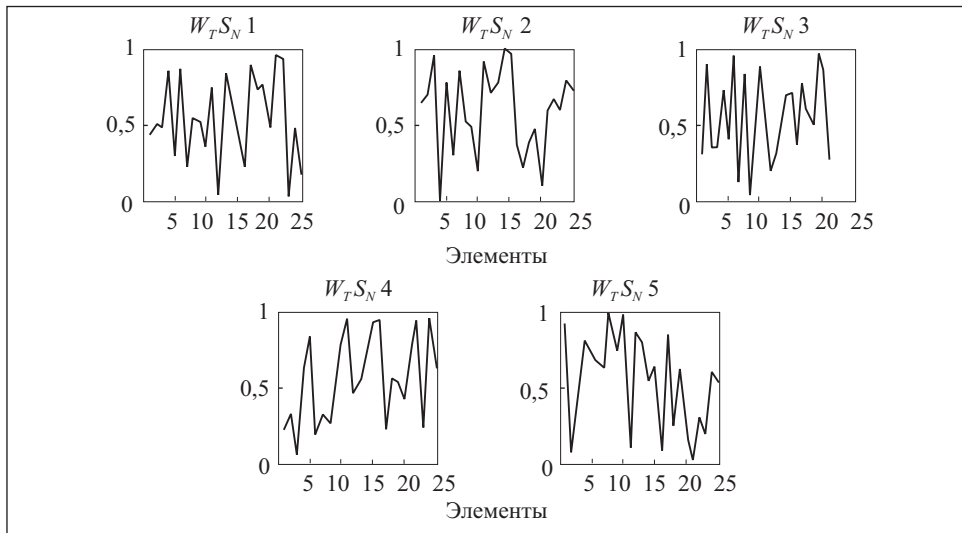


Рис. 2. Последовательные окна ВР в нормальном состоянии (первые пять окон)

ром при учете массива фрагментов (ряда), в ряде случаев с необходимостью приходим к многомерному  $3D$  тензору.

Покажем возможность совместного применения ТД и анализа НМ для представления одномерного ВР. Это может помочь в поиске новых знаний, в частности новых признаков идентификации аномалий в многомерном трафике, хотя возможности предлагаемого подхода значительно шире рассматриваемой задачи. Заметим, что в работе [5] показана эффективность применения инвариантов  $2D$  тензоров, моделирующих ВР, для решения задач прогнозирования.

**Постановка задачи.** Пусть задан одномерный ВР  $\mathbf{X}^{(t)} = \{x(t_i)\}$ ,  $i=1, N$ , и последовательность его фрагментов  $\{X_j^{(t)}(t_i)\}$ ,  $i=1, I$ ,  $j=1, f$ . Каждый фрагмент состоит из окон  $^{(k)}x(t_i)$ ,  $i=1, I_x$ ,  $k=1, f$ , где  $f$  — число окон во фрагменте:  $X_j^{(t)} = \{^{(k)}x(t_i)\}_{k=1}^f$ ,  $\mathbf{X}^{(t)} = \{X_j^{(t)}\}_{j=1}^f$ . С помощью процедуры

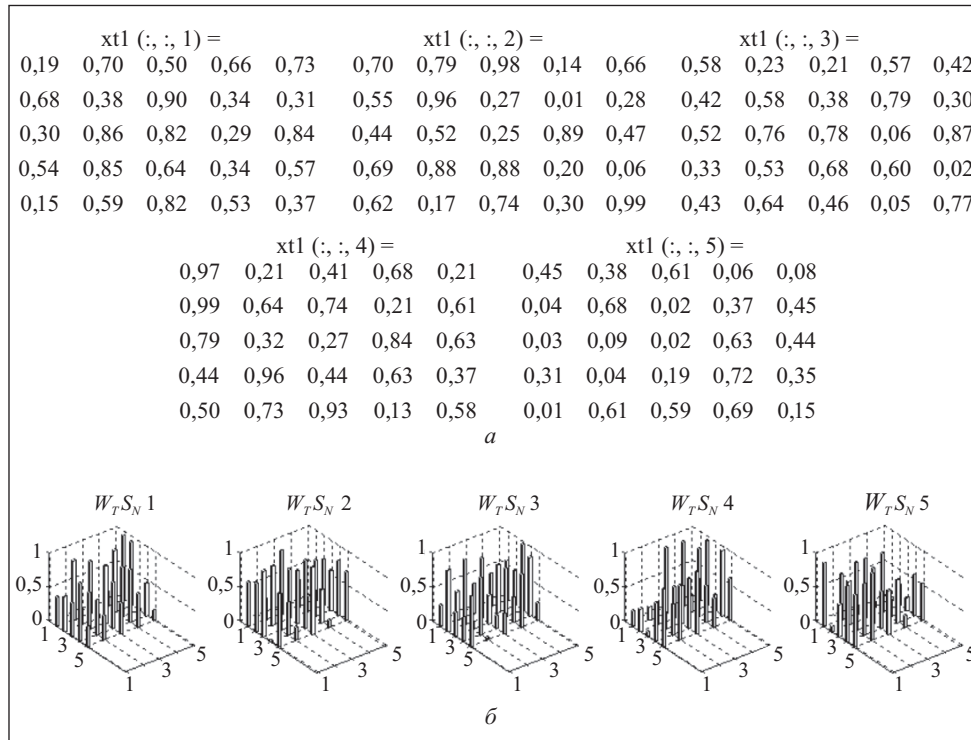


Рис. 3. Тензорные (2D матричные) модели последовательных окон ВР (а) и их представление с помощью процедуры bar3 ([xt1(:, :, 1) xt1(:, :, 2) xt1(:, :, 3) xt1(:, :, 4) xt1(:, :, 5)], 'w') (б)

матрицизации представим окно (или фрагмент) ВР в виде тензора с матрицей  $m \times n$ , т.е.  $x(t_i) \rightarrow T_x = \text{reshape}(x(t_i), m, n), m \cdot n = I_x$ . В общем случае  $m \neq n$ , однако предпочтение отдадим случаю  $m = n$ , так как при этом появляются дополнительные возможности нахождения новых знаний (признаков) и существенно уменьшается вычислительная сложность задачи. Кроме того, появляется возможность построения тренда для всего спектра собственных значений, т.е. тренда отдельных инвариантов тензорных моделей ВР, что может существенно изменить представление о поведении (в том числе тренде) исходного ВР и открывает определенные технические возможности при решении прикладных задач.

На рис. 1 приведен пример реального ВР и двух его фрагментов, один из которых содержит внедренные аномалии, а на рис. 2 и 3 — окна фрагментов ВР и их тензорные модели (в данном случае 2D матрицы).

На рис. 4 приведены два способа анализа ВР. Первый способ (рис. 4, а) — все последовательные окна (сегменты или фрагменты) ВР, имеющие раз-

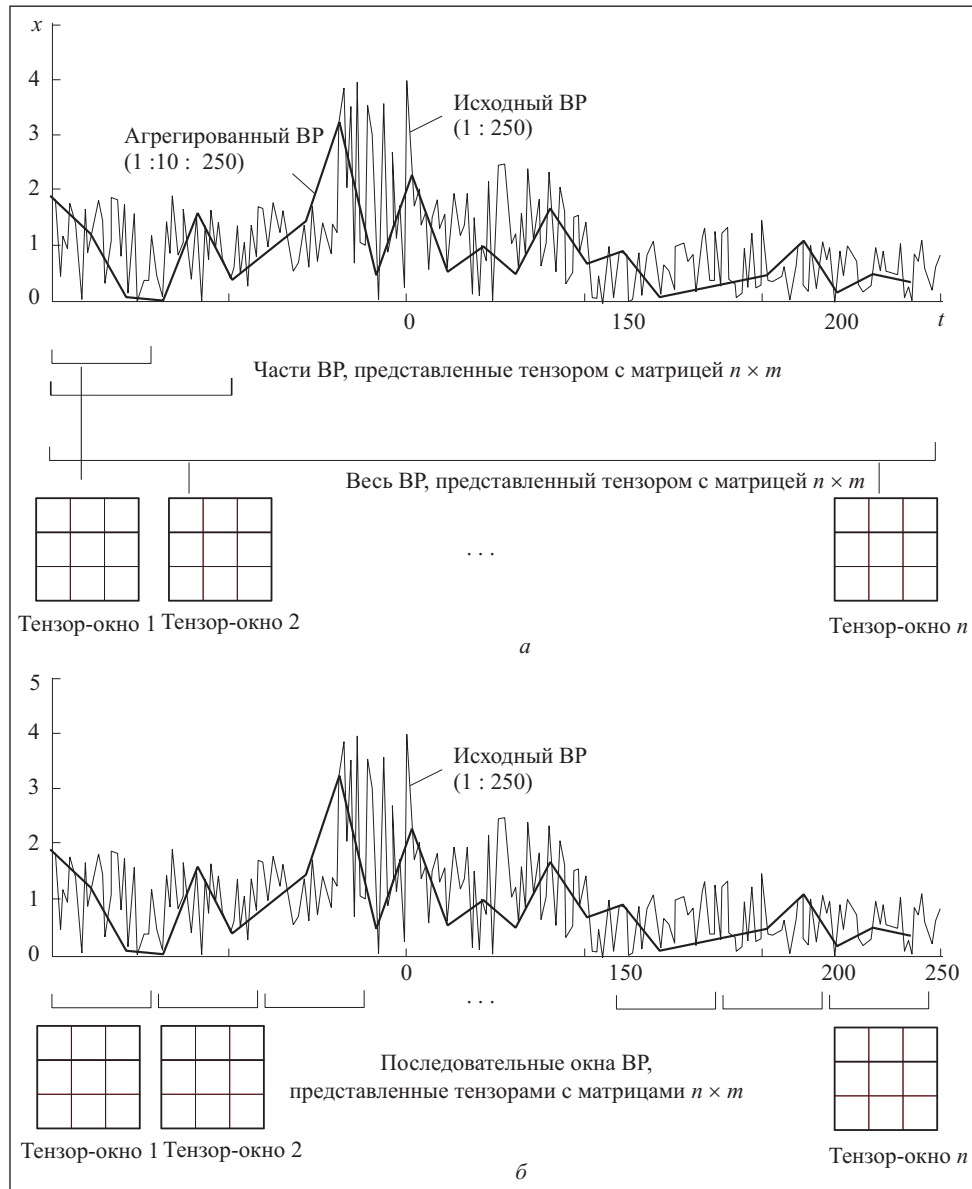


Рис. 4. Способы представления динамики ВР: а — совокупность агрегированных сегментов (1:25, 1:2:50, 1:3:75, ..., 1:10:250); б — совокупность последовательных окон равной длины (первое окно —  $l_1 = m \times n$  элементов, второе окно —  $l_2 = m \times n$  элементов, ...)

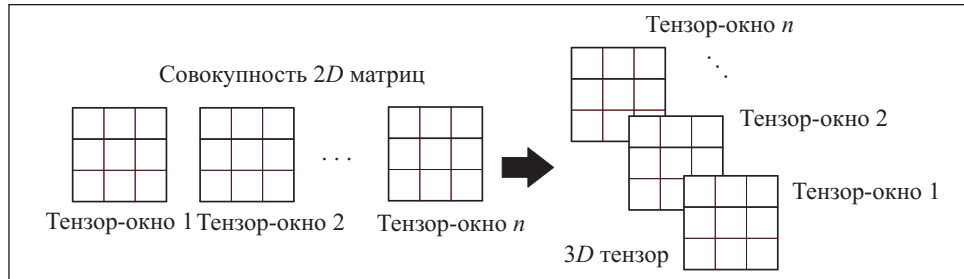


Рис. 5. Моделирование совокупности 2D матриц 3D тензором

личную длину, представляются тензорами одной размерности. Второй способ (рис. 4, б) ориентирован на представление ВР как совокупности последовательных окон равной длины. Оба способа пригодны для исследования динамики ВР. Заметим, что сравнение тензорных моделей наиболее целесообразно проводить в условиях, когда они имеют одинаковые размерности. Тензоры с матрицами различной размерности могут быть приведены к тензорам с матрицами одинаковой размерности с помощью кронекерова произведения (КП) [6].

Если число окон во фрагменте ВР равно  $f$ , окну с номером  $j$  соответствует тензор-окно  $td(:, :, j)$ , то блочно-диагональный тензор фрагмента ВР имеет вид

$$\mathbf{T}_{dN} = \begin{bmatrix} [td(:, :, 1)] & \dots & \dots & 0 \\ 0 & [td(:, :, 2)] & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & [td(:, :, f)] \end{bmatrix}.$$

Аналогичный вид имеет блочно-диагональный тензор всего ВР, но элементами диагонали являются тензоры фрагмента ВР, в то время как в первом случае (см. рис. 4, а) — тензоры окна ВР. Следует заметить, что совокупность 2D матриц-окон, представляющих, например, фрагмент ВР, может быть представлена как совокупность слайсов 3D тензора (рис. 5).

Необходимо заметить, что учет физических свойств одномерной задачи, в частности иерархически структурированного ВР по схеме окно-фрагмент-сегмент-весь ВР, при условии представления окна ВР 2D тензором также приводит к многомерным тензорам. Пусть одномерный ВР из  $N$  элементов  $X = \{x_i\}_{i=1}^{300}$  надо представить в виде тензорной модели, состоящей из  $f$  фрагментов, каждый из которых содержит  $k$  окон, состоящих из  $m$  элементов каждое. Это можно реализовать с помощью стандартной процедуры Матлаб (рис. 6).

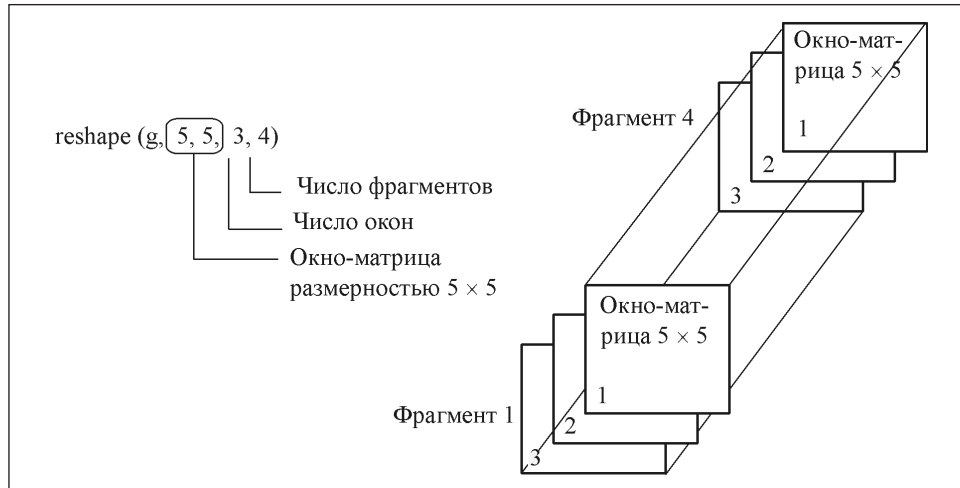


Рис. 6. Пример формирования четырехмерного тензора с учетом физических свойств задачи:  $N = 300$ ,  $f = 4$ ,  $k = 3$ ,  $m = 25$  ( $N = fkm$ )

Тензорная модель состоит из  $2D$  матриц  $gt(:, :, 1:3, 1:4)$  размерностью  $5 \times 5$ : первая матрица —  $gt(:, :, 1, 1)$ , вторая —  $gt(:, :, 2, 1)$ , ..., 12-я —  $gt(:, :, 3, 4)$ , общее число матриц — 12. Но массив, имеющий четыре размерности, интерпретируется стандартным Матлабом как отличный от двухмерного. К его обработке не могут быть применены методы и модели Матлаб, ориентированные на  $2D$  матрицы.

Высокопорядковое внешнее произведение непосредственно не поддерживается в Матлаб, но может быть имплементировано. Например,  $X = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c}$  может вычисляться с помощью процедур Матлаб:  $X = \text{reshape}(\text{kron}(\text{kron}(c, b), a), I, J, K)$ , где  $I, J$  и  $K$  — длины векторов соответственно  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  [7]. С помощью Tensor Toolbox и свойства Kruskal-тензора, это может быть сделано так:  $X = \text{full}(\text{ktensor}(a, b, c))$ . Матрицизация тензора выполняется с помощью процедур перестановки и восстановления формы элементов, например:

```
X = rand(5,6,4,2); R = [2 3]; C = [4 1]; I = size(X); J = prod(I(R)); K = prod(I(C));
Y = reshape(permute(X,[R C]),J,K); % convert X to matrix Y;
Z = ipermute(reshape(Y,[I(R) I(C)]),[R C]); % convert back to tensor;
```

**Подмножество упорядоченных пар (псевдоНМ) как способ представления окон и фрагментов ВР. Формулировка идеи, математический аппарат** [8]. Для заданной матрицы данных  $\mathbf{X}$  необходимо найти  $n$ -векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  (у которых возможно, но не обязательно,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ ). Они минимизируют критерий  $\|\mathbf{X} -_{\text{кр}} \mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_F^2 + P_\lambda(u, v)$ , где



$$\|\mathbf{X} -_{\text{Kr}} \mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_F^2 = \text{trace} \{(\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T); (\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - u_i v_j)^2;$$

$P_\lambda(u, v) = \sum_{j=1, n; i=1, n}^n P_\lambda(|u_j|, |v_i|)$  — штрафная функция;  $-_{\text{Kr}}$  — символ кронекеровой разности;  $[\mathbf{A}]_m^m -_{\text{Kr}} [\mathbf{B}] = [\mathbf{A}][\mathbf{1}_n] - [\mathbf{1}_m][\mathbf{B}]$  и  $[\mathbf{1}_n], [\mathbf{1}_m]$ , — единичные матрицы размерностью соответственно  $n \times n$  и  $m \times m$ . Следует заметить, что матрицы  $\mathbf{X}, \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  могут иметь различные размерности, что обуславливает использование кронекеровой разности для их согласования.

Способ решения данной задачи известен — аппроксимация исходного множества данных (МД), рассматриваемого как тензор ( в общем случае многомерный массив) так называемыми тензорными разложениями [9, 10], в соответствии с которыми сингулярная декомпозиция (SVD)  $m \times n$ -матрицы имеет вид  $\mathbf{X} \cong \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$ , сингулярные величины  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  упорядочены:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  и  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , где  $\lambda_i$  — собственные значения  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ . Векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r$  — ортогональны  $r = \text{rank}(B) \leq \min(m, n)$ . Для приближенных вычислений можно ограничиться меньшим числом элементов разложения, в частном случае — одним. Если окно (фрагмент) ВР  $\{x_i\}_{i=1}^{I_x}$  аппроксимирован подмножеством упорядоченных пар (УП)  $(\sigma_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1^T)$ , представленным в виде КП  $\sigma_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1^T$ , то можно сформулировать задачу поиска ближайшего подмножества УП  $x \otimes \mu_x^T, \min_{x \in \mathbf{X}, \mu_x \in \mu_x} \|\sigma_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1^T - x \otimes \mu_x^T\|_F^2$ , которое имеет семантику НМ, т.е.  $\mu_x^T \rightarrow [0, 1]$ , хотя понятие значимости  $x$  в составе  $\mathbf{X}$  условно.

Заметим, что представление НМ  $\tilde{x} = \{x / \mu_x\}, \mu_x \rightarrow [0, 1], x \in U = \{u\}$  в виде тензорной (кронекеровой) гранулы, предложенное в работах [11—13] как один из элементов гранулярного компьютеринга, открывает новые возможности для решения задач управления в условиях неопределенности.

**Тензорные аппроксимации.** В соответствии с определениями [14, 15] многомерный массив называют тензором. Дан  $k$ -порядковый тензор  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_k}$ . Необходимо определить векторы  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_1}, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{d_2}, \dots, \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{d_k}, i = 1, \dots, r, \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_k}, \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  такие, которые минимизируют выражение  $\|\mathbf{A} - x_1 \otimes y_1 \otimes \dots \otimes z_1 - \dots - x_r \otimes y_r \otimes \dots \otimes z_r\|$ , или  $\text{argmin}_{\text{rank}(B) \leq r} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ . Здесь  $\|\cdot\|$

определяет некоторую норму на  $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_k}$ . В случае  $k = 2$  проблема полностью решена для унитарно инвариантной нормы на  $\mathbb{R}^{m \times n}$  в соответствии с теоремой Эккарта— Юнга, в которой утверждается следующее: если  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \sigma_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i, \sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ , есть сингулярная декомпозиция

определяет некоторую норму на  $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_k}$ . В случае  $k = 2$  проблема полностью решена для унитарно инвариантной нормы на  $\mathbb{R}^{m \times n}$  в соответствии с теоремой Эккарта— Юнга, в которой утверждается следующее: если  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \sigma_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i, \sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ , есть сингулярная декомпозиция

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , то лучшая ранг- $r$  аппроксимация осуществляется первыми  $r$  термами в приведенной выше сумме. Лучшая ранг- $r$  аппроксимация высокопорядковых тензоров является проблемой особой важности в многомерном анализе данных.

В работе [16] показано, что для любого НМ может быть определено обычное четкое множество (ЧМ), расположенное на наименьшем расстоянии от него, т.е. имеющее наименьшую норму (по отношению к норме НМ, или наименее уклоняющуюся от нормы НМ,  $\|\mathbf{A}\|_F^2 \approx \|\tilde{\mathbf{A}}\|_F^2$ , где  $\tilde{\mathbf{A}}$  — НМ,  $\|\cdot\|_F^2$  — квадрат фробениусовой нормы,  $\|\cdot\|_F^2 = \text{trace}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)$ ). Это означает, что решение, например, задачи  $\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_F^2 \rightarrow \min$  позволяет на основании НМ,  $\tilde{\mathbf{A}} = [a_i \mu^{a_i}]_{i=1}^n$ ,  $\mu^{a_i} \rightarrow [0, 1]$  вычислить ЧМ  $\mathbf{A} = [a_i \lambda^{a_i}]_{i=1}^n$ ,  $\lambda^{a_i} \in \{0 \text{ or } 1\}$ , где  $\mu^{a_i}$  — функция принадлежности (ФП);  $\lambda^{a_i}$  — характеристическая функция. Заметим, что НМ и ЧМ представлены единообразно, например как подмножества УП, т.е. в виде матрицы размерностью  $2 \times n$  или матрицы, полученной как КП векторов:  $(\mathbf{a} \otimes \mu^{\mathbf{a}})$  или  $(\mathbf{a} \otimes \lambda^{\mathbf{a}})$  размерностью  $n \times n$ .

В работе [17] показано, что решение задачи минимизации  $\psi = \|\mathbf{E} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{M}\|_F^2$  может быть выполнено, если использовать оператор векторизации  $\text{vec}$ , т.е. оператор поколонкового представления матрицы. Если  $\mathbf{A}$  — матрица  $m \times n$ , то  $\text{vec}(\mathbf{A}) = [a(:, 1), a(:, 2), \dots, a(:, n)]$ , где  $a(:, j)$  —  $j$ -я колонка матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $j = 1, n$ , может быть использован для минимизации  $\psi$  как аппроксимационной проблемы. Идея преобразовать матрицу  $\mathbf{E}$  в другую матрицу  $\hat{\mathbf{E}}$ , такую, что сумма квадратов, возникающая в  $\|\mathbf{E} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{M}\|_F^2$  точно такая же, как сумма квадратов в  $\|\hat{\mathbf{E}} - \text{vec}(\mathbf{B}) \cdot \text{vec}(\mathbf{M})^T\|_F^2$ , предложена в работе [17].

Предположим, что задано НМ  $\tilde{\mathbf{a}} = [a_i / \mu^{a_i}]_1^m$ ,  $\tilde{\mathbf{a}} \in E$ , где  $E$  — универсальное множество (УМ);  $m$  — число  $\alpha$ -уровней. При этом  $m = n \cdot n$ ; ФП —  $\mu^{a_i} \rightarrow [0, 1]$ ; подмножество УП  $[a_i \mu^{a_i}]_1^m$  задается экспертно. Представим УМ, на котором задано НМ  $\tilde{\mathbf{a}} \in E$ , в виде тензора с матрицей  $n \times n$ :

$$[E^{\min} : \Delta_E : E^{\max}] = \{e_j\}_1^m \xrightarrow{\text{reshape}(E, n, n)} [e_{ij}]_{i,j=1,n}.$$

В работе [17] показано, что если  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  при  $m = m_1 m_2$  и  $n = n_1 n_2$  и  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ , то  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}\|_F = \|\mathfrak{R}(\mathbf{A}) - \text{vec}(\mathbf{B}) \cdot \text{vec}(\mathbf{C})^T\|_F$ . Если  $\hat{\mathbf{A}} = \mathfrak{R}(\mathbf{A})$  имеет сингулярную декомпозицию  $\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{V} = \Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$ , где

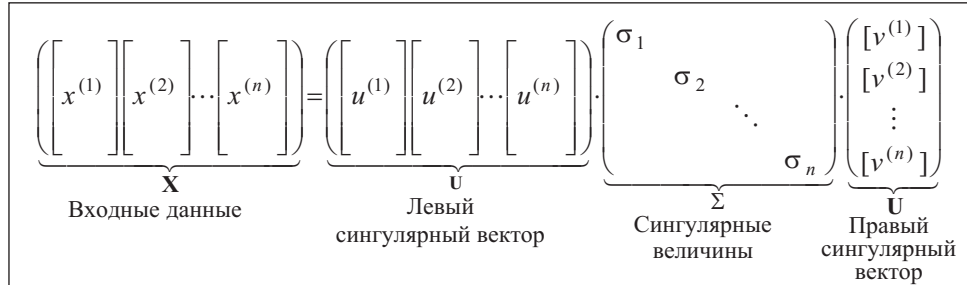


Рис. 7. Схема процедуры сингулярной декомпозиции

$C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ ,  $\sigma_1$  — наибольшая сингулярная величина  $U(:, 1)$ , а  $V(:, 1)$  — сингулярные векторы, то матрицы  $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  и  $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ , определенные в виде  $\text{vec}(B) = \sigma_1 U(:, 1)$  и  $\text{vec}(C) = V(:, 1)$ , минимизируют  $\|A - B \otimes C\|_F$ . Существенное значение имеет тот факт, что если  $m = m_1 m_2$ ,  $n = n_1 n_2$  и  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$  заданы, то матрица  $B = [b_{ij}]$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ , элементы которой определены в виде

$$b_{ij} = \frac{\text{tr}(A_{ij}^T C)}{\text{tr}(C^T C)}, \quad 1 \leq i \leq m_1, \quad 1 \leq j \leq n_1,$$

минимизирует выражение  $\|A - B \otimes C\|_F$ , где  $A_{ij} = A((i-1)m_2 + 1 : i \cdot m_2, j-1, n_2 + 1 : j \cdot n_2)$ . Аналогично, если матрица  $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  фиксирована, то матрица  $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ , определенная в виде

$$c_{ij} = \frac{\text{tr}(\hat{A}_{ij}^T B)}{\text{tr}(B^T B)}, \quad 1 \leq i \leq m_2, \quad 1 \leq j \leq n_2,$$

минимизирует выражение  $\|A - B \otimes C\|_F$ , где  $\hat{A}_{ij} = A(i : m_2 : m, j : n_2 : n)$ .

Полученные выражения позволяют на основании заданного УМ вычислить оптимальную (по Ф-норме) ФП или для экспертно выбранной ФП определить рациональную величину УМ. Схема процедуры сингулярной декомпозиции приведена на рис. 7.

Определение НМ  $\tilde{F}$  предполагает реализацию двух процедур:

- 1) задание универсального множества  $\Omega$ ;
- 2) отображение из  $\Omega$  в единичный интервал, т.е.  $\mu_{\tilde{F}}: \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

Величина  $\mu_{\tilde{F}}(\omega)$  для  $\omega \in \Omega$  — субъективная степень принадлежности элемента  $\omega \in \Omega$  НМ  $\tilde{F}$  и выражает степень совместимости значения (или объекта)  $\omega \in \Omega$  с понятием  $\tilde{F}$ . Если  $\Omega = \mathbf{R}$  есть множество действительных чисел, то  $\tilde{F}$  — нечеткая величина. В свою очередь, представление любого УМ (одномерного массива), в частности  $\Omega$ , при помощи процедуры сингу-

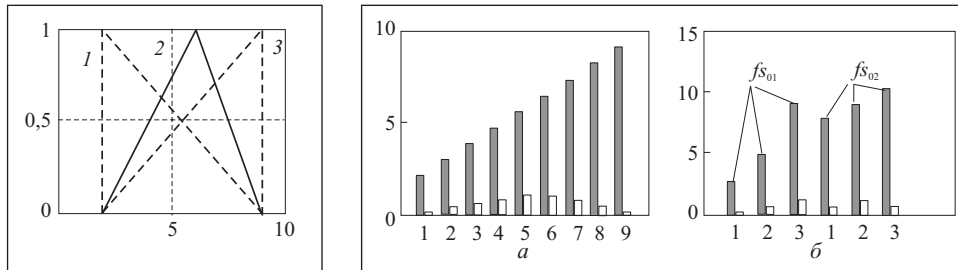


Рис. 8. Семейство НМ, близких по Ф-норме:  $\{\tilde{x} \stackrel{\Delta}{=} \tilde{6}, \tilde{6} \in [2, 9]\}$ ; 1, 3 — граничные НМ —  $F_1 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, a, b])$ ,  $F_3 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, b, b])$ , где  $\Delta$  — шаг изменения УМ; 2 — исходное НМ  $<$  приблизительно 6  $>$  с треугольной ФП, заданное на  $E = [a, b] = [2, 9]$ ,  $F_2 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, c, b])$ ,  $a < c < b$ ,  $c = 6$

Рис. 9. Стандартное НМ с треугольной ФП, заданное как псевдомножество УП ( $a$ ) и псевдоНМ, полученные в результате сингулярной декомпозиции УМ [2:7/8:9], представленного в виде матрицы  $3 \times 3$  ( $b$ ); ■ — значения; □ — псевдоФП

лярной декомпозиции матрицированного массива эквивалентно заданию подмножества УП  $[\omega_1 \omega_2]$  таких, что  $\omega_1 \otimes \omega_2 \approx \Omega$ ,  $\text{abs}(\omega_2) \rightarrow [0, 1]$ ,  $\sum \omega_2^2 = 1$ . При этом  $\omega_2$  может иметь трактовку, отличную от трактовки ФП в теории НМ.

**Пример.** Рассмотрим свойства НМ  $\tilde{x} = [x / \mu^x]$ ,  $\mu^x \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \in E = \{u\}$ , в тензорном представлении. На рис. 8 представлены НМ, имеющие практически одинаковую Ф-норму. Нечеткое множество  $\tilde{x}$  рассмотрено для двух случаев:

- 1)  $\mathbf{T}_x = x \otimes \mu^x$ , где  $\otimes$  — символ КП;
- 2)  $\mathbf{T}_x = [x_1 \mu^{x_1}; \dots; x_n \mu^{x_n}]$ .

В первом случае  $\mathbf{T}_x$  —  $2D$  тензор с матрицей  $n \times n$ , во втором случае — с матрицей  $2 \times n$ , где  $n$  — число элементов (УП) в составе НМ. Ф-норма  $\|\mathbf{T}_x\|_F^2$  равна  $\text{trace}(\mathbf{T}_x \cdot \mathbf{T}_x^T)$ , где  $T$  — символ транспонирования.

**А л г о р и т м** вычисления псевдоНМ как ближайшего КП на УМ [2:7/8:9] в нотации Матлаб:

1. Тензорное представление УМ:  $tb = [2.00 \ 4.63 \ 7.25; 2.88 \ 5.50 \ 8.13; 3.75 \ 6.38 \ 9.00]$ , вычисление Ф-нормы:  $\text{norm}(tb, \text{fro}) = 17.84$ .

2. Формирование экспертно назначенного НМ на УМ  $b = [2:7/8:9] \rightarrow \text{trimf}(b, [a \ b \ c])$ .

3. Стандартная дефадзификация:

$$\text{НМ } F_2 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, c, b]) \rightarrow 5.66$$

$$\text{НМ } F_1 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, a, b]) \rightarrow 4.04$$

$$\text{НМ } F_3 = \text{trimf}([a:\Delta:b], [a, b, b]) \rightarrow 6.96.$$

4. Формирование псевдоНМ (рис. 9)

4.1. Процедура сингулярной декомпозиции:  $[u \ s \ v] = \text{svd}(tb)$ ;

4.2. Формирование псевдоНМ

$fs10 = \text{sortrows}([\text{abs}(u(:, 1)) * s(1, 1) * (\text{abs}(v(:, 1))) \quad \text{abs}(v(:, 1)) / \max(\text{abs}(v(:, 1)))]);$

$fs20 = \text{sortrows}([\text{abs}(u(:, 1)) * s(1, 1) * \max(\text{abs}(v(:, 1))) \quad \text{abs}(v(:, 1)) / \max(\text{abs}(v(:, 1)))]);$

$fs30 = \text{sortrows}([\text{abs}(u(:, 1)) * s(1, 1) \quad \text{abs}(v(:, 1))].$

Заметим, что в общем случае аппроксимация УМ в форме ближайшего кронекерова произведения (БКП) имеет вид  $tb = u(:, 1) \cdot s(1, 1) \otimes v(:, 1)^T$ . Это иногда приводит к тому, что компонента  $u(:, 1) \cdot s(1, 1)$  подмножества УП не принадлежит УМ, на котором задано НМ. Этот стандартный случай рассмотрен в литературе [19]. Для его избежания БКП находят при наложении ограничений в виде  $u(:, 1) \cdot s(1, 1) \in \text{УМ}$  или используя штрафные функции. Применяемые методы в виде процедур  $fs_{01}$ ,  $fs_{02}$  являются формой наложения ограничений или штрафных функций.

5. Дефадзификация сформированных подмножеств УП (псевдоНМ) выполнена на основании выражений  $[\text{sum}(fs10(:, 1) * fs10(:, 2)) / \text{sum}(fs10(:, 2)) \quad \text{sum}(fs20(:, 1) * fs20(:, 2)) / \text{sum}(fs20(:, 2))]$

PseudofS

$fs10$		$fs20$		$fs30$	
2.51	0.33	7.64	0.33	8.81	0.29
4.75	0.47	8.87	1.00	10.22	0.87
8.87	1.00	10.09	0.47	11.64	0.41

Дефадзифицированные значения

$fs10$	$fs20$
6.63	8.96

Заметим, что  $\text{def}(F1) < fs10 < \text{def}(F3)$ , где  $\text{def}(F1)$ ,  $\text{def}(F3)$  — дефадзифицированные значения стандартных НМ из п. 3.

6. Вычисление норм псевдоНМ и исходного УМ (представленного в виде тензора)

$\text{norm}(\text{diag}(tb), \text{fro})$	$\text{norm}(fs10, \text{fro})$	$\text{norm}(fs20, \text{fro})$
10.74	10.43	15.50

7. Формирование НМ с треугольной ФП с минимальным числом компонентов:  $\begin{pmatrix} \min(\min(b)) & 0 \\ \text{mean}(\text{mean}(b)) & 1 \\ \max(\max(b)) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ 5.50 & 1 \\ 9.00 & 0 \end{pmatrix}$  Ф-норма = 10.78; дефадзифицированное значение = 5.50.

Заметна практическая близость  $\Phi$ -норм псевдоНМ, исходного УМ и стандартного НМ с треугольной ФП. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

**Формирование новых (дополнительных) характеристик ВР на основе методологии псевдоНМ.** Пусть задан ВР, полученный с помощью генератора случайных чисел, фрагмент которого приведен на рис. 10.

Схема анализа имеет следующий вид:

$$(\forall i) x^{(i)} = \{x_1, \dots, x_m\}^{(i)} \rightarrow \underbrace{T^{x^{(i)}}}_{\text{Тензор-окно}} \xrightarrow{\text{Сингулярная декомпозиция}} \left\{ \begin{array}{l} \pi \tilde{X} = \{x / \pi \mu^x\} \\ \pi \text{НМ} = \text{подмножество УП} \end{array} \right\}$$

$$\|T_x(i)\|_F^2 \approx \|\pi \tilde{X}^{(i)}\|_F^2.$$

В соответствии с этой схемой выделим в данном фрагменте окна, для которых сформируем  $2D$  тензорные модели. На основании сингулярной декомпозиции моделей сформируем подмножества УП согласно приведенному выше алгоритму.

Таблица 1

УМ в виде матрицы		ПсевдоНМ (подмножества УП), полученные посредством сингулярной декомпозиции УМ [2 9] [u s v] = (svd (tb))			Стандартное НМ $b = [2:7/8:9]$ ; $y = \text{trimf}(b, [2\ 6\ 9])$
3 × 3	9 × 2				
$tb =$	$bp =$	$fsb1 =$	$fsb2 =$	$fsb3 =$	
2.00 4.63 7.25	2.00 1.00	2.00 0	2.00 1.00	2.00 0	2.00 0
2.88 5.50 8.13	2.88 1.00	2.88 0.22	2.88 0.88	2.88 0.13	2.88 0.22
3.75 6.38 9.00	3.75 1.00	3.75 0.44	3.75 0.75	3.75 0.25	3.75 0.44
	4.63 1.00	4.63 0.66	4.63 0.63	4.63 0.38	4.63 0.66
	5.50 1.00	5.50 0.88	5.50 0.50	5.50 0.50	5.50 0.88
	6.38 1.00	6.38 0.88	6.38 0.38	6.38 0.63	6.38 0.88
	7.25 1.00	7.25 0.58	7.25 0.25	7.25 0.75	7.25 0.58
	8.13 1.00	8.13 0.29	8.13 0.13	8.13 0.88	8.13 0.29
	9.00 1.00	9.00 0	9.00 0	9.00 1.00	9.00 0
$\text{norm}(bp, 'fro') =$	$\text{norm}(tb, 'fro') =$	$\text{norm}(fsb1, 'fro') =$	$\text{norm}(fsb2, 'fro') =$	$\text{norm}(fsb3, 'fro') =$	$\text{norm}(by, 'fro') =$
18.09	17.84	17.92	17.93	17.93	17.91

*Примечания:* 1. Отличие в  $\Phi$ -нормах для тензора, сформированного на УМ, и матриц подмножеств УП, равны (НМ 2, 6, 9 с треугольной ФП, заданных на УМ [2:7/8:9], составляет величину в 1÷2 %). 2.  $\Phi$ -нормы УМ, представленных в тензорной форме ( $tb$ ) и в форме подмножества УП соответственно 17.84 и 18.09, отличие составляет не более 1%, что допустимо. 3. Процедура SVD выполнена для тензора  $T_x$ , сформированного на УМ в виде  $T_x = \text{reshape}([2:7/8:9], 3, 3)$ . 4. Процедура БКП реализована при условии, что левый сингулярный вектор задан. 5. УМ состоит из  $n^2$  элементов, правый и левый сингулярный векторы  $u(:, 1)$  и  $v(1, :)$  содержат по  $n$  величин. Это обстоятельство следует учитывать при сравнении  $\Phi$ -норм указанных объектов, в общем случае  $\|\text{diag}(tb)\|_F^2 \approx \|\text{abs}(u(:, 1) \cdot s(1, 1))\|^T \|\text{abs}(v(1, :))\|_F^2$ .

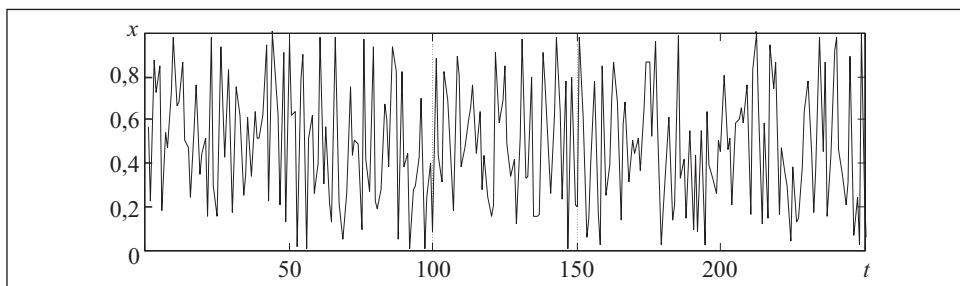


Рис. 10. Фрагмент исходного ВР, рассматриваемого как последовательность окон (по 25 элементов в окне)

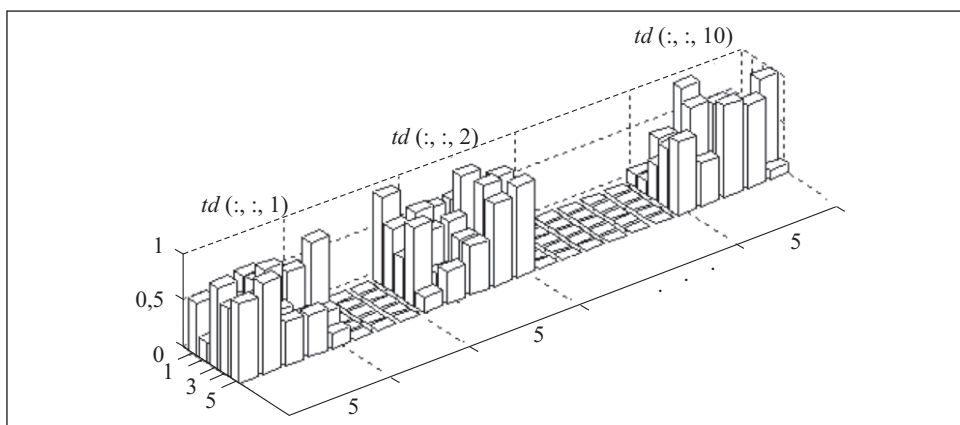


Рис. 11. Тензорная модель фрагмента исходного ВР

На рис. 11 представлена тензорная модель фрагмента ВР, состоящая из  $2D$  тензоров с матрицами  $5 \times 5$  (см. рис. 3), а на рис. 12 приведены подмножества УП, вычисленные для каждого тензор-окна ВР. Результаты вычислений НМ-характеристик ВР, представленных в тензорной форме, приведены в табл. 2, а статистические характеристики окон фрагмента ВР — в табл. 3.

На рис. 13 представлены спектры сингулярных величин  $2D$  тензоров, моделирующих окна ВР, которые являются дополнительными характеристиками ВР.

Таким образом, на основании проведенных исследований можно полагать, что  $2D$  тензорное представление ВР позволяет получить следующие дополнительные характеристики ВР:

подмножество УП, представляющее собой псевдоНМ, которое можно использовать при анализе ВР, в частности для прогнозирования, иденти-

Таблица 2

Фрагмент исследуемого ВР		Тензорная модель окна ВР	Подмножество УП (псевдоНМ)	def ( <sup>π</sup> НМ) round (def ( <sup>π</sup> НМ))	Близость по Ф-норме	
<i>t</i>	<i>x(t)</i>				<i>td</i> ((:, :, i)	<i>fs</i> ((:, :, i)
1	0.56	<i>td</i> (:, :, 1) =	<i>fs</i> (:, :, 1) =	1.25/1.00	3.04	3.04
2	0.22	0.56 0.18 0.67 0.24 0.52	0.97 0.45			
3	0.88	0.22 0.54 0.68 0.57 0.16	0.99 0.53			
4	0.73	0.88 0.47 0.88 0.76 0.98	1.20 0.38			
5	0.85	0.73 0.73 0.51 0.35 0.30	1.35 0.36			
6	0.18	0.85 0.98 0.47 0.45 0.15	1.75 0.50			
7	0.54	<i>td</i> (:, :, 2) =	<i>fs</i> (:, :, 2) =	1.32/1.00	3.12	3.21
8	0.47	0.94 0.44 0.61 0.63 0.63	1.19 0.39			
9	0.73	0.67 0.75 0.34 0.95 0.21	1.30 0.56			
10	0.98	0.43 0.62 0.64 0.22 0.92	1.32 0.43			
11	0.67	0.83 0.25 0.52 0.99 0.13	1.34 0.36			
...	0.68	0.17 0.35 0.52 0.88 0.97	1.46 0.47			
	0.88	<i>td</i> (:, :, 3) =	<i>fs</i> (:, :, 3) =	1.02/1.00	2.51	2.63
	0.51	0.62 0.00 0.98 0.98 0.76	0.74 0.48			
	0.47	0.64 0.52 0.30 0.21 0.44	0.84 0.47			
	0.24	0.01 0.62 0.57 0.14 0.51	0.88 0.39			
	0.57	0.79 0.27 0.22 0.05 0.49	0.94 0.29			
	0.76	0.90 0.40 0.14 0.26 0.09	1.55 0.57			
	0.35	<i>td</i> (:, :, 4) =	<i>fs</i> (:, :, 4) =	1.01/1.00	2.64	2.62
	0.45	0.97 0.19 0.94 0.45 0.70	0.57 0.61			
	0.52	0.42 0.28 0.83 0.01 0.01	0.64 0.31			
	0.16	0.27 0.67 0.05 0.28 0.24	0.86 0.34			
	0.98	0.94 0.60 0.83 0.29 0.40	1.46 0.26			
	0.30	0.22 0.39 0.39 0.43 0.09	1.54 0.59			
	0.15	<i>td</i> (:, :, 5) =	<i>fs</i> (:, :, 5) =	1.24/1.00	3.02	3.03
	...	0.88 0.53 0.48 0.64 0.21	1.12 0.45			
		0.44 0.18 0.61 0.28 0.91	1.18 0.50			
		0.31 0.90 0.65 0.44 0.58	1.20 0.51			
		0.82 0.81 0.76 0.25 0.69	1.28 0.47			
		0.69 0.39 0.45 0.15 0.86	1.55 0.27			
		<i>td</i> (:, :, 6) =	<i>fs</i> (:, :, 6) =	1.06/1.00	2.67	2.75
		0.49 0.97 0.16 0.26 0.78	0.65 0.41			
		0.34 0.33 0.16 0.62 0.00	0.67 0.48			
		0.42 0.34 0.91 0.99 0.80	1.15 0.31			



Табл. 2. (Окончание)

Фрагмент исследуемого ВР		Тензорная модель окна ВР	Подмножество УП (псевдоНМ)	def ( $\pi$ НМ) round (def ( $\pi$ НМ))	Близость по Ф-норме	
$t$	$x(t)$				$td((:, :, i)$	$fs((:, :, i)$
	0.38	0.12 0.80 0.78 0.64 0.21	1.21 0.52	1.15/1.00	2.83	2.92
	0.13	0.52 0.16 0.43 0.23 0.20	1.57 0.48			
	0.14	$td((:, :, 7) =$	$fs((:, :, 7) =$			
	0.38	0.98 0.78 0.40 0.58 0.52	0.92 0.46			
	0.64	0.62 0.16 0.69 0.68 0.37	0.99 0.55			
	0.78	0.06 0.03 0.87 0.32 0.65	1.12 0.39			
	0.43	0.14 0.85 0.68 0.51 0.87	1.40 0.43			
	0.17	0.41 0.25 0.14 0.45 0.87	1.40 0.39	0.93/1.00	2.31	2.36
	0.37	$td((:, :, 8) =$	$fs((:, :, 8) =$			
	0.98	0.53 0.47 0.33 0.43 0.39	0.51 0.38			
	0.46	0.96 0.61 0.43 0.08 0.33	0.75 0.30			
	0.87	0.59 0.14 0.15 0.55 0.26	0.97 0.53			
	0.15	0.02 0.21 0.55 0.02 0.51	1.12 0.40			
	0.44	0.18 0.99 0.09 0.64 0.46	1.14 0.57			
	0.92	$td((:, :, 9) =$	$fs((:, :, 9) =$	1.22/1.00	2.90	2.93
240	0.98	0.81 0.60 0.84 0.15 0.47	0.82 0.26			
241	0.46	0.47 0.66 1.00 0.95 0.35	0.94 0.49			
242	0.34	0.52 0.58 0.66 0.74 0.30	1.27 0.42			
243	0.21	0.20 0.76 0.12 0.87 0.04	1.29 0.55			
244	0.32	0.58 0.16 0.59 0.16 0.38	1.60 0.46			
245	0.90	$td((:, :, 10) =$	$fs((:, :, 10) =$			
246	0.07	0.13 0.43 0.87 0.46 0.07	0.44 0.46			
247	0.25	0.14 0.17 0.15 0.34 0.25	0.68 0.63			
248	0.02	0.38 0.37 0.44 0.21 0.02	1.00 0.40			
249	1.00	0.64 0.98 0.92 0.32 1.00	1.51 0.30			
250	0.10	0.78 0.46 0.98 0.90 0.10	1.70 0.39			

фикации аномалий, восстановления ВР, сокращения объема хранимой информации и решения других задач;

спектры сингулярных величин  $2D$  тензоров, моделирующих окна фрагмента ВР, эффективность которых описана в работе [5].

Следует заметить, что над  $\pi$ НМ можно выполнять все операции нечеткой математики аналогично стандартным НМ, используя принцип нечеткого расширения. Например, пусть заданы два  $\pi$ НМ:  $fs_1( :, : )$  и  $fs_2( :, : )$ .

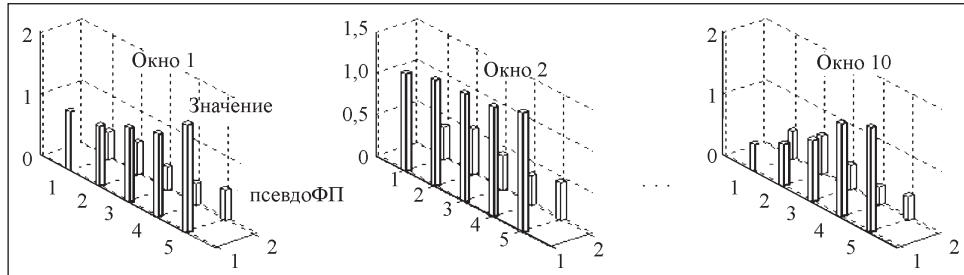


Рис.12. Подмножества УП (псевдоНМ), моделирующие окна исходного ВР

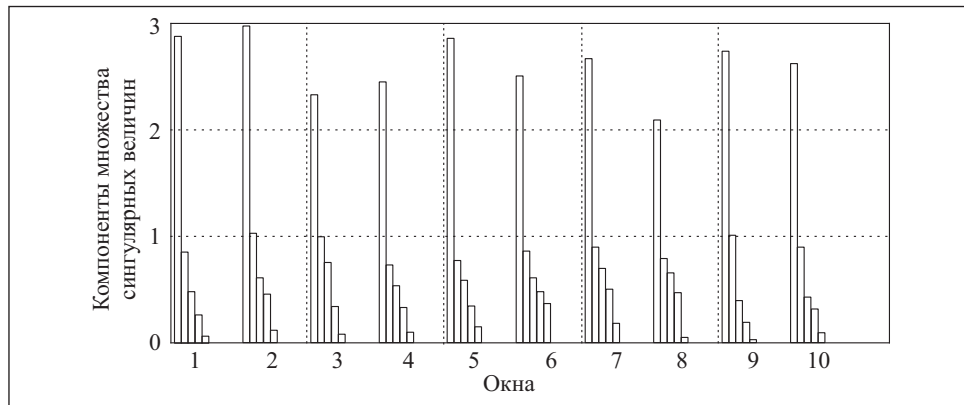


Рис.13. Спектры сингулярных величин 2D тензоров, моделирующих окна фрагмента ВР

Таблица 3

Номер окна	Значение статистической характеристики окна			
	Минимальное	Среднее	Максимальное	Стандартное отклонение
1	0.15	0.55	0.98	0.07
2	0.13	0.58	0.99	0.11
3	0.00	0.44	0.98	0.06
4	0.01	0.44	0.97	0.09
5	0.15	0.56	0.91	0.07
6	0.00	0.47	0.99	0.08
7	0.03	0.51	0.98	0.10
8	0.02	0.40	0.99	0.11
9	0.04	0.52	1.00	0.09
10	0.02	0.46	1.00	0.06

Тогда  $\pi$ НМ  $f_{s_3}(:, :) = f_{s_1}(:, :) \pi^* f_{s_2}(:, :)$ , где  $\pi^* \in \{+, -, *, /\}$  вычисляется в соответствии с алгоритмом:

1.  $f_{s_3}(:, 1) = f_{s_1}(:, 1) \pi^* f_{s_2}(:, 1)$ , где  $\pi^*$  означает выполнение операции только для пары упорядоченных элементов;

2.  $f_{s_3}(:, 2) = \min [f_{s_1}(:, 2), f_{s_2}(:, 2)]$ ;

3.  $f_{s_3} = \{f_{s_3}(:, 1), f_{s_3}(:, 2)\}$ .

## Выводы

1. Сложность анализа ВР, связанных с реальными прикладными задачами, например трафиком КС, обусловленную высокой размерностью задачи и недостатком первичных признаков, можно существенно уменьшить посредством представления ВР (и его отдельных составных частей — окно-фрагмент-сегмент) в виде  $2D$  тензоров.

2.  $2D$  тензоры, моделирующие отдельные элементы ВР, на основании сингулярных декомпозиций позволяют сформировать подмножества УП (играющие роль псевдоНМ), которые дают возможность существенно сократить объем хранимой информации и решать задачи прогнозирования ВР на основе инвариантов тензорной модели, в частности следа. Спектры сингулярных значений  $2D$  тензоров, моделирующих отдельные элементы ВР, являются новыми дополнительными характеристиками (скрытое знание), дающими возможность существенно повысить информативность ВР.

3. Учет физических свойств одномерной задачи, в частности иерархически структурированного ВР по схеме окно-фрагмент-сегмент-весь ВР, при условии представления отдельного окна ВР  $2D$  тензором (фронтальным слайсом) позволяет получить  $3D$  модель одномерного ВР, т.е. многомерный тензор.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эсбенсен К. Анализ многомерных данных. Избранные главы/ Пер. с англ. С.В. Кучерявского; под ред. О.Е. Родионовой.—Черноголовка: Изд-во ИПХВ РАН, 2005. — 160 с.
2. Dobos L., Abonyi J. On-line detection of homogeneous operation ranges by dynamic principal component analysis based time-series segmentation // Chemical Engineering Science. — 2012. — **75**. — P. 96—105.
3. Ringberg H., Soule A, Rexford J., Diot Cr. Sensitivity of PCA for Traffic Anomaly Detection // SIGMETRICS'07, June 12—16, 2007.— San Diego, California, USA. — Copyright 2007 ACM 978-1-59593-639-4/07/0006
4. Skillicorn D. Data Mining and Knowledge Discovery Series. Understanding Complex Datasets. Data Mining with Matrix Decompositions. Chapman & Hall/CRC — 2007. — 257 p.
5. Минаев Ю.Н., Жуков И.А., Филимонова О.Ю. Прогнозирование временных рядов в тензорном базисе //Электрон. моделирование. — 2006. — **28**, № 2. — С. 18—34.

6. *Laub A.J.* Matrix Analysis for Scientists and Engineers. — 2005. — 158 p. — Интернет-ресурс: [www.c-securehost.com/SIAM/ot91.html](http://www.c-securehost.com/SIAM/ot91.html)
7. *SANDIA REPORT. SAND2006-7592.* Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors. Brett W. Bader and T.G. Kolda. Prepared by Sandia National Laboratories Albuquerque. — New Mexico 87185 and Livermore, California 94550. — December 2006. — 48 p.
8. *Shen H., Huang J.Z.* Sparse principal component analysis via regularized low rank matrix approximation / J. of Multivariate Analysis. — 2008. — 99. — P. 1015—1034.
9. *Alain Y. Kibangou* Tensor decompositions and Applications. An overview and some contributions. GIPSA-N\_CS. — March 17, 2009. — 88 p.
10. *Brett W. Bader & Tamara G. Kolda.* Tensor Decompositions, the MATLAB Tensor Toolbox, and Applications to Data Analysis. Technical Report SAND2006-2081, Sandia National Laboratories. New Mexico 87185 and Livermore, California 94550. — April 2006. — 39 p. Интернет-ресурс — <http://csmr.ca.sandia.gov/~tgkolda/>.
11. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Структурированные гранулы нечеткого множества в задачах гранулярного компьютеринга // Электрон. моделирование. — 2015. — 37, № 1. — С. 77—95.
12. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Кронекеровы (тензорные) модели нечетко-множественных гранул // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — 50. — № 4. — С. 42—52.
13. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики // Искусственный интеллект. — 2013. — № 2. — С. 22—31.
14. *Silva V.D., Lim L.-H.* Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem. — Institute for Computational and Mathematical Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305-9025. E-mail: [lekheng@stanford.edu](mailto:lekheng@stanford.edu)
15. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 544 с.
16. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств/ Пер.с франц. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
17. *Van Loan C.F., Pitsianis N.* Approximation with Kronecker Products/ M.S. Moonen et al. (eds.) // Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications. — Kluwer Publishers. — 1993. — P. 293—314.
18. *Dompierre P.* Properties of Singular Value Decomposition Matrix Computations — CPSC 5006. — Интернет-ресурс: [www.cs.laurentian.ca/jdompierre/html/CPSC5006E\\_F2010/cours/ch05\\_SVD\\_Properties.pdf](http://www.cs.laurentian.ca/jdompierre/html/CPSC5006E_F2010/cours/ch05_SVD_Properties.pdf)
19. *Witten D.M., Tibshirani R., Trevor H.* A penalized matrix decomposition, with applications to sparse principal components and canonical correlation analysis // Biostatistics. — 2009. — Vol. 10, № 3. — P. 515—534.

*Yu.N. Minaev, O.Yu. Filimonova, J.I.Minaeva*

#### FUZZY SET FEATURES OF ONE-DIMENSIONAL TIME SERIES

A problem of structuring the time series (TS) (in a form of a window, fragment, segment or others structure parts) has been investigated, as well as presentation of a separate window in the form of 2D tensor  $\Xi$  with  $\mathbf{X}$  matrix of dimensionality  $m \times m$  ( $m \cdot m$  is the number of window elements TS) with following determination of  $m$ -vectors  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  (with certain restrictions), which for the given matrix of data  $\mathbf{X}$  minimize a criterion  $\|\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_F^2 + P_\lambda(u, v)$ , where  $\|\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_F^2 = \text{trace}\{(\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)(\mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T\}$ ;  $P_\lambda(u, v)$  — a penalty function,  $-\text{Kr}$  — a symbol of Kronecker

difference. Vectors  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  are considered as a subset of ordered pairs, where vector  $\mathbf{v}$  plays a role of membership function, i.e. ( $\mathbf{v} \rightarrow [0, 1]$ ). The expediency of using the procedure of a singular decomposition for this purpose is shown.

A subset of ordered pairs  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , considered as pseudo FS, represents 2D tensor with the matrix of dimensionality  $2 \times m$ , allows us to shorten a body of stored information ( $m \cdot m > 2 \cdot m$ ), to obtain hidden knowledge in the form of the spectrum of singular values and to obtain new possibilities in deciding the problems of forecasting and anomaly identifications of TS anomalies as the result of using the tensor invariants.

*Keywords:* fuzzy set, time row, tensor decomposition, singular values, Kronecker product.

#### REFERENCES

1. Esbensen, K. (2005), *Analiz mnogomernykh dannykh. Izbrannyye glavy* [Analysis of multi-dimensional data, Selected chapters], Translated from English by S.V. Kucheryavsky, Ed by O.Ye. Rodionovoy, Izdatelstvo IPHV RAN, Chernogolovka, Russia.
2. Dobos, L. and Abonyi, J. (2012), On-line detection of homogeneous operation ranges by dynamic principal component analysis based time-series segmentation, *Chemical Engineering Science*, Vol. 75, pp. 96-105.
3. Ringberg, H., Soule, A., Rexford, J. and Diot Cr. (2007), Sensitivity of PCA for traffic anomaly detection, *SIGMETRICS'07*, June 12-16, 2007, San Diego, California, USA. Copyright 2007 ACM 978-1-59593-639-4/07/0006
4. Skillicorn, D. (2007), Data mining and knowledge discovery series. Understanding complex datasets. Data mining with matrix decompositions, Chapman & Hall/CRC, London, UK.
5. Minayev, Yu.N., Zhukov, I.A. and Filimonova, O.Yu. (2006), "Prediction of time deried in tensor basis", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 28, no. 2, pp. 18-34.
6. Laub, A.J. (2005), Matrix analysis for scientists and engineers, available at: [www.c-securerehost.com/SIAM/ot91.html](http://www.c-securerehost.com/SIAM/ot91.html).
7. Bader, B.W. and Kolda, T.G. (2006), SANDIA REPORT. SAND2006-7592. Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors, Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico 87185 and Livermore, California 94550, USA.
8. Shen, H. and Huang, J.Z. (2008), Sparse principal component analysis via regularized low rank matrix approximation, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 99, pp.1015-1034.
9. Kibangou, A.Y. (2009), Tensor decompositions and Applications. An overview and some contributions. GIPSA-N\_CS. March 17, 2009, 88 p., Internet resource.
10. Bader, W.B. and Kolda, T.G. (2006), Tensor decompositions, the MATLAB Tensor Toolbox, and applications to data analysis. Tensor decompositions. *Multilinear operators for higher-order decompositions*. Technical Report SAND2006-2081, Sandia National Laboratories, April 2006, Albuquerque, New Mexico 87185 and Livermore, California 94550, USA, 39 pp., available at: - <http://csmr.ca.sandia.gov/~tgkolda/>.
11. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minayeva J.I. (2015), "Structured granules of fuzzy set in the problems of granule computing", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 1, pp. 77-95.
12. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minayeva, J.I. (2014), "Kroneker (tenzor) models of fuzzy-set granules, *Kibernetika i sistemnyi analiz*, Vol. 50, no. 4, pp. 42-52.
13. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minayeva, J.I. (2013), Tensor models of NM-granules and their use for solution of problems of fuzzy arithmetic, *Iskusstvennyy intellekt*, no. 2, pp. 22-31.
14. Silva, V.D. and Lim, L.-H. Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem, Institute for Computational and Mathematical Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305-9025.

15. Voyevodin, V.V. and Voyevodin, VI.V. (2006), *Entsiklopediya lineynoy algebrы. Elektron-naya sistema LINEAL* [Encyclopaedia of linear algebra. Electron system LINEAL], BKHV, St-Petersburg, Russia.
16. Kofman, A. (1982), *Vvedeniye v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introduction into the theory of fuzzy sets], Translated from French, Radio i svyaz, Moscow, Russia.
17. Van Loan, C.F. and Pitsianis, N. (1993), Approximation with Kronecker products, Eds M.S. Moonen et al., *Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications*, Kluwer Publishers, Dodrecht, the Netherlands.
18. Dompierre, P. (2010), Properties of singular value decomposition matrix computations — CPSC 5006, available at: [www.cs.laurentian.ca/jdompierre/html/CPSC5006E\\_F2010/cours/ch05\\_SVD\\_Properties.pdf](http://www.cs.laurentian.ca/jdompierre/html/CPSC5006E_F2010/cours/ch05_SVD_Properties.pdf)
19. Witten, D.M., Tibshirani, R. and Trevor, H. (2009), A penalized matrix decomposition, with applications to sparse principal components and canonical correlation analysis, *Biostatistics* Vol. 10, no. 3, pp. 515-534.

Поступила 15.02.16;  
после доработки 05.09.16

*МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных, применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.*

*ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, доцент Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.*

*МИНАЕВА Юлия Ивановна, канд. техн. наук, доцент кафедры основ информатики Киевского национального университета строительства и архитектуры, который окончила в 2008 г. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.*