

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЯ ВЕРШИН ГРАФА ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Аннотация. Предложен метод отсечения вершин графа перестановочного многогранника для решения линейных условных оптимизационных задач на перестановках. Введено понятие графа перестановочного многогранника и частичного графа множества перестановок. Приведены численные эксперименты на основе созданной программной реализации алгоритма.

Ключевые слова: множество перестановок, граф перестановочного многогранника, метод отсечения вершин графа, задачи линейной оптимизации на перестановках

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возросла необходимость решения задач евклидовой комбинаторной оптимизации на вершинно расположенных множествах, в частности на множестве перестановок. Такими моделями можно представить задачи из различных сфер человеческой деятельности, например, промышленности, сельскохозяйственного сектора и т.д. [1–5]. Появляются задачи и модели, которые имеют большую размерность, специальную структуру и т.п. Для решения таких задач требуется большой объем вычислений. Это приводит к необходимости разработки новых методов, которые позволят эффективнее решать определенные классы задач оптимизации.

В работах [4, 6–9] рассмотрены методы отсечения для решения задач комбинаторной оптимизации на вершинно расположенных множествах с линейными дополнительными ограничениями, а в работах [10, 11] — с нелинейной целевой функцией и нелинейными дополнительными ограничениями. Алгоритмы этих методов неполиномиальные. В работах [12, 13] приведен подход к решению задач на перестановках, который использует аппарат теории графов.

В работах [5, 14] исследованы свойства евклидового множества перестановок $E_{kv}(G)$ и его выпуклой оболочки $\text{conv } E_{kv}(G)$ — перестановочного многогранника $P_{kv}(G)$. Актуальна разработка методов решения задач комбинаторной линейной оптимизации, более эффективных, чем существующие, за счет учета имеющихся свойств как погруженного [3, 5, 14] в евклидово пространство множества перестановок, так и перестановочного многогранника [5, 14].

В настоящей статье предложен метод отсечения вершин графа многогранника [15], которым для данной задачи является перестановочный многогранник.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

при комбинаторном

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{kv}(G) \quad (2)$$

и дополнительном ограничении

$$x \in X \subset R^k, \quad (3)$$

где $c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k = \{1, 2, \dots, k\}$; $E_{kv}(G)$ — множество перестановок из ν элементов мультимножества $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ (ν — количество элементов основы $S(G) = (e_1, \dots, e_\nu)$) упорядоченного множества различных элементов из G . Если X является многогранным множеством, то (1)–(3) — линейная условная задача евклидовой комбинаторной оптимизации на множестве перестановок, иначе (1)–(3) — нелинейная с линейной целевой функцией условная задача оптимизации на перестановках.

ОТСЕЧЕНИЕ ВЕРШИН ГРАФА ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Приведем некоторые определения из теории комбинаторной оптимизации [5], которые необходимы при дальнейшем рассмотрении алгоритма метода отсечения вершин графа перестановочного многогранника.

Перестановочный многогранник $\Pi_{kv}(G) = \text{conv } E_{kv}(G)$ является выпуклой оболочкой множества перестановок $E_{kv}(G)$, которое совпадает с множеством вершин $\text{vert } \Pi_{kv}(G)$ данного многогранника:

$$E_{kv}(G) = \text{vert conv } E_{kv}(G).$$

Как известно из критерия смежности вершин многогранника $\Pi_{kv}(G)$, вершины $g' = (g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_k})$ и $g'' = (g_{\beta_1}, \dots, g_{\beta_k})$ являются смежными (лежат на одном ребре), если g' и g'' получаются одна из другой перестановкой двух элементов: $e_i, e_{i+1} \quad \forall i \in J_{\nu-1}$, основы $S(G) = (e_1, \dots, e_\nu)$ мультимножества G при условии

$$e_1 \leq \dots \leq e_i \leq e_{i+1} \leq \dots \leq e_\nu. \quad (4)$$

Известно, что решением задачи (1), (2), т.е. безусловной линейной задачи оптимизации на множестве перестановок при выполнении условия упорядочения коэффициентов целевой функции $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$ и элементов множества перестановок $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k$, есть точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ такая, что $x_i^* = g_i \quad \forall i \in J_k$.

Граф, вершинами которого являются вершины многогранника, а ребрами — ребра многогранника, есть 1-скелетом многогранника [15]. Будем называть его графом многогранника. Граф многогранника $\Pi_{kv}(G)$ назовем графом перестановочного многогранника.

В качестве примера на рис. 1 представлен граф перестановочного многогранника (его 1-скелет) $\Pi_{44}(J_4) = \Pi_4$, где $G = J_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

В табл. 1 приведены координаты точек перестановочного многогранника, которые соответствуют вершинам A_1, \dots, A_{24} графа.

Рассмотрим алгоритм метода решения линейной условной задачи (1)–(3).

Алгоритм метода отсечения вершин графа перестановочного многогранника заключается в постепенном их анализе. При этом происходит поэтапный переход между вершинами графа по его ребрам.

Предлагается реализация метода, при которой вычисление проводится не на графе перестановочного многогранника, а с использованием частичного графа множества перестановок.

Введем понятие графа множества перестановок $\Gamma_\Pi = \langle E_{kv}, M \rangle$, где E_{kv} — множество всех перестановок из разных

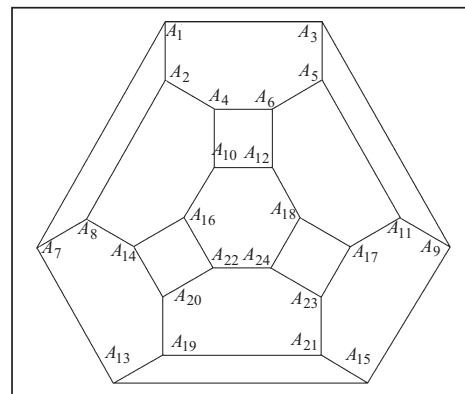


Рис. 1. Граф перестановочного многогранника

Таблица 1

Вершина графа	Координаты вершин P_4	Вершина графа	Координаты вершин P_4	Вершина графа	Координаты вершин P_4
A_1	(1, 2, 3, 4)	A_9	(1, 4, 2, 3)	A_{17}	(3, 4, 1, 2)
A_2	(2, 1, 3, 4)	A_{10}	(4, 1, 2, 3)	A_{18}	(4, 3, 1, 2)
A_3	(1, 3, 2, 4)	A_{11}	(2, 4, 1, 3)	A_{19}	(2, 3, 4, 1)
A_4	(3, 1, 2, 4)	A_{12}	(4, 2, 1, 3)	A_{20}	(3, 2, 4, 1)
A_5	(2, 3, 1, 4)	A_{13}	(1, 3, 4, 2)	A_{21}	(2, 4, 3, 1)
A_6	(3, 2, 1, 4)	A_{14}	(3, 1, 4, 2)	A_{22}	(4, 2, 3, 1)
A_7	(1, 2, 4, 3)	A_{15}	(1, 4, 3, 2)	A_{23}	(3, 4, 2, 1)
A_8	(2, 1, 4, 3)	A_{16}	(4, 1, 3, 2)	A_{24}	(4, 3, 2, 1)

элементов g_1, g_2, \dots, g_k , M — множество ребер графа Γ_P . Граф множества перестановок в отличие от графа перестановочного многогранника имеет в общем случае другое множество ребер.

Частичным графом множества перестановок назовем граф $\Gamma_P = \langle P_k, S \rangle$, где $P_k \subset E_{kn}$, S — множество ребер графа Γ_P .

Использование графа Γ_P в процессе решения задачи позволяет включать в граф и анализировать не все вершины и ребра графа перестановочного многогранника, а постепенно добавлять их к частичному графу множества.

Рассмотрим алгоритм предложенного метода.

Шаг 1. Задаются начальные данные задачи, а именно элементы множества перестановок, коэффициенты линейной целевой функции, дополнительные линейные ограничения.

Шаг 2. Решается безусловная задача линейной оптимизации (1), (2), т.е. получается начальная вершина для дальнейшего процесса решения задачи, которая добавляется к множеству вершин частичного графа вначале пустого множества перестановок.

Шаг 3. Для того чтобы получить следующую вершину решения, к текущей вершине частичного графа множества перестановок добавляются смежные с ней вершины (согласно критерию смежности вершин), а также ребра, связывающие данные вершины с текущей. Среди этих смежных вершин выбирается та, у которой максимальное значение целевой функции. Эта вершина будет следующей вершиной для анализа при решении.

Шаг 4. При переходе по смежным вершинам частичного графа множества перестановок удаляются проанализированные вершины из множества вершин графа. При этом все смежные с ней соединяются ребрами.

Шаг 5. Работа алгоритма продолжается до тех пор, пока не найдется вершина, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (оптимальное решение задачи) или не проанализируются все вершины графа перестановочного многогранника и установится факт неразрешимости задачи.

Рассмотрим алгоритм метода отсечения вершин графа перестановочного многогранника для решения линейной условной задачи (1)–(3) (блок-схема алгоритма приведена на рис. 2).

Шаг 0. Задаются элементы множества перестановок $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ (упорядоченные следующим образом: $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k$), коэффициенты целевой функции c_1, c_2, \dots, c_k и дополнительные линейные ограничения задачи (1)–(3).

Шаг 1. Упорядочиваются коэффициенты целевой функции по неубыванию $c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \dots \leq c_{i_k}$.

Шаг 2. Определяется максимальное значение линейной целевой функции $f(x_{\max}^*)$ задачи (1), (2) без учета дополнительных линейных ограничений $x_{i_1} = g_1, \dots, x_{i_k} = g_k$.

Шаг 3. Устанавливается номер итерации $N = 1$.

Шаг 4. К множеству вершин частичного графа множества перестановок добавляется начальная вершина $x_N = x_1 = x_{\max}^*$.

Шаг 5. Согласно критерию смежности вершин перестановочного многогранника находятся вершины $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,k-1}$, смежные с вершиной x_1 .

Шаг 6. Добавляются вершины $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,k-1}$ к множеству P_k вершин частичного графа Γ_p множества перестановок.

Шаг 7. Соединяется вершина x_1 с каждой смежной с ней вершиной $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,k-1}$ добавлением соответствующих ребер к множеству S графа Γ_p .

Шаг 8. Проверяется, удовлетворяет ли найденная вершина x_N дополнительным линейным ограничениям (3). Если да, то задача имеет оптимальное решение (вершина x_N), иначе переход к шагу 9.

Шаг 9. Определяется номер num этой вершины в множестве вершин частичного графа множества перестановок.

Шаг 10. Проверяется, существуют ли нерассмотренные смежные вершины с вершиной x^{num} графа. Если нет, то исходная задача не имеет решения, работа алгоритма завершена. В ином случае переход к шагу 11.

Шаг 11. Согласно критерию смежности вершин перестановочного многогранника находятся вершины, смежные с текущей $x^{num} : x_1^{num}, x_2^{num}, \dots, x_t^{num}$ (t — количество смежных вершин).

Шаг 12. С каждой вершиной x_j^{num} ($j \in J_t$) выполняются следующие действия:

— устанавливается связь вершины x_j^{num} со всеми другими вершинами $x_i^{num} \forall i \in J_t, i \neq j$, с добавлением соответствующего ребра к множеству ребер S частичного графа Γ_p множества перестановок;

— удаляется из множества ребер S частичного графа Γ_p множества перестановок ребро, соединяющее точку x^{num} с x_j^{num} .

Шаг 13. Среди вершин x_j^{num} ($j \in J_t$) определяется вершина x_{\max}^{num} с максимальным значением целевой функции (1).

Шаг 14. Из множества P_k вершин графа удаляется вершина x^{num} .

Шаг 15. Согласно критерию смежности вершин находятся вершины $x'_1, x'_2, \dots, x'_{k-1}$, смежные с x_{\max}^{num} .

Шаг 16. Проверяются вершины $x'_1, x'_2, \dots, x'_{k-1}$ на принадлежность к множеству вершин P_k графа Γ_p . Если вершина $x'_i \forall i \in J_{k-1}$ отсутствует в множестве, то выполняются следующие действия:

— добавляется вершина x'_i к множеству вершин P_k частичного графа Γ_p множества перестановок;

— добавляется ребро к множеству ребер S графа Γ_p , которое соединяет вершину x'_i с вершиной x_{\max}^{num} ;

— определяются смежные с вершиной x'_i вершины $x''_1, x''_2, \dots, x''_{k-1}$;

— добавляются вершины $x''_1, x''_2, \dots, x''_{k-1}$ к множеству вершин P_k графа Γ_p ;

— к множеству ребер S графа Γ_p добавляются ребра, соединяющие вершину x'_i с вершинами $x''_1, x''_2, \dots, x''_{k-1}$.

Шаг 17. Увеличивается на единицу значение номера итерации $N := N + 1$.

Шаг 18. Осуществляется переход к шагу 8, при этом вершина $x_N = x_{\max}^{num}$ принимается как значение текущего решения.

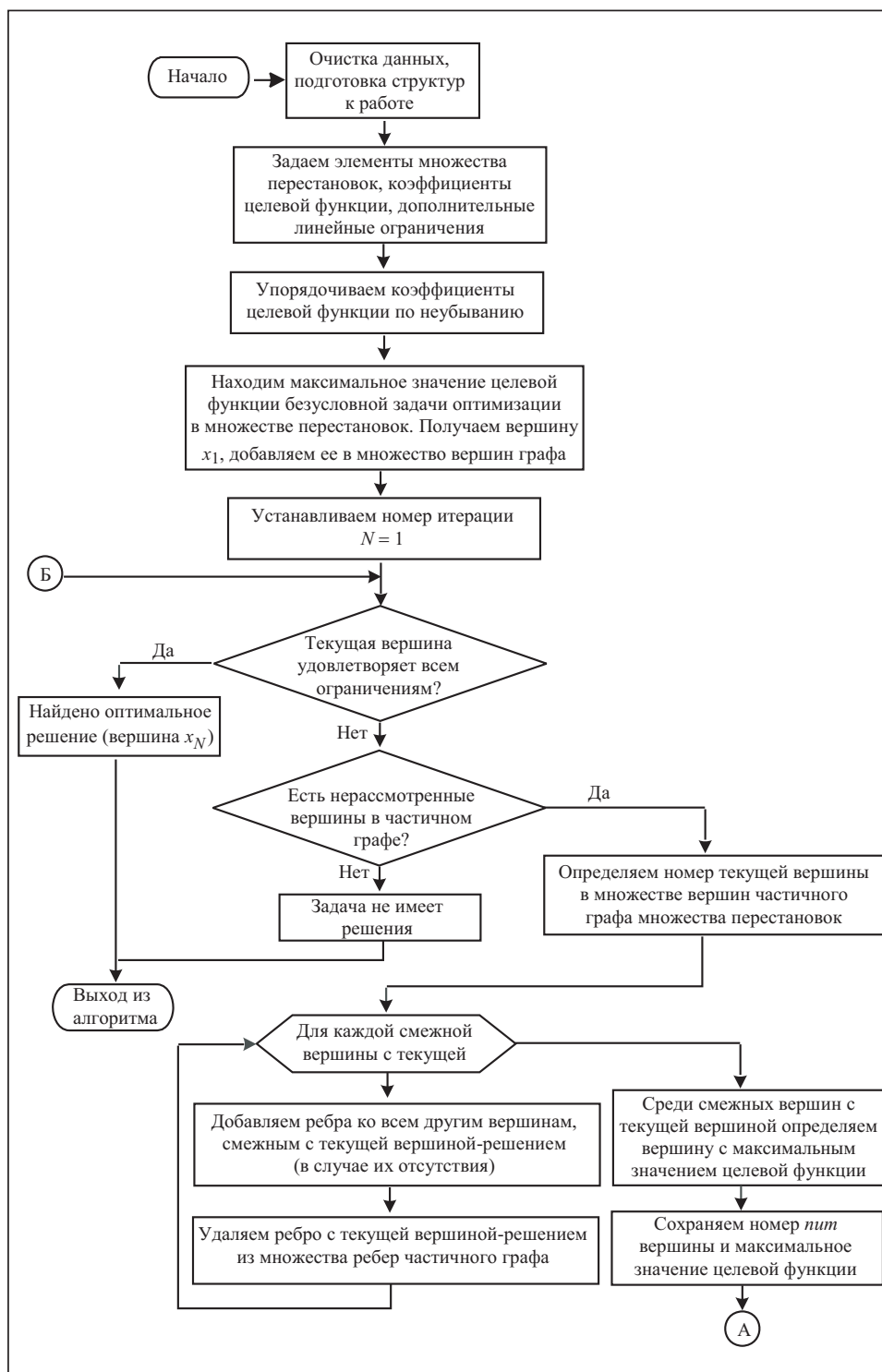


Рис. 2. Блок-схема алгоритма

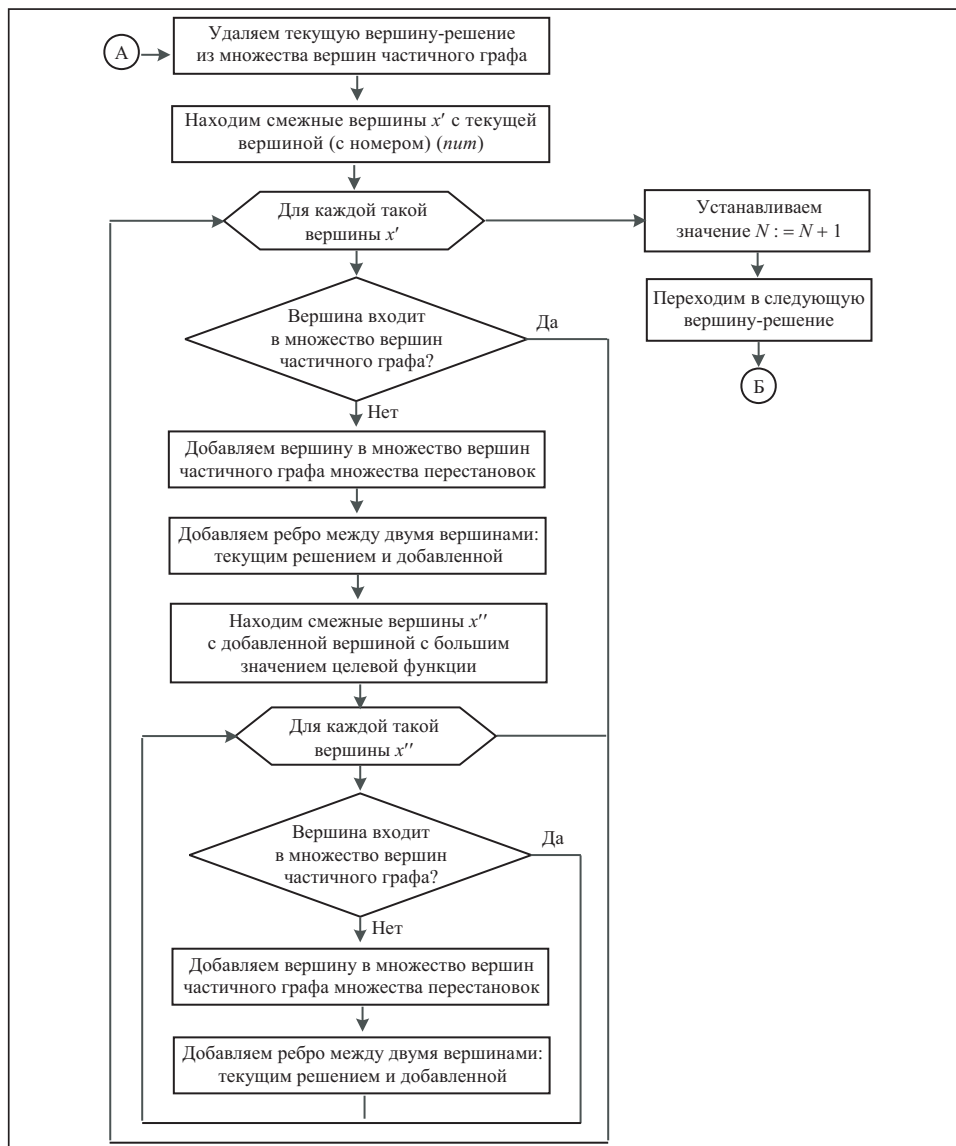


Рис. 2. Блок-схема алгоритма (продолжение)

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Программная реализация предложенного метода осуществлена на языке Object Pascal в среде Delphi и проведена серия численных экспериментов на компьютере с процессором AMD Athlon II с тактовой частотой 2.7 ГГц.

Результаты вычислений приведены в табл. 2, в которой указана размерность задачи (количество элементов N_P в множестве перестановок) и время вычисления (решалось по 10 задач при одном N_P , время вычислений усреднялось по задачам). Для сравнения результатов приведено время вычислений указанных задач с использованием первого метода комбинаторного отсечения [6, 7, 16], в котором вспомогательные задачи линейного программирования решались симплекс-методом. В столбце I приведено время вычисления задачи методом отсечения вершин графа перестановочного многогранника, в столбце II — время вычисления задачи первым методом комбинаторного отсечения. В численных экспериментах ге-

Таблица 2

N_p	Время вычислений задач													
	$\omega = 0,01$		$\omega = 0,02$		$\omega = 0,03$		$\omega = 0,04$		$\omega = 0,05$		$\omega = 0,06$		$\omega = 0,1$	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
5	10 мс	123 мс	8 мс	123 мс	10 мс	121 мс	10 мс	122 мс	8 мс	120 мс	10 мс	262 мс	10 мс	605 мс
6	10 мс	129 мс	7 мс	130 мс	10 мс	130 мс	8 мс	127 мс	11 мс	1,3 с	11 мс	1,24 с	50 мс	720 мс
7	14 мс	146 мс	10 мс	145 мс	15 мс	1,2 с	20 мс	1,2 с	45 мс	155 мс	42 мс	150 мс	1,2 с	152 мс
8	12 мс	207 мс	17 мс	1,02 с	80 мс	222 мс	80 мс	223 мс	332 мс	2,1 с	3,7 с	1,01 с	1,75 мин	4,3 с
9	9 мс	445 мс	34 мс	4,08 с	1,7 с	4,05 с	27,4 с	12,4 с	2,08 мин	450 мс	6,75 мин	10,05 с	58 час 8 мин	*
10	36 мс	1,9 с	450 мс	1,9 с	2,9 мин	2,3 с	1 час 12 мин	*	—	—	—	—	—	—
11	60 мс	15,9 с	52 с	20 с	11 час 57 мин	*	—	—	—	—	—	—	—	—
12	3 с	1,9 мин	10 час 2 мин	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	18,09 мин	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

нерировали линейные условные задачи вида (1)–(3), причем (3) — это система k линейных неравенств, которая содержит неравенство вида $c(x) \leq c_{\max} - \omega(c_{\max} - c_{\min})$, где c_{\max} — максимальное значение целевой функции безусловной задачи (1), (2), c_{\min} — минимальное значение целевой функции безусловной задачи (1), (2), ω — параметр, значение которого задавалось согласно данным табл. 2. В остальных неравенствах коэффициенты генерировались случайным образом как равномерно распределенные числа из интервала $[-100, 100]$.

В табл. 2 знак * обозначает, что вычислительные ресурсы компьютера переполнены, а прочерк — что вычисления не проводились в связи с ограничением на вычислительные ресурсы.

С ростом ω эффективность метода снижается, если решение близко к значению $c_{\max} - \omega(c_{\max} - c_{\min})$. При этом время решения остается приемлемым для решения практических задач.

Вычислительные эксперименты подтвердили работоспособность метода при малых N_p во всем диапазоне изменения ω (до 1). При малых ω метод оказался эффективнее первого метода комбинаторного отсечения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод отсечения вершин графа перестановочного многогранника для условных линейных задач комбинаторной оптимизации на перестановках. В численных экспериментах определена сфера практической эффективности метода. Для дальнейших исследований целесообразно разработать приближенный метод на идеях отсечения вершин графа, который будет иметь полиномиальную оценку времени работы алгоритма при заданной точности по функционалу. Предложенный метод оказался лучше метода отсечений, когда для последнего не хватает вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сергиенко И. В., Каспицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения и исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 260 с.
3. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 266 с.
4. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
5. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
6. Емец О. А. Об одном методе отсечений для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. — 1997. — **33**, вып. 4. — С. 120–129.
7. Ємець О. О., Ємець Є. М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. — 2000. — № 9. — С. 105–109.
8. Емец О. А., Емец Е. М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и матем. методы. — 2001. — **37**. — С. 118–121.
9. Емец О. А., Емец Е. М. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 129–136.
10. Ємець О. О., Чілікіна Т. В. Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування // Динамические системы. — Симферополь: Тавр. нац. ун-т. — 2004. — Вып. 18. — С. 160 — 165.
11. Емец О. А., Емец Е. М., Чиликина Т. В. Комбинаторное отсечение при решении оптимизационных задач на вершинно расположенных множествах // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 3. — С. 86–93.
12. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 50–61.
13. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие системы и машины. — 2009. — № 4. — С. 35–41.
14. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. — К.: УМК ВО, 1992. — 92 с.
15. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука, 1981. — 342 с.
16. Ольховський Д. М., Парфьонова Т. О. Числові експерименти з застосування методу комбінаторного відсікання до транспортної задачі на переставленнях // Інформатика та системні науки: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (Полтава, 18–20 бер. 2010 р.) — Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. — С. 149–151.

Поступила 22.09.2011