УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ЗАМКНУТАЯ ФОРМА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ С ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛЬФЕРА

Аннотация. Введено понятие бипорядковой дробной производной, обобщающей известную производную Хильфера. Приведена формула преобразования Лапласа бипорядковой дробной производной, на основании которой найдено решение задачи типа Коши для уравнения дробного порядка, содержащего указанную производную. Получены замкнутые решения некоторых краевых задач для уравнения аномальной диффузии с бипорядковой дробной производной по временной переменной.

Ключевые слова: аномальная диффузия, дифференциальные уравнения дробного порядка, краевые задачи, дробная производная Хильфера, замкнутые решения.

ВВЕДЕНИЕ

Создание современных информационных технологий для математического моделирования процессов переноса (в частности, применительно к задачам геоинформатики и геоэкологии) требует развития и обобщения классических математических моделей переноса массы и энергии в направлении учета влияния ряда важных аспектов динамики указанных процессов, связанных с их существенной неравновесностью в пространстве и во времени. В связи с этим предложен ряд новых математических моделей теории неравновесных процессов переноса, причем существенный прогресс в изучении особенностей динамики указанных процессов в условиях значительной неравновесности во времени и пространстве достигнут с внедрением моделей, базирующихся на идеях интегро-диффференцирования дробного порядка [1–3], являющегося достаточно адекватным и надежным аппаратом при построении и исследовании соответствующих математических моделей. В частности, на основе дробно-дифференциального подхода построен ряд новых математических моделей динамики неравновесных во времени геофильтрационных процессов в пористых и трещиновато-пористых средах и получены замкнутые решения соответствующих краевых задач теории неравновесной геофильтрации [4]. В рамках указанного подхода в [5–7] построены дробно-дифференциальные математические модели некоторых связанных локально-неравновесных во времени (пространстве) аномальных процессов миграции солевых растворов в изотермическом и неизотермическом случаях и найдены приближенные решения краевых задач, соответствующих рассмотренным моделям.

В настоящей работе вводится понятие бипорядковой дробной производной, обобщающей известную [8–11] производную Хильфера данного порядка некоторого типа. Получена формула преобразования Лапласа указанной бипорядковой производной, найдено решение задачи типа Коши для диффузионного уравнения с обобщенной бипорядковой производной, приведены замкнутые решения некоторых краевых задач для уравнения аномальной диффузии с бипорядковой дробной производной Хильфера.

1. БИПОРЯДКОВАЯ ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Предварительно отметим, что понятие дробной производной Хильфера в настоящее время находит эффективные применения при теоретическом описании ряда релаксационных процессов в физике и механике [8–11].

Пусть $J^{\alpha} f(t)$, $D_t^{(\alpha)} f(t)$ — соответственно дробный интеграл и производная Римана–Лиувилля порядка α ($\mathrm{Re}\alpha > 0$) функции $f(t)$ действительного аргумента [1–3]:

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}},$$

$$D_t^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n J^{n-\alpha} f(t), \; n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1,$$

где $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ — целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера [12].

Производная Хильфера порядка α $(0 < \alpha \le 1)$ типа μ $(0 \le \mu \le 1)$ определяется следующим образом [8–11]:

$$D_t^{\alpha, \mu} f(t) = J^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t). \qquad (1)$$

Очевидно, что дробная производная, определяемая согласно последнему соотношению, является обобщением дробных производных Капуто и Римана–Лиувилля, поскольку

$$D_t^{\alpha,1} f(t) \equiv D_t^{(\alpha)} f(t), \; D_t^{\alpha,0} f(t) \equiv D_t^{\alpha} f(t),$$

где $D_t^{(\alpha)}, D_t^{\alpha}$ — операторы Капуто и Римана–Лиувилля соответственно. Следовательно, производная Хильфера — непрерывная интерполяция по параметру $\mu \in [0, 1]$ операторов Римана–Лиувилля и Капуто одного порядка α. Обобщая понятие производной Хильфера на ситуации, позволяющие моделировать динамику семейств неравновесных процессов на основе интерполяции по параметру μ операторов Римана–Лиувилля и Капуто не только одного порядка α, но также различных порядков производной α, β $(\alpha \ne \beta)$, приходим к понятию бипорядковой дробной производной, которую определим следующим соотношением:

$$D_t^{(\alpha, \beta)\mu} f(t) = J^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \;\; (0 < \alpha, \beta \le 1; \; 0 \le \mu \le 1). \qquad (2)$$

Дробную производную функции $f(t)$, определяемую согласно соотношению (2), в дальнейшем будем называть бипорядковой дробной производной Хильфера порядков α и β типа μ. Поскольку $D_t^{(\alpha, \beta)1} f(t) \equiv D_t^{(\alpha)} f(t)$, $D_t^{(\alpha, \beta)0} f(t) \equiv$ $\equiv D_t^{\beta} f(t)$, бипорядковая дробная производная является непрерывной интерполяцией по параметру $\mu \in [0, 1]$ операторов различных порядков: Римана–Лиувилля D_t^{β} порядка β и Капуто $D_t^{(\alpha)}$ порядка α (в общем случае $\alpha \ne \beta$). Отсюда заключаем, что на основе понятия бипорядковой дробной производной возможно моделирование динамики более широкого класса аномальных процессов переноса, чем на основе общепринятого определения Хильфера, заданного соотношением (1).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА БИПОРЯДКОВОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Представляет интерес формула для изображения по Лапласу бипорядковой дробной производной. Пусть $\overline{L}(f(t))$ — образ Лапласа функции $f(t)$. Тогда с учетом определения (2) и теоремы умножения изображений Э. Бореля получаем

$$\overline{L}(D_t^{(\alpha, \beta)\mu} f(t)) = \overline{L}\left[J^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t)\right] =$$

$$= \overline{L}\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right) = \overline{L}(f_1(t)) \overline{L}(f_2(t)), \qquad (3)$$

где

$$f_1(t) = \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t), \; f_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu(1-\alpha))} \frac{1}{t^{1-\mu(1-\alpha)}}.$$

Поскольку $\overline{L}(f_2(t)) = p^{-\mu(1-\alpha)}$ (p — параметр преобразования Лапласа) и $\overline{L}(f_1(t)) = $ $= p^{1-(1-\mu)(1-\beta)}\overline{L}(f) - J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+)$, с учетом этих соотношений из (3) находим

$$\overline{L}(D_t^{(\alpha,\beta)\mu} f(t)) = p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}\overline{L}(f) - p^{\mu(\alpha-1)} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+), \tag{4}$$

$$(0<\alpha,\beta\le 1;\ 0\le\mu\le 1),$$

где

$$J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+) = \lim_{t\to 0+} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \quad (f(t)\in L(0,+\infty)).$$

Таким образом, формула для преобразования Лапласа бипорядковой дробной производной имеет вид соотношения (4). Отсюда, в частности, при $\alpha=\beta$ получаем известную формулу [8–11] для преобразования Лапласа производной Хильфера $D_t^{\alpha,\mu} f(t)$:

$$\overline{L}(D_t^{\alpha,\mu} f(t)) = p^{\alpha}\overline{L}(f) - p^{\mu(\alpha-1)} J^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(0+).$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С БИПОРЯДКОВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛЬФЕРА

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) + \lambda u(t) = f(t) \quad (0<\alpha,\beta\le 1;\ 0\le\mu\le 1), \tag{5}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$J^{(1-\mu)(1-\beta)} u(0+) = \zeta_0, \tag{6}$$

где $f(t)$ — заданная функция источника ($f\in L(0,+\infty)$), $\lambda, \zeta_0 = \mathrm{const}$. Поскольку при $\alpha=\beta=1$ задача (5), (6) представляет собой задачу Коши, то по аналогии будем называть задачу (5), (6) при $\alpha,\beta\ne 1$ задачей типа Коши.

Применяя к (5) преобразование Лапласа, с учетом соотношений (4), (6) получаем

$$\overline{L}(u) = \zeta_0 \frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda} + \frac{\overline{L}(f)}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda}, \tag{7}$$

где $\overline{L}(u), \overline{L}(f)$ — изображения по Лапласу функций u и f соответственно.

На основании равенства [2]

$$\overline{L}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})) = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-\lambda} \quad (\mathrm{Re}\, p > |\lambda|^{1/\alpha})$$

($E_{\alpha,\beta}(z)$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера [2, 3]) имеем

$$\overline{L}^{-1}\left(\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda}\right) = t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\beta+\mu(\alpha-\beta),\,\mu+\beta(1-\mu)}(-\lambda t^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}), \tag{8}$$

$$\overline{L}^{-1}\left(\frac{\overline{L}(f)}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda}\right) =$$

$$= \int_0^t (t-\tau)^{\beta+\mu(\alpha-1)-1} E_{\beta+\mu(\alpha-\beta),\beta+\mu(\alpha-\beta)}(-\lambda(t-\tau)^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}) f(\tau)d\tau, \tag{9}$$

где $\overline{L}^{-1}$ — оператор обратного преобразования Лапласа. С учетом (8), (9) из (7) получаем

$$u(t) = \zeta_0 t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\lambda t^{\gamma}) + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(t-\tau)^{\gamma}) f(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $\gamma = \beta+\mu(\alpha-\beta)$, $0<\alpha,\beta\le 1; 0\le\mu\le 1$, $f(t)\in L(0,+\infty)$.

Таким образом, задача типа Коши (5), (6) для уравнения с бипорядковой дробной производной имеет решение (10), при условии, что интеграл в правой части этой формулы существует и сходится.

Отметим, что из соотношения (10) при $\alpha=\beta$ получаем решение соответствующей задачи типа Коши для уравнения вида (5) с производной Хильфера порядка α типа μ $(D_t^{\alpha,\mu}u(t))$, приведенное в [8, 9]:

$$u(t)=\zeta_0 t^{(1-\mu)(\alpha-1)}E_{\alpha,\alpha+\mu(1-\alpha)}(-\lambda t^{\alpha})+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})f(\tau)d\tau.$$

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С БИПОРЯДКОВОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим следующую краевую задачу: в области $D_T=(0,l)\times(0,T)$ найти решение уравнения

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}u(x,t)=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{11}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(l,t)=\varphi_2(t),\ (0\le t\le T), \tag{12}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}u(x,0+)=\zeta_0(x)\ \ (0\le x\le l), \tag{13}$$

где $\kappa=\mathrm{const}>0$ и функции $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C[0,T]$, $\zeta_0(x)\in C[0,l]$, $f(x,t)\in C(\overline{D}_T)$ заданы.

Решение поставленной задачи можно получить согласно такому алгоритму.

Сначала перейдем к соответствующей задаче с однородными граничными условиями с помощью подстановки

$$U(x,t)=u(x,t)-\upsilon(x,t), \tag{14}$$

где $\upsilon(x,t)=\varphi_1(t)+\frac{x}{l}(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))$. Тогда для определения неизвестной функции $U(x,t)$ получаем задачу

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}U(x,t)=\kappa\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}+\widetilde{f}(x,t)\ \ ((x,t)\in D_T), \tag{15}$$

$$U(0,t)=0,\ U(l,t)=0\ \ (0\le t\le T), \tag{16}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}U(x,0+)=\widetilde{\zeta}_0(x)\ \ (0\le x\le l), \tag{17}$$

где $\widetilde{f}(x,t)=f(x,t)-D_t^{(\alpha,\beta)\mu}\upsilon(x,t)$, $\widetilde{\zeta}_0(x)=\sigma_0(x)-J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}\upsilon(x,0+)$. Применяя к (15)–(17) конечное синус-преобразование Фурье по переменной x вида [13]

$$\overline{U}_n(t)=\int_0^l U(x,t)\sin(\lambda_n x)dx\ \left(\lambda_n=\frac{n\pi}{l}\right),$$

получаем следующую задачу типа Коши для уравнения с бипорядковой дробной производной:

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}\overline{U}(t)+\kappa\lambda_n^2\overline{U}(t)=\bar{f}_n(t), \tag{18}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}\overline{U}(0+)=\eta_n, \tag{19}$$

где

$$\bar{f}_n(t)=\int_0^l \widetilde{f}(x,t)\sin(\lambda_n x)dx,\ \eta_n=\int_0^l \widetilde{\zeta}_0(x)\sin(\lambda_n x)dx.$$

Решение задачи (18), (19) приведено в разд. 3. С учетом соотношений (10), (14), возвращаясь в область оригиналов по геометрической переменной, находим решение задачи (11)–(13):

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+\frac{2}{l}t^{(1-\mu)(\beta-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\gamma})\sin(\lambda_n x)+$$
$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)\sin(\lambda_n x), \tag{20}$$

где
$$\Phi_n(t)=\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\kappa\lambda_n^2(t-\tau)^{\gamma})\bar{f}_n(\tau)d\tau. \quad (21)$$

В частности, при отсутствии диффузионных источников ($f\equiv 0$) и однородных граничных условиях ($\varphi_1=\varphi_2\equiv 0$) решение задачи (11)–(13) имеет вид
$$u(x,t)=\frac{2}{l}t^{(1-\mu)(\beta-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\gamma})\sin(\lambda_n x), \quad (22)$$
где $\eta_n=\int_0^l \zeta_0(x)\sin(\lambda_n x)dx$.

Учитывая известное асимптотическое поведение функции Миттаг–Леффлера при $t\to\infty$ [2, 3]
$$E_{\gamma,\delta}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\gamma})\sim\frac{1}{\kappa\lambda_n^2\Gamma(\delta-\gamma)}t^{-\gamma}\quad(0<\gamma<1,\ 0<\delta<1),$$
из (22) получаем, что для всех $t\ge\bar{t}>0$, $0\le x\le l$ имеет место неравенство
$$|u(x,t)|\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\eta_n|}{\lambda_n^2}\quad(C_1=\mathrm{const}>0).$$
Если выполнены условия $\zeta_0(0)=\zeta_0(l)=0$ и $\zeta_0(x)$ — непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную на отрезке $[0, l]$, то для ряда из коэффициентов Фурье функции $\zeta_0(x)$ имеет место соотношение $\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty$ [14].

Тогда
$$|u(x,t)|\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\eta_n|}{\lambda_n^2}<\infty,\quad |u_{xx}(x,t)|\le C_2\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty,$$
$$|D_t^{(\alpha,\beta)\mu}u|\le C_3\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty\quad(C_2, C_3=\mathrm{const}>0). \quad (23)$$
Следовательно, ряд Фурье в соотношении (22) сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{D}_T$ и $u(x,t)\in C(\bar{D}_T)$. Аналогично с учетом (23) получаем, что $u_{xx}\in C(\bar{D}_T)$ и $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}u\in C(\bar{D}_T)$.

Таким образом, решение задачи (11)–(13) при отсутствии источников существует, единственно и представляется в виде ряда (22). Аналогичный вывод имеет место и в общем случае наличия источников ($f\ne 0$). Отметим, что решение (20), (21) краевой задачи (11)–(13) может быть представлено также в виде
$$u(x,t)=v(x,t)+\int_0^l\tilde{\zeta}_0(\xi)F(x,\xi;t)d\xi+\int_0^t\int_0^l\tilde{f}(\xi,\tau)G(x,\xi;t-\tau)d\tau d\xi,$$
где
$$F(x,\xi;t)=\frac{2}{l}t^{(1-\mu)(\beta-1)}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\gamma})\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi),$$
$$G(x,\xi;t)=\frac{2}{l}t^{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}E_{\gamma,\gamma}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\gamma})\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi).$$

Отсюда, в частности, получаем следующие решения.

1. Решение соответствующей краевой задачи для диффузионного уравнения с производной Римана–Лиувилля порядка β (при $\mu=0$):
$$u(x,t)=v(x,t)+\int_0^l\tilde{\zeta}_0(\xi)F_1(x,\xi;t)d\xi+\int_0^t\int_0^l\tilde{f}(\xi,\tau)F_1(x,\xi;t-\tau)d\tau d\xi,$$

где

$$F_1(x, \xi; t) = \frac{2}{l} t^{\beta-1} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\beta, \beta}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\beta}) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi),$$

$$\widetilde{f}(x, t) = f(x, t) - D_t^{\beta} \upsilon(x, t), \ \widetilde{\zeta}_0(x) = \zeta_0(x) - J_t^{1-\beta} \upsilon(x, 0+).$$

2. Решение задачи в производных Капуто порядка α (при $\mu = 1$):

$$u(x, t) = \upsilon(x, t) + \int_0^l \widetilde{\zeta}_0(\xi) F_2(x, \xi; t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \widetilde{f}(\xi, \tau) G_2(x, \xi; t-\tau) d\tau d\xi,$$

где

$$F_2(x, \xi; t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\alpha}) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi),$$

$$G_2(x, \xi; t) = \frac{2}{l} t^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha, \alpha}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\alpha}) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi),$$

$$\widetilde{f}(x, t) = f(x, t) - D_t^{(\alpha)} \upsilon(x, t), \ \widetilde{\zeta}_0(x) = \zeta_0(x) - \upsilon(x, 0).$$

3. Решение соответствующей краевой задачи для диффузионного уравнения с производной Хильфера порядка α, полученное в [9] (при $\beta = \alpha$):

$$u(x, t) = \upsilon(x, t) + \int_0^l \widetilde{\zeta}_0(\xi) F_3(x, \xi; t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \widetilde{f}(\xi, \tau) G_3(x, \xi; t-\tau) d\tau d\xi,$$

где

$$F_3(x, \xi; t) = \frac{2}{l} t^{(1-\mu)(\alpha-1)} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha, \alpha+\mu(1-\alpha)}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\alpha}) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi),$$

$$G_3(x, \xi; t) = \frac{2}{l} t^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha, \alpha}(-\kappa\lambda_n^2 t^{\alpha}) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi),$$

$$\widetilde{f}(x, t) = f(x, t) - D_t^{\alpha, \mu} \upsilon(x, t), \ \widetilde{\zeta}_0(x) = \zeta_0(x) - J_t^{(1-\mu)(1-\alpha)} \upsilon(x, 0+).$$

5. ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННЫМ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим задачу определения в области $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times (0, \infty)$ функции поля (концентраций, температур и т.д.) $u(x, t)$ из обобщенного уравнения аномальной диффузии:

$$D_t^{(\alpha, \beta)\mu} u(x, t) = \kappa \frac{\partial^{\nu}}{\partial |x|^{\nu}} u(x, t) + f(x, t) \tag{24}$$

с граничными условиями

$$u(\pm\infty, t) = 0 \ \ (t \geq 0), \tag{25}$$

и начальным условием

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)} u(x, 0+) = \zeta_0(x) \ \ (-\infty < x < +\infty). \tag{26}$$

Здесь $D_t^{(\alpha, \beta)\mu}$ — оператор бипорядковой дробной производной Хильфера, $\dfrac{\partial^{\nu}}{\partial |x|^{\nu}}$ — оператор Рисса [15] пространственной дробной производной по переменной x порядка ν $(1 < \nu \leq 2)$.

Пусть интегральное преобразование Фурье функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, +\infty)$ определено соотношением

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{i\xi x} dx. \tag{27}$$

Применяя к задаче (24)–(26) преобразование (27), с учетом соотношения для

Фурье-образа производной Рисса вида [15]

$$\widehat{\frac{\partial^{\nu} f(x)}{\partial |x|^{\nu}}} = -|\xi|^{\nu} \hat{f}(\xi)$$

получаем задачу типа Коши:

$$D_t^{(\alpha, \beta)\mu} \hat{u}(\xi, t) - \kappa |\xi|^{\nu} \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), \tag{28}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)} \hat{u}(\xi, 0+) = \hat{g}(\xi), \tag{29}$$

где

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_0(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \;\; \hat{f}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{i\xi x} dx, \;\; \hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{i\xi x} dx. \tag{30}$$

Запишем решение задачи (28), (29) на основании (10):

$$\begin{gathered} \hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma, \gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa |\xi|^{\nu} t^{\gamma}) + \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\kappa |\xi|^{\nu} (t-\tau)^{\gamma}) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \end{gathered} \tag{31}$$

Возвращаясь в (31) к оригиналам по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемой задачи:

$$\begin{gathered} u(x, t) = \frac{1}{2\pi} t^{(1-\mu)(\beta-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\gamma, \gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa |\xi|^{\nu} t^{\gamma}) \hat{g}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\kappa |\xi|^{\nu} (t-\tau)^{\gamma}) \hat{f}(\xi, \tau) e^{-i\xi x} d\tau d\xi, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\hat{g}$ и $\hat{f}$ представлены соотношениями (30).

При $\alpha = \beta = 1$, $\nu = 2$ имеем $D_t^{(\alpha, \beta)\mu} = \dfrac{d}{dt}$, $\dfrac{\partial^{\nu}}{\partial |x\, t|^{\nu}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Соотношение (32) в этом случае дает решение задачи в рамках классической математической модели [16]:

$$\begin{gathered} u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0(\eta) \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa t} \right) d\eta + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\eta, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right) d\tau d\eta. \end{gathered}$$

При $f \equiv 0$ и $\zeta_0(x) = \delta(x)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [14]) из соотношения (32) находим

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} t^{(1-\mu)(\beta-1)} \int_0^{+\infty} E_{\gamma, \gamma+\mu(1-\alpha)}(-\kappa |\xi|^{\nu} t^{\gamma}) \cos(\xi x) d\xi.$$

Наконец, при $\alpha = \beta$ ($f \equiv 0$) из соотношения (32) следует решение соответствующей краевой задачи для диффузионного уравнения с производной Хильфера $D_t^{\alpha, \mu} u$, полученное в [11]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} t^{(1-\mu)(\beta-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha+\mu(1-\alpha)}(-\kappa |\xi|^{\nu} t^{\alpha}) \hat{g}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается бипорядковая дробная производная, обобщающая известную производную Хильфера. Получена формула преобразования Лапласа бипорядковой дробной производной, на основании которой найдено решение задачи типа Коши для уравнения с обобщенной производной Хильфера. Получены замкнутые решения некоторых краевых задач для уравнений аномальной диффузии с бипорядковой дробной производной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien: Springer Verlag, 1997. — P. 223–276.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
3. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Acad. Press, 1999. — 341 p.
4. Булавацкий В.М. Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и інформатики». — 2011. — № 3. — С. 128–137.
5. Булавацкий В.М. Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Там же. — 2011. — № 6. — С. 76–83.
6. Bulavatsky V.M. Nonclassical mathematical model in geoinformatics to solve dynamic problems for nonequilibrium nonisothermal seepage fields // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — **47**, N 6. — P. 899–906.
7. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality // Ibid. — 2012. — **48**, N 4. — P. 539–546.
8. Hilfer R. Fractional time evolution // Applications of fractional calculus in physics / Ed. R. Hilfer. — Singapore: World Sci., 2000. — P. 87–130.
9. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative // Physics A. — 2011. — **44**. — P. 5–52.
10. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // Fract. Calcul. and Appl. Analysis. — 2009. — **12**, N 3. — P. 299–318.
11. Tomovski Z., Sandev T., Metzler R., Dubbeldam J. Generalized space-time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative // Physica A. — 2012. — **391**. — P. 2527–2542.
12. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. — New York: Dover, 1965. — 831 p.
13. Sneddon I. The use of integral transform. — New York: Mc Graw-Hill Book Comp., 1973. — 539 p.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 259 с.
15. Gorenflo R., Mainardi F. Random walks models for space-fractional diffusion processes // Fract. Calcul. and its Appl. — 1999. — **18**, N 2. — P. 231–246.
16. Карташов Э.И. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 1979. — 415 с.

Поступила 14.05.2013