СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

Н.Ю. КУЗНЕЦОВ, А.А. ШУМСКАЯ, О.Н. ХОМЯК

УДК 519.873

УСКОРЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ОТКАЗА $s-t$-СЕТИ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Аннотация. Рассмотрена $s-t$-сеть с высоконадежными ребрами с восстановлением и с переменными внешними нагрузками. Предложен метод ускоренного моделирования вероятности функциональной отказа, когда располагаемая мощность сети становится меньше требуемой. Найдены условия, гарантирующие ограниченность относительной погрешности оценки с ростом надежности ребер. Численный пример иллюстрирует эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: $s-t$-сеть, функциональный отказ, минимальные сечения, метод ускоренного моделирования, дисперсия оценки, относительная среднеквадратическая погрешность.

Обеспечение надежного функционирования распределительных систем с сетевой структурой имеет ключевое значение не только с точки зрения потребителя, но и для экологии, которой наносится значительный ущерб при возникновении аварийных ситуаций. Существенное внимание уделяется созданию современных быстродействующих и высокоточных методов расчета показателей надежности сетей. В большинстве исследований (см., например, [1, 2]) элементы сетей предполагаются невосстанавливаемыми, что существенно упрощает задачу, но не всегда соответствует практике. Предположение об экспоненциальности как времени восстановления, так и времени безотказной работы элемента часто не оправдано и не подтверждается статистическими данными. Более того, от системы иногда требуется переменная эффективность работы, определяемая случайными факторами (например, погодными явлениями). При этом отказом считается понижение уровня эффективности сети ниже требуемого уровня. Все указанные особенности учтены в модели сети, рассматриваемой в настоящей статье.

В последние годы существенное внимание уделяется созданию новых эффективных методов ускоренного моделирования. Это специальные методы моделирования, направленные на уменьшение дисперсии оценки при сохранении ее несмещенности. Потребность в разработке таких методов возникла благодаря основному недостатку стандартного метода Монте-Карло — неограниченно возрастающему времени моделирования при увеличении надежности системы. Были предложены различные методы, направленные на уменьшение дисперсии оценок. Не имея возможности подробно описать особенности каждого метода, отметим лишь основные направления исследований: метод существенной выборки [3–5], аналитико-статистический метод [6–10], метод многоуровневого расщепления [11] и ряд других. Обзоры методов ускоренного моделирования вероятностей редких событий см. в [12–14].

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работах [15, 16]. Общая идея ускоренного моделирования надежности немарковских систем [8] используется для создания эффективного метода расчета надежности сети с высоконадежными восстанавливаемыми ребрами и переменной внешней нагрузкой. Данный метод позволяет получать несмещенные оценки. Найдены условия, гарантирующие ограниченность относительной среднеквадратической погрешности оценок с возрастанием надежности ребер. Численный пример иллюстрирует высокую эффективность ускоренного моделирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сеть, структуру которой задает граф $G=[V, E]$, где V — конечное множество вершин, а E — множество ребер: $e=\langle v, w\rangle \in E$, $v, w \in V$. Каждое ребро может быть как ориентированным, так и неориентированным. Это свойство задает функция $h: E \to \{0,1\}$, $h(e)=1$, если ребро $e=\langle v, w\rangle$ является ориентированным, и $h(e)=0$, если неориентированным. Последовательность ребер $\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \ldots, \langle v_{n-1}, v_n\rangle$, обладающих свойством $\langle v_{i-1}, v_i\rangle \in E$ или $\langle v_i, v_{i-1}\rangle \in E$, $h(v_i, v_{i-1})=0$, $i=2, \ldots, n$, называется путем, ведущим из v_1 в v_n.

Сеть содержит две выделенные вершины, имеющие стандартные обозначения: s (source) и t (terminal). Данную сеть будем рассматривать как продуктопровод, задача которого — бесперебойное снабжение потребителя t некоторым товаром (газ, нефть, энергия и т.п.), поступающим от источника s. Предполагается, что для любой вершины $v \neq s$, $v \neq t$ существует путь, ведущий из s в t и проходящий через v. Вершины сети считаются абсолютно надежными и отказать не могут. В то же время могут отказать ребра. Задаются функции распределения (ф.р.) $F_e(x)$ и $G_e(x)$ времени безотказной работы и восстановления ребра e соответственно. Функции $\{F_e(x)\}$ предполагаются абсолютно непрерывными, т.е. существуют плотности $\{f_e(x)\}$. Восстановление начинается непосредственно в момент отказа ребра. Каждое ребро e характеризуется некоторой производительностью c_e. При его отказе производительность сети может упасть.

Множество ребер $e_1, \ldots, e_r$ называется сечением, если их одновременная неисправность влечет полный отказ сети (не существует пути из s в t). Сечение называется минимальным, если ни одно ребро нельзя из него удалить так, чтобы при этом сеть оставалась в состоянии отказа. Сеть можно рассматривать как последовательно-параллельное соединение дуг (параллельно соединяются дуги, входящие в одно и то же сечение). Поэтому если $C_1, \ldots, C_n$ — набор сечений, то производительность сети в момент t определяется по формуле

$$\Phi(\bar{\nu}(t)) = \min_{1 \le i \le n} \sum_{e \in C_i} c_j [1-\nu_e(t)], \tag{1}$$

где $\bar{\nu}(t)=(\nu_e(t), e \in E)$, $\nu_e(t)=0$, если ребро e находится в рабочем состоянии в момент t, и $\nu_e(t)=1$, если ребро находится на восстановлении.

В каждый момент времени от системы требуется определенный уровень производительности. Если в некоторый момент уровень требуемой производительности становится выше имеющейся в наличии, то наступает отказ, называемый функциональным [17]. А именно, вводится полумарковский процесс (ПМП) $\eta(t)$, $t \ge 0$, имеющий конечное множество состояний $I=\{1, \ldots, N\}$ и задаваемый вероятностями $\{p_{ij}\}$ перехода вложенной цепи Маркова и условными ф.р. $\{H_{ij}(x)\}$ времени между переходами. Функции $\{H_{ij}(x)\}$ предполагаются абсолютно непрерывными, т.е. имеются плотности $\{h_{ij}(x)\}$. Предполагается, что все состояния образуют один класс существенных состояний, причем $\eta(0)=1$ с вероятностью единица. Если $\eta(t)=i$, то уровень требуемой производительности равен $\Psi(i)$, т.е. случайный процесс $\Psi(\eta(t))$ задает производительность, требуемую от системы в момент t. Предполагается, что $\Psi(i)$ — монотонно возрастающая функция, $\Psi(1)>0$. Система функционирует в штатном режиме, если $\Phi(\overline{\nu}(t))\ge\Psi(\eta(t))$. Момент τ ее отказа определяется следующим образом: $\tau=\inf\{t:\Phi(\overline{\nu}(t))<\Psi(\eta(t))\}$. Цель исследования — разработка метода ускоренного моделирования, позволяющего с высокой точностью оценивать вероятность $Q(T)=\mathbf{P}\{\tau<T\}$ функционального отказа системы в заданном промежутке $[0,T]$.

Как следует из формулы (1), для эффективного использования ускоренного моделирования необходимо располагать множеством $C_1, \ldots, C_n$ минимальных сечений ребер. Предложено несколько эффективных алгоритмов, позволяющих находить минимальные сечения (см., например, [18–21]). Все они основаны на достаточно простой идее и отличаются лишь техникой реализации. Пусть A — некоторое произвольное подмножество вершин, $s\in A$, $t\notin A$, причем для любого $v\in A$, $v\ne s$, существует путь из s в v, проходящий только по вершинам из множества A. Замыканием $\widehat{A}$ множества A назовем минимальную (по числу входящих в $\widehat{A}$ вершин) совокупность вершин, обладающую свойствами: а) $A\subseteq\widehat{A}$; б) для любого $v\in\widehat{A}$, $v\ne s$, существует путь из s в v, проходящий только по вершинам из множества $\widehat{A}$; в) для любого $w\in V\setminus\widehat{A}$, $w\ne t$, существует путь из w в t, проходящий только по вершинам из множества $V\setminus\widehat{A}$. Очевидно, что каждому множеству A соответствует единственное замыкание $\widehat{A}$. Это вытекает из простого алгоритма построения замыкания $\widehat{A}$. А именно, выбирая t в качестве начальной вершины, идем в направлении, противоположном ориентации графа, и с запретом попадания в вершины множества A. Пусть B — множество вершин, которые удалось пройти. Тогда $\widehat{A}=V\setminus B$.

Обозначим $C=\{\langle v,w\rangle\in E: v\in\widehat{A}, w\in V\setminus\widehat{A}\}\bigcup\{\langle w,v\rangle\in E: h(w,v)=0, v\in\widehat{A}, w\in V\setminus\widehat{A}\}$ множество ребер, соединяющих вершины из множеств $\widehat{A}$ и $V\setminus\widehat{A}$. Очевидно, что C — минимальное сечение. Более того, различные множества A генерируют различные сечения C. Поэтому проблема нахождения всех минимальных сечений сводится к нахождению всех множеств A, обладающих указанными свойствами. Соответствующий алгоритм см. в [22].

Понятие замыкания $\widehat{A}$ множества A удобно проиллюстрировать на примере сети (рис. 1), рассмотренной в [18].

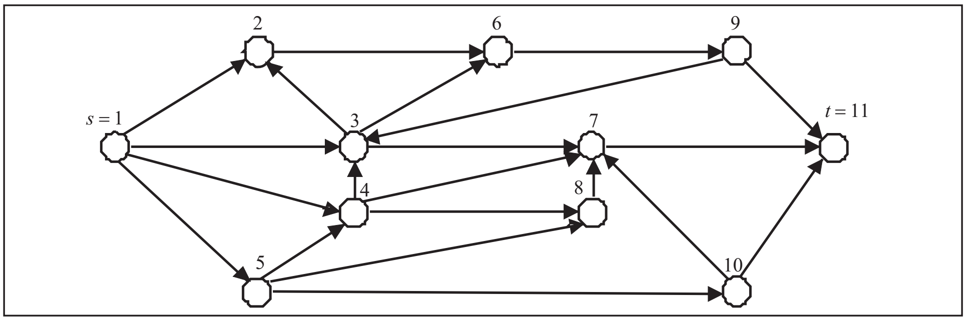

Рис. 1

В качестве A выберем множество вершин $A=\{1,3,9\}$. Тогда $\widehat{A}=\{1,2,3,6,9\}$ и соответствующим минимальным сечением является $C=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 9,11\rangle\}$. Отметим, что общее количество минимальных сечений составляет 110.

АЛГОРИТМ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ $Q(T)$

Введем непрерывный справа марковский процесс, описывающий как поведение сети с точки зрения ее надежности, так и поведение ПМП:

$$\zeta(t)=(\overline{\nu}(t),\overline{\gamma}(t);\eta(t),\theta(t))=(\nu_e(t),\gamma_e(t), e\in E;\eta(t),\theta(t)),\ \ t\ge 0,$$

с начальным состоянием $\nu_e(0)=0, \gamma_e(0)=0, e\in E, \eta(0)=1, \theta(0)=0$, где $\gamma_e(t)= = \sup\{z: \nu_e(u)=\nu_e(t)$ для любого $u\in(t-z, t)\}$ — непрерывное время пребывания ребра e в состоянии $\nu_e(t)$ к моменту t, $\theta(t)$ — время, прошедшее с предыдущего момента изменения состояния ПМП $\eta(t)$.

Функциональный отказ сети наступает, когда производительность сети опускается ниже уровня, задаваемого процессом $\eta(t)$. Условия отказа будут полностью определены, если для каждого $j\in I$ указать наборы ребер, одновременная неисправность которых приводит к понижению эффективности сети ниже уровня $\Psi(j)$. Данные наборы легко получить, используя формулу (1). Если их минимизировать, то для каждого $j\in I$ получим множество минимальных отказовых сечений $M^{(j)}=\{(r^{(j)}; s_1^{(j)},\dots, s_{r^{(j)}}^{(j)})\}$, где $r^{(j)}$ — количество элементов в сечении, а $s_1^{(j)},\dots, s_{r^{(j)}}^{(j)}$ — их номера. Поскольку число состояний N, как правило, весьма незначительно, то нахождение сечений не является трудоемкой процедурой.

Пусть $\tau^{(k)}, k\ge 0,$ — последовательность моментов времени, когда либо одно из ребер меняет свое состояние (отказ или окончание восстановления), либо ПМП меняет свое состояние. Пусть $\zeta^{(k)}=\zeta(\tau^{(k)})=(\overline{\nu}^{(k)}, \overline{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})= =(\nu_e^{(k)}, \gamma_e^{(k)}, e\in E; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$ — состояние марковского процесса в момент $\tau^{(k)}$. Начальное состояние процесса в момент $\tau^{(0)}=0$ задает вектор $\zeta^{(0)}=\zeta(\tau^{(0)})= =(\nu_e^{(0)}=0, \gamma_e^{(0)}=0, e\in E; \eta^{(0)}=1, \theta^{(0)}=0)$. Вероятность $Q(T)$ отказа сети вычисляется по формуле

$$Q(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau^{(n)}<T, (\overline{\nu}^{(1)}, \eta^{(1)})\notin U,\dots,(\overline{\nu}^{(n-1)}, \eta^{(n-1)})\notin U, (\overline{\nu}^{(n)}, \eta^{(n)})\in U\}, \quad (2)$$

где $U=\{(\overline{\nu}, j): \Phi(\overline{\nu})<\Psi(j)\}$. Траектория процесса $\zeta(t), t\ge 0$, обрывающаяся в момент отказа сети, однозначно определяется случайной последовательностью

$$\chi=\{(\tau^{(1)}, \overline{\nu}^{(1)}, \eta^{(1)}, m^{(1)}),\dots,(\tau^{(\pi-1)}, \overline{\nu}^{(\pi-1)}, \eta^{(\pi-1)}, m^{(\pi-1)}), (\tau^{(\pi)}, \overline{\nu}^{(\pi)}, \eta^{(\pi)}, m^{(\pi)})\},$$

где $\{\tau^{(k)}\}, \{\overline{\nu}^{(k)}\}$ и $\{\eta^{(k)}\}$ — моменты изменения и соответствующие состояния дискретных компонент $\overline{\nu}(t)$ и $\eta(t)$, $(\overline{\nu}^{(1)}, \eta^{(1)})\notin U,\dots,(\overline{\nu}^{(\pi-1)}, \eta^{(\pi-1)})\notin U$, $(\overline{\nu}^{(\pi)}, \eta^{(\pi)})\in U$, а $m^{(k)}\in E\bigcup I$ (если $m^{(k)}\in E$, то изменение состояния вызвано отказом или окончанием восстановления ребра; если же $m^{(k)}\in I$ — то переходом ПМП). Заметим, что последовательности $\{\overline{\nu}^{(k)}\}$ и $\{\eta^{(k)}\}$ однозначно определяются по $\{m^{(k)}\}$. Обозначим $\Pi^{(k)}=\{(\tau^{(1)}, m^{(1)}),\dots,(\tau^{(k)}, m^{(k)})\}$. В силу сказанного выше состояние $\zeta^{(k)}=(\overline{\nu}^{(k)}, \overline{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$ однозначно определяется подпоследовательностью $\Pi^{(k)}$. Обозначим $D(x, m; \Pi^{(k)})=\mathbf{P}\{\tau^{(k+1)}-\tau^{(k)}<x, m^{(k+1)}=m\,|\,\Pi^{(k)}\}$ совместное распределение двумерной случайной величины $(\tau^{(k+1)}-\tau^{(k)}, m^{(k+1)})$, принимающей значения в $(0,\infty)\times(E\bigcup I)$. Формулу (2) можно переписать в виде

$$Q(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1\in E\cup I:\ (\overline{\nu}^{(1)}, \eta^{(1)})\notin U}\int_0^T D(dt_1, m_1; \zeta^{(0)})\dots$$

$$\dots\sum_{m_{n-1}\in E\bigcup I:\ (\overline{\nu}^{(n-1)}, \eta^{(n-1)})\notin U}\ \int_0^{T-t_1-\dots-t_{n-2}} D(dt_{n-1}, m_{n-1}; \Pi^{(n-2)})\times$$

$$\times\sum_{m_n\in E\cup I:\ (\overline{\nu}^{(n)}, \eta^{(n)})\in U}\ \int_0^{T-t_1-\dots-t_{n-1}} D(dt_n, m_n; \Pi^{(n-1)}). \quad (3)$$

При фиксированной подпоследовательности $\Pi^{(k)}$ (а значит, и известном состоянии $\zeta^{(k)}=(\bar{\nu}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$) обозначим

$$d\Phi(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) = \prod_{r:\nu_r^{(k)}=0} \frac{dF_r(\gamma_r^{(k)}+u_r)}{1-F_r(\gamma_r^{(k)})} \times$$

$$\times \prod_{r:\nu_r^{(k)}=1} \frac{dG_r(\gamma_r^{(k)}+u_r)}{1-G_r(\gamma_r^{(k)})} \frac{\sum\limits_{l\neq\eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)}l}\, dH_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)}+v)}{\sum\limits_{l\neq\eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)}l}[1-H_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)})]}, \tag{4}$$

$$A_m(x; \bar{u}, v, \Pi^{(k)}) = \frac{F_m(\gamma_m^{(k)}+\min\{x, u_l, l\in E\setminus\{m\}, v\})-F_m(\gamma_m^{(k)})}{1-F_m(\gamma_m^{(k)})}, \ m\in E, \ \nu_m^{(k)}=0,$$

$$A_m(x; \bar{u}, v, \Pi^{(k)}) = \frac{G_m(\gamma_m^{(k)}+\min\{x, u_l, l\in E\setminus\{m\}, v\})-G_m(\gamma_m^{(k)})}{1-G_m(\gamma_m^{(k)})}, \ m\in E, \ \nu_m^{(k)}=1,$$

$$A_m(x; \bar{u}, v, \Pi^{(k)}) = \frac{p_{\eta^{(k)}m}\,[H_{\eta^{(k)}m}(\theta^{(k)}+\min\{x, u_l, l\in E\})-H_{\eta^{(k)}m}(\theta^{(k)})]}{\sum\limits_{l\neq\eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)}l}\,[1-H_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)})]},$$

$$m\in I\setminus\{\eta^{(k)}\},$$

где $\bar{u}=(u_r, r\in E)$. Тогда

$$D(x, m; \Pi^{(k)}) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty A_m(x; \bar{u}, v, \Pi^{(k)})\, d\Phi(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}). \tag{5}$$

Несмотря на громоздкость, формула (5) имеет простую интерпретацию: фиксируя моменты изменения состояний ребер сети и ПМП ($d\Phi(\bar{u}, v; \Pi^{(k)})$), находим вероятность того, что ребро m изменяет свое состояние до момента x и раньше всех остальных (множитель $A_m(x; \bar{u}, v, \Pi^{(k)})$); аналогичное замечание относится и к переходу ПМП в состояние m.

Соотношения (3) и (5) лежат в основе рекуррентного алгоритма, позволяющего моделировать моменты изменения состояний дискретных компонент $\bar{\nu}(t)$ и $\eta(t)$ до тех пор, пока не наступит функциональный отказ. Для того чтобы повысить эффективность моделирования (уменьшить дисперсию оценки), введем весовые множители, позволяющие оценить вклад в отказ сети каждого из возможных событий: отказ ребра, восстановление ребра, переход ПМП. Пусть $(\bar{\nu}(t), \eta(t))=(\bar{\nu}, j)$. Обозначим $\varphi(\bar{\nu}, j)$ некоторый положительный весовой множитель. В качестве $\varphi(\bar{\nu}, j)$ выбирается оценка вероятности монотонного функционального отказа сети при начальном состоянии $(\bar{\nu}, j)$. При этом используется принцип монотонных отказов, предложенный И.Н. Коваленко [22], согласно которому преимущественный вклад в отказ высоконадежной сети вносят монотонные траектории (число отказавших ребер монотонно возрастает). Подробный алгоритм выбора множителей $\{\varphi(\bar{\nu}, j)\}$ описан в следующем разделе. Предлагаемый ниже алгоритм существенной выборки позволяет строить несмещенные оценки вероятности $Q(T)$ при любом выборе набора положительных $\{\varphi(\bar{\nu}, j)\}$. Но лишь при определенном выборе $\{\varphi(\bar{\nu}, j)\}$ (см. следующий раздел) относительная погрешность оценок будет оставаться ограниченной с ростом надежности ребер. Соотношение (5) может быть переписано в виде

$$D(x, m; \Pi^{(k)}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty d\Phi(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) \frac{B(\bar{u}, v; \Pi^{(k)})}{\varphi(\bar{\mu}^{(k)}(m), j(m))} \times$$

$$\times \frac{B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)})}{B(\bar{u}, v; \Pi^{(k)})} W_m(x; \bar{u}, v;\ \Pi^{(k)}), \tag{6}$$

где

$$B(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) = \sum_{m \in E} B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) + \sum_{m \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}} B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}). \tag{7}$$

Пусть $m \in E, \bar{\nu}_m^{(k)} = 0$. Используя для единичного вектора обозначение $\bar{z}^{(m)} = (z_r = 0, r \in E \setminus \{m\}, z_m = 1)$, имеем: $\bar{\mu}^{(k)}(m) = \bar{\nu}^{(k)} + \bar{z}^{(m)}$, $j(m) = \eta^{(k)}$ и

$$B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{\mu}^{(k)}(m), j(m)) \frac{F_m(\gamma_m^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - F_m(\gamma_m^{(k)})}{1 - F_m(\gamma_m^{(k)})}, \tag{8}$$

$$W_m(x; \bar{u}, v; \Pi^{(k)}) =$$

$$= \frac{F_m(\gamma_m^{(k)} + x) - F_m(\gamma_m^{(k)})}{F_m(\gamma_m^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - F_m(\gamma_m^{(k)})},\ x \in [0, d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)], \tag{9}$$

где $d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v) = \min\{T - \tau^{(k)}, u_l, l \in E \setminus \{m\}, v\}$.

Пусть $m \in E, \bar{\nu}_m^{(k)} = 1$. Тогда $\bar{\mu}^{(k)}(m) = \bar{\nu}^{(k)} - \bar{z}^{(m)}$, $j(m) = \eta^{(k)}$ и

$$B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{\mu}^{(k)}(m), j(m)) \frac{G_m(\gamma_m^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - G_m(\gamma_m^{(k)})}{1 - G_m(\gamma_m^{(k)})}, \tag{10}$$

$$W_m(x; \bar{u}, v; \Pi^{(k)}) =$$

$$= \frac{G_m(\gamma_m^{(k)} + x) - G_m(\gamma_m^{(k)})}{G_m(\gamma_m^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - G_m(\gamma_m^{(k)})},\ x \in [0, d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)]. \tag{11}$$

Если же $m \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}$, то $\bar{\mu}^{(k)}(m) = \bar{\nu}^{(k)}$, $j(m) = m$ и

$$B_m(\bar{u}, v; \Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{\mu}^{(k)}(m), j(m)) \times$$

$$\times \frac{p_{\eta^{(k)} m}[H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)})]}{\sum_{l \neq \eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)} l}[1 - H_{\eta^{(k)} l}(\theta^{(k)})]}, \tag{12}$$

$$W_m(x; \bar{u}, v; \Pi^{(k)}) =$$

$$= \frac{H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)} + x) - H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)})}{H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)} + d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)) - H_{\eta^{(k)} m}(\theta^{(k)})},\ x \in [0,\ d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v)], \tag{13}$$

где $d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, v) = \min\{T - \tau^{(k)}, u_l, l \in E\}, m \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}$.

Формулы (3), (6)–(13) позволяют сформулировать алгоритм построения оценки вероятности $Q(T)$ методом существенной выборки (строится оценка $\hat{Q}_1(T)$ в одной реализации).

1. Положим $k = 0$ (счетчик числа изменений состояний одной из дискретных компонент в $[0, T]$), $\tau^{(0)} = 0$ и зададим начальное состояние $\zeta^{(0)} = \zeta(\tau^{(0)}) = (\nu_e^{(0)} = 0, \gamma_e^{(0)} = 0, e \in E; \eta^{(0)} = 1, \theta^{(0)} = 0)$.

2. Предположим, что в момент $\tau^{(k)}$ марковский процесс перешел в состояние $\zeta^{(k)} = \zeta(\tau^{(k)}) = (\bar{\nu}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)}) = (\nu_e^{(k)}, \gamma_e^{(k)}, e \in E; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$, $(\bar{\nu}^{(k)}, \eta^{(k)}) \notin U$. Для каждого $m \in E$ строим реализацию случайной величины α_m с ф.р. $\dfrac{F_m(\gamma_m^{(k)} + x) - F_m(\gamma_m^{(k)})}{1 - F_m(\gamma_m^{(k)})}$, $x \ge 0$ (если $\nu_r^{(k)} = 0$) или с ф.р. $\dfrac{G_m(\gamma_m^{(k)} + x) - G_m(\gamma_m^{(k)})}{1 - G_m(\gamma_m^{(k)})}$, $x \ge 0$ (если $\nu_r^{(k)} = 1$). Пусть $\alpha_m = u_m$, $m \in E$. Кроме того, строим реализацию случайной величины β с ф.р. $\dfrac{\sum\limits_{l \ne \eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)} l} dH_{\eta^{(k)} l}(\theta^{(k)} + x)}{\sum\limits_{l \ne \eta^{(k)}} p_{\eta^{(k)} l} [1 - H_{\eta^{(k)} l}(\theta^{(k)})]}$, $\beta = \upsilon$.

3. Вычисляем $B_m(\bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)})$, $e \in E \bigcup I \setminus \{\eta^{(k)}\}$ и $B(\bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)})$ согласно (7), (8), (10) и (12).

4. Моделируем случайную величину ω, которая принимает значение m с вероятностью $B_m(\bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)}) / B(\bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)})$. Пусть $\omega = m$.

5. Моделируем случайную величину δ_m с ф.р. $W_m(x; \bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)})$, $x \in [0, d_m(\tau^{(k)}; \bar{u}, \upsilon)]$; пусть $\delta_m = z$.

6. Полагаем $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + z$ и находим новое состояние марковского процесса $\zeta^{(k+1)} = \zeta(\tau^{(k+1)}) = (\bar{\nu}^{(k+1)}, \bar{\gamma}^{(k+1)}; \eta^{(k+1)}, \theta^{(k+1)})$, если известно, что дискретные компоненты $\bar{\nu}(t)$ и $\eta(t)$ в интервале $(\tau^{(k)}, \tau^{(k+1)})$ своего состояния не изменяли, а в момент $\tau^{(k+1)}$ отказало ребро m (если $m \in E$, $\nu_m^{(k)} = 0$), окончилось восстановление ребра m (если $m \in E$, $\nu_m^{(k)} = 1$), ПМП перешел в состояние m (если $m \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}$).

7. Вычисляем нормирующий множитель $J^{(k+1)} = \dfrac{B(\bar{u}, \upsilon; \Pi^{(k)})}{\varphi(\bar{\nu}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)})}$.

8. Повторяем алгоритм с новым значением k, начиная с шага 2, если $(\bar{\nu}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) \notin U$. Если же $(\bar{\nu}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) \in U$, то наступил функциональный отказ, алгоритм окончен и в качестве оценки $\hat{Q}_1(T)$ выбираем

$$\hat{Q}_1(T) = J^{(1)} J^{(2)} \ldots J^{(k+1)}. \tag{14}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для произвольного набора положительных чисел $\{\varphi(\bar{\nu}, j)\}$ оценка $\hat{Q}_1(T)$ является несмещенной, т.е. $\mathbf{M}\hat{Q}_1(T) = Q(T)$.

Несмещенность оценки вытекает непосредственно из сформулированного алгоритма и формул (3), (4), (6)–(14).

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ

Критерием устойчивости метода и высокой точности оценок, получаемых при исследовании сетей высокой надежности, принято считать относительную среднеквадратическую погрешность (ОСКП) оценки

$$\rho(T) = \sqrt{\mathbf{D}\,\hat{Q}_1(T)} \,/\, Q(T) = \sqrt{\mathbf{M}\,[\hat{Q}_1(T)]^2 \,/\, [Q(T)]^2 - 1}.$$

В настоящем разделе найдены условия, гарантирующие ограниченность ОСКП оценок при определенном выборе весовых множителей $\{\varphi(\bar{\nu}, j)\}$. Вполне естественно считать, что время до отказа ребра существенно превосходит время его восстановления. Кроме того, переходы ПМП в состояния с более высоким уровнем требуемой эффективности являются маловероятными. Данные особенности формализуем следующим образом.

Предположим, что ф.р. $\{F_e(x), e \in E\}$ и $\{H_{ij}(x), 1 \le i < j \le N\}$ могут быть представлены в виде $F_e(x) = F_e^{(0)}(\varepsilon^{\delta_e} x)$ и $H_{ij}(x) = H_{ij}^{(0)}(\varepsilon^{\sigma_{ij}} x)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторый малый параметр, $\delta_e > 0, \sigma_{ij} \ge 0$, а $F_e^{(0)}(x)$ и $H_{ij}^{(0)}(x)$ — ф.р. «умеренных» случайных величин. Воспользуемся условием, первоначально введенным в [10] (см. также [8, 22]). Предположим, что плотности $\{f_e^{(0)}(x), e \in E\}$ и $\{h_{ij}^{(0)}(x), 1 \le i < j \le N\}$ удовлетворяют условию: существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\Delta \in (0, T/N)$ и функции $\psi_e^{(1)}(x), \psi_e^{(2)}(x), \pi_{ij}^{(1)}(x), \pi_{ij}^{(2)}(x)$ такие, что неравенства

$$\begin{gathered} \varepsilon^{\beta_e - 1}\, \psi_e^{(1)}(x) \le f_e^{(0)}(\varepsilon x) \le \varepsilon^{\beta_e - 1}\, \psi_e^{(2)}(x), \\ \varepsilon^{\mu_{ij} - 1}\, \pi_{ij}^{(1)}(x) \le h_{ij}^{(0)}(\varepsilon x) \le \varepsilon^{\mu_{ij} - 1}\, \pi_{ij}^{(2)}(x) \end{gathered} \tag{15}$$

выполнены для любых $0 < x \le T$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, причем

$$V^{(1)} = \min_{e \in E} \inf_{0 \le z \le T - \Delta} \int_z^{z+\Delta} \psi_e^{(1)}(u)\, du > 0,\ V^{(2)} = \max_{e \in E} \int_0^T \psi_e^{(2)}(u)\, du < \infty, \tag{16}$$

$$W^{(1)} = \min_{1 \le i < j \le N} \inf_{0 \le z \le T - \Delta} \int_z^{z+\Delta} \pi_{ij}^{(1)}(u)\, du > 0,\ W^{(2)} = \max_{1 \le i < j \le N} \int_0^T \pi_{ij}^{(2)}(u)\, du < \infty. \tag{17}$$

Условия (15)–(17) не являются ограничительными, большинство распределений, используемых в теории надежности, удовлетворяют им (например, распределения Эрланга и Вейбулла, гамма-распределение).

Предположим также, что

$$p_{ij} = p_{ij}^{(0)}\, \varepsilon^{\kappa_{ij}},\ 1 \le i < j \le N, \tag{18}$$

где $p_{ij}^{(0)} \ge 0$, $\kappa_{ij} \ge 0$.

Переход полумарковского процесса $\eta(t)$ из j в $k > j$ назовем монотонным, если для некоторого $n \ge 1$ процесс последовательно принимал состояния $j = j_0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_n = k$. Множество монотонных траекторий такого вида обозначим Θ_{jk}. Каждой траектории $\bar{s} = (j_0, j_1, \ldots, j_n)$ из Θ_{jk} присвоим ранг, определяемый по формуле $r(\bar{s}) = \sum_{i=1}^{n} (\kappa_{j_{i-1} j_i} + \sigma_{j_{i-1} j_i}\, \mu_{j_{i-1} j_i})$. Соответственно ранг множества Θ_{jk} определим как $R_{jk} = \min_{\bar{s} \in \Theta_{jk}} r(\bar{s})$, причем $R_{jj} = 0$. Теперь можно определить нормирующий множитель $\varphi(\bar{\nu}, j)$. Пусть $\bar{\nu} = (\nu_e, e \in E)$ — произвольное состояние сети, причем $\Phi(\bar{\nu}) \ge \Psi(j)$. Тогда

$$\varphi(\bar{\nu}, j) = \varepsilon^{R(\bar{\nu}, j)},$$

где

$$R(\bar{\nu}, j) =$$

$$= \min \left\{ \min_{k : \Psi(k) > \Phi(\bar{\nu})} R_{jk},\ \min_{k : \Psi(k) \le \Phi(\bar{\nu}),\ k \ge j} \left\{ R_{jk} + \min_{C \in M^{(k)}} \sum_{i : e_i \in C,\, \nu_{e_i} = 0} \delta_{e_i}\, \beta_{e_i} \right\} \right\}. \tag{19}$$

Величина $R(\bar{\nu}, j)$ устанавливает порядок наиболее вероятной монотонной траектории, вызывающей функциональный отказ: либо наиболее вероятной является монотонная траектория ПМП из Θ_{jk} для некоторого k такого, что $\Psi(k) > \Phi(\bar{\nu})$, либо наиболее вероятным является переход в состояние отказа при одновременном переходе ПМП из j в $k \geq j$, $\Psi(k) \leq \Phi(\bar{\nu})$, и отказе ребер наиболее вероятного сечения из $M^{(k)}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) плотности $\{f_e^{(0)}(x), e \in E\}$ и $\{h_{ij}^{(0)}(x), 1 \leq i < j \leq N\}$ удовлетворяют условиям (16)–(18), причем $\kappa_{ij} + \sigma_{ij}\, \mu_{ij} > 0$, i, j: $1 \leq i < j \leq N$, $p_{ij}^{(0)} > 0$;

2) если $i < j$ и $p_{ji} > 0$, то $R_{jk} \leq R_{ik}$ для любого $k > j$;

3) $g = \min\, \{\min\limits_{e \in E} \{1 - G_e(\Delta)\},\ \min\limits_{j \in I} \{\sum\limits_{k \neq j} p_{jk}\, [1 - H_{jk}(\Delta)]\}\} > 0$ для того же Δ, что и в условиях (16), (17).

Тогда оценка $\hat{Q}_1(T)$ имеет ограниченную ОСКП, т.е. $\rho(T) = \rho(T; \varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Принимая во внимание, что $f_e(x) = \varepsilon^{\delta_e}\, f_e^{(0)}(\varepsilon^{\delta_e} x)$, из неравенств (15) и (16) следует, что для любого $x \in [0, T - \Delta]$

$$F_e(x+\Delta) - F_e(x) = \int\limits_x^{x+\Delta} \varepsilon^{\delta_e}\, f_e^{(0)}(\varepsilon^{\delta_e} u)\, du \geq \varepsilon^{\delta_e \beta_e} \int\limits_x^{x+\Delta} \psi_e^{(1)}(u)\, du \geq V^{(1)}\, \varepsilon^{\delta_e \beta_e}, \quad (20)$$

$$F_e(T) = \int\limits_0^T f_e(u)\, du = \int\limits_0^T \varepsilon^{\delta_e}\, f_e^{(0)}(\varepsilon^{\delta_e} x)\, du \leq V^{(2)}\, \varepsilon^{\delta_e \beta_e}. \quad (21)$$

Аналогично из неравенств (16) и (18) следует, что для любого $x \in [0, T - \Delta]$

$$H_{ij}(x+\Delta) - H_{ij}(x) \geq W^{(1)}\, \varepsilon^{\sigma_{ij}\mu_{ij}},\ H_{ij}(T) \leq W^{(2)}\, \varepsilon^{\sigma_{ij}\mu_{ij}},\ i < j. \quad (22)$$

Построим нижнюю оценку для $Q(T)$. Пусть $\bar{\nu}^{(0)} = (\nu_e = 0,\ e \in E)$ — начальное состояние сети и $j^{(0)} = 1$ — начальное состояние ПМП. Порядок наиболее вероятного монотонного пути, приводящего к наступлению функционального отказа, равен $R(\bar{\nu}^{(0)}, j^{(0)})$. Предположим, что минимум в (19) достигается при некотором $k > 1$, причем наиболее вероятной траекторией из Θ_{1k} является $\bar{s}^{(0)} = \{j^{(0)}, j^{(1)}, \ldots, j^{(n)}\}$, а наиболее вероятным сечением из $M^{(k)}$ — $C = (e_1, \ldots, e_m)$ (случай $k = 1$ более простой и рассматривать его не будем). Пусть $\{X_{e_i}\}$, $\{Y_{e_i}\}$, $\{Z_{j_{i-1}j_i}\}$ Z_k — независимые последовательности независимых в каждой последовательности случайных величин с ф.р. $\{F_{e_i}(x)\}$, $\{G_{e_i}(x)\}$, $\{H_{j_{i-1}j_i}(x)\}$ и $\sum\limits_{i \neq k} p_{ki} H_{ki}(x)$ соответственно. Тогда

$$Q(T) \geq \prod_{i=1}^{n} p_{j_{i-1}j_i}\, \mathbf{P}\{(n-1)\Delta < X_{e_1} < T - \Delta, Y_{e_1} > \Delta, X_{e_1} < X_{e_i} < X_{e_1} + \Delta,$$

$$Y_{e_i} > \Delta, 2 \leq i \leq m, X_{e_1} < Z_{j_0 j_1} + \ldots + Z_{j_{n-1}j_n} < X_{e_1} + \Delta,\ Z_k > \Delta\}.$$

Методом математической индукции на основании первого из соотношений в (22) можно показать, что для любого $(n-1)\Delta < u < T - \Delta$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{u < Z_{j_0 j_1} + \ldots + Z_{j_{n-1}j_n} < u + \Delta\} \geq [W^{(1)}]^n\, \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{j_{i-1}j_i} \mu_{j_{i-1}j_i}}.$$

Учитывая (18) и (20), получаем нижнюю оценку

$$Q(T) \ge g^{m+1}[W^{(1)}]^n \prod_{i=1}^{n} p_{j_{i-1}j_i}^{(0)} \varepsilon^{r(\bar{s}^{(0)})} \int_{(n-1)\Delta}^{T-\Delta} \prod_{i=2}^{m} [F_{e_i}(u+\Delta) - F_{e_i}(u)]\, dF_{e_1}(u) \ge$$

$$\ge g^{m+1}[W^{(1)}]^n [V^{(1)}]^m \prod_{i=1}^{n} p_{j_{i-1}j_i}^{(0)} \varepsilon^{r(\bar{s}^{(0)}) + \sum_{i=1}^{k} \delta_{e_i}\beta_{e_i}} = O(\varepsilon^{R(\bar{\nu}^{(0)},\, j^{(0)})}). \qquad (23)$$

Построение верхней оценки для $\mathbf{M}[\hat{Q}_1(T)]^2$ основано на неравенствах (15)–(17), (21), (22) и проводится в полном соответствии со схемой, приведенной в [8]. В частности, используя первые два условия теоремы, нетрудно показать, что $B(\bar{u}, v; \Pi^{(0)}) = O(\varepsilon^{R(\bar{\nu}^{(0)},\, j^{(0)})})$ и $B(\bar{u}, v; \Pi^{(k+1)}) / \varphi(\bar{\nu}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) = O(1)$ равномерно относительно v и компонент вектора $\bar{u}$. В результате получим оценку

$$\mathbf{M}[\hat{Q}_1(T)]^2 = O(\varepsilon^{R(\bar{\nu}^{(0)},\, j^{(0)})} Q(T)),$$

которая в сочетании с (23) дает утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим сеть (см. рис. 1), состоящую из 11 вершин и 21 ребра (сеть 6 в [18]). Предположим, что $\{F_e(x)\}$ и $\{G_e(x)\}$ — распределения Вейбулла следующего вида:

$$F_e(x) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\delta_e} x)^{\beta_e}\},\ G_e(x) = 1 - \exp\{-(\mu_e x)^{\theta_e}\},\ e \in E,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Значения параметров $\{\delta_e\}, \{\beta_e\}, \{\mu_e\}, \{\theta_e\}$, а также производительностей $\{c_e\}$ указаны в табл. 1.

Таблица 1

Ребро e	Значения параметров					Ребро e	Значения параметров				
	δ_e	β_e	μ_e	θ_e	c_e		δ_e	β_e	μ_e	θ_e	c_e
(1, 2)	0.7	1.0	5.0	2.0	0.3	(5, 4)	1.2	0.8	5.0	0.5	0.2
(1, 3)	1.0	1.5	5.0	2.0	0.3	(5, 8)	0.9	1.0	5.0	0.5	0.2
(1, 4)	0.5	2.0	5.0	2.0	0.3	(5, 10)	1.2	1.4	10	2.0	0.2
(1, 5)	1.2	0.5	5.0	2.0	0.3	(6, 9)	0.5	2.0	10	2.0	0.5
(2, 6)	1.5	1.0	5.0	2.0	0.5	(7, 11)	1.5	1.5	10	2.0	0.4
(3, 2)	0.8	1.0	10	0.5	0.4	(8, 7)	1.5	0.6	5.0	0.5	0.3
(3, 6)	1.2	0.8	10	0.5	0.4	(9, 3)	0.9	0.9	5.0	0.5	0.2
(3, 7)	1.1	0.6	10	0.5	0.4	(9, 11)	1.1	0.7	10	2.0	0.4
(4, 3)	0.5	2.0	10	0.5	0.3	(10, 7)	0.8	1.0	5.0	0.5	0.2
(4, 7)	2.0	0.5	5.0	0.5	0.3	(10, 11)	1.2	0.6	10	0.5	0.4
(4, 8)	1.0	0.6	5.0	0.5	0.3						

Полумарковский процесс $\eta(t), t \ge 0$, может принимать три состояния, т.е. $I = \{1, 2, 3\}$, $H_{ij}(x) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\sigma_{ij}} x)^{\pi_{ij}}\}$, где $\sigma_{12} = 0.5, \sigma_{13} = 1, \sigma_{23} = 0.5, \sigma_{ij} = 0$, если $i > j$; $\pi_{ij} = 2, i < j, \pi_{ij} = 0.5,\ i > j$. Переходные вероятности $\{p_{ij}\}$ зададим так: $p_{12} = 0.7,\ p_{13} = 0.3,\ p_{23} = \varepsilon,\ p_{21} = 1 - \varepsilon,\ p_{31} = p_{32} = 0.5$. Уровни требуемой эффективности зададим так: $\Psi(1) = 0.1, \Psi(2) = 0.4, \Psi(3) = 0.7$.

Предположим, что надежность сети исследуется в промежутке $[0, 1]$, т.е. $T = 1$. В качестве малого параметра ε выберем 2^{-n}, $n = 5, 6, \ldots$ Общее количество минимальных сечений равно 110. Не все сечения в одинаковой степени влияют на надежность сети. Время вычислений можно существенно сократить, если отсечь маловероятные сечения. В качестве критерия для отсечения маловероятных сечений выберем следующий. Пусть r — некоторое положительное число, $S^{(r)}$ — подмножество сечений $C = (e_1, \ldots, e_k) \in M$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_{e_i} \beta_{e_i} \le r. \tag{24}$$

Сечения, не удовлетворяющие (24), удаляются. Обозначим $\hat{Q}^{(r)}(T)$ и $\hat{\rho}^{(r)}(T)$ оценки для вероятности отказа $Q(T)$ и ОСКП $\rho(T)$, полученные при заданном уровне отсечения r с достоверностью 0.99 и относительной погрешностью 2 %. Обозначим также $\hat{N}^{(r)}$ количество реализаций алгоритма, требуемых для достижения указанной точности, $|M^{(r)}|$ — число сечений во множестве $M^{(r)}$. Результаты численного эксперимента приведены в табл. 2.

Таблица 2

Число сечений	Оценки	Результаты экспериментов			
		$\varepsilon = 2^{-5}$	$\varepsilon = 2^{-8}$	$\varepsilon = 2^{-11}$	$\varepsilon = 2^{-14}$
$r = 4$, $\lvert M^{(r)}\rvert = 10$	$\hat{Q}^{(r)}(T)$	$1.74 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-9}$	$2.31 \cdot 10^{-12}$	$3.42 \cdot 10^{-15}$
	$\hat{\rho}^{(r)}(T)$	5.44	6.44	5.60	5.41
	$\hat{N}^{(r)}$	490 329	686 527	520 520	485 762
$r = 5$, $\lvert M^{(r)}\rvert = 19$	$\hat{Q}^{(r)}(T)$	$7.42 \cdot 10^{-6}$	$1.88 \cdot 10^{-6}$	$5.37 \cdot 10^{-11}$	$1.60 \cdot 10^{-13}$
	$\hat{\rho}^{(r)}(T)$	3.92	2.72	2.21	1.89
	$\hat{N}^{(r)}$	255 179	122 592	80 823	59 388
$r = 6$, $\lvert M^{(r)}\rvert = 42$	$\hat{Q}^{(r)}(T)$	$7.50 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^{-8}$	$5.41 \cdot 10^{-11}$	$1.61 \cdot 10^{-13}$
	$\hat{\rho}^{(r)}(T)$	3.94	2.89	2.10	1.82
	$\hat{N}^{(r)}$	257 914	138 660	73 172	54 732
$r = 7$, $\lvert M^{(r)}\rvert = 69$	$\hat{Q}^{(r)}(T)$	$7.39 \cdot 10^{-6}$	$1.93 \cdot 10^{-8}$	$5.40 \cdot 10^{-11}$	$1.61 \cdot 10^{-13}$
	$\hat{\rho}^{(r)}(T)$	4.13	2.88	2.10	1.82
	$\hat{N}^{(r)}$	282 183	137 582	72 851	54 732

Численные данные показывают, что лишь случай 10 сечений ($r = 4$) дает явно заниженные оценки вероятности отказа. Увеличение количества сечений с 19 до 69 не приводит к заметному увеличению точности оценок $\hat{Q}^{(r)}(T)$. Более того, ОСКП не возрастает и даже незначительно убывает с ростом надежности сети, что полностью согласуется с утверждением теоремы 2.

Таким образом, предложенный в статье метод ускоренного моделирования является эффективным инструментом оценки надежности восстанавливаемых сетей в самых общих предположениях относительно распределений длительностей безотказной работы и восстановления элементов.

Авторы благодарны академику НАН Украины И.Н. Коваленко за внимание к работе и полезные советы, способствующие ее улучшению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gertsbakh I.B., Shpungin Y. Models of network reliability: analysis, combinatorics, and Monte Carlo. — Boca Raton: CRC Press, 2009. — 203 p.
2. Frenkel I.B., Karagrigoriou A., Lisnianski A., Kleyner A.V. Applied reliability engineering and risk analysis: probabilistic models and statistical inference. — New York: Wiley, 2013. — 448 p.

3. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queueing and reliability models // ACM Trans. Modeling Comput. Simul. — 1995. — **5**, N 1. — P. 43–85.

4. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications // Reliab. Engin. and System Safety. — 2011. — **96**, N 12 — P. 1667–1679.

5. Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering. — New York: Springer, 2004. — 575 c.

6. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980. — 209 с.

7. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.

8. Kuznetsov N.Yu. Fast simulation technique in reliability evaluation of Markovian and non-Markovian systems / Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory. — New York: Nova Sci. Publ., 2009. — P. 69–112.

9. Кузнецов Н.Ю., Шумская А.А. Оценка опасности отказа резервированной системы методом ускоренного моделирования // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 3. — С. 50–62.

10. Шумская А.А. Ускоренное моделирование коэффициента неготовности восстанавливаемой системы с ограниченной относительной погрешностью оценки // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 3. — С. 45–58.

11. Glasserman P., Heidelberger Ph., Shahabuddin P., Zajic T. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities // Oper. Res. — 1999. — **47**, N 4. — P. 585–600.

12. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. — Chichester: Wiley, 1997. — 303 p.

13. Lagnoux A. Rare event simulation // Probab. Eng. and Inf. Sci. — 2006. — **20**, N 1. — P. 45–66.

14. Blanchet J., Lam H. Rare event simulation techniques // Proc. of the 2011 Winter Simulation Conf. — 2011. — P. 217–231.

15. Хомяк О.Н. Нахождение вероятности пересечения функционалов от траекторий двух цепей Маркова методом существенной выборки // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 4. — С. 123–128.

16. Хомяк О.Н. Применение ускоренного моделирования для оценки вероятности пересечения случайного уровня марковским процессом // Там же. — 2014. — № 1. — С. 110–118.

17. Самойлов О.Б., Усынин Г.Б., Бахметьев А.М. Безопасность ядерных энергетических установок. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 280 с.

18. Lin H.-Y., Kuo S.-Y., Yeh F.-M. Minimal cutset enumeration and network reliability evaluation by recursive merge and BDD // Proc. of the 8th IEEE Intern. Symp. on Comput. and Commun. — 2003. — P. 1341–1346.

19. Benaddy M., Wakrim M. Cutset enumerating and network reliability computing by a new recursive algorithm and inclusion exclusion principle // Intern. J Comput. Appl. — 2012. — **45**, N 16. — P. 22–25.

20. A modified combined method for computing terminal-pair reliability in networks with unreliable nodes / Y. Chen, A.Q. Hu, K.W. Yip et al. // Proc. of the 2nd Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics. — 2003. — P. 2426–2429.

21. Kuo S.-Y., Yeh F.-M., Lin H.-Y. Efficient and exact reliability evaluation for networks with imperfect vertices // IEEE Trans. on Reliability. — 2007. — **56**, N 2. — P. 288–300.

22. Коваленко И.Н. Об оценке надежности сложных систем // Вопр. радиоэлектроники. — 1965. — **12**, № 9 — С. 50–68.

Поступила 18.10.2013