УДК 519.832.4

**В.В. РОМАНЮК**

# ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОЕКТИРОВЩИКА ДЛЯ ПОДБОРА ПЛОЩАДЕЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ОПОР КОНСТРУКЦИИ-ПЛАТФОРМЫ ПРИ ПЕРЕОЦЕНКАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ

**Аннотация.** Рассматривается антагонистическая модель подбора площадей поперечных сечений опор конструкции-платформы, где суммарная нагрузка на платформу нормирована к единице. Обобщенная модель порождена интервальными неопределенностями как оценками нормированных площадей поперечных сечений опор. Доказываются утверждения об оптимальных решениях проектировщика в такой модели при переоценках неопределенностей. Условия одного из утверждений вытекают из индуцирования условий первых двух утверждений.

**Ключевые слова:** конструкция-платформа, подбор площадей поперечных сечений, антагонистическая модель, переоценки неопределенностей, оптимальное решение проектировщика.

## ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Математическое моделирование, являясь фундаментальной составляющей прикладной математики и предшествуя макетному или натурному моделированию, позволяет выполнять неограниченные комбинации с параметрами исследуемых объектов. Это особенно актуально в конструировании технических и механических систем, в области строительства, общей инженерии, где разработка даже макетной модели невозможна без основательного прикладного анализа. В частности, при проектировании строительных конструкций или их элементов такой анализ необходимо проводить относительно надежности, устойчивости, долговечности, безопасности и других системных параметров [1].

Несмотря на то, что опорные конструкции-платформы в отдельности не являются самыми сложными объектами строительного процесса, тем не менее они должны выдерживать максимально возможное вертикальное давление и при этом быть приемлемыми по массогабаритным показателям. Это реализуемо при комплексном обеспечении путем подбора оптимального количества опор и их поперечных сечений. Однако существуют задачи проектирования, где потенциальное давление на платформу конструкции оценивается интервалом [2], а локальные нагрузки на центры опор платформы, также оцениваемые интервально, не обязательно предполагаются одинаково распределенными [3, 4]. Тогда в условиях возникших неопределенностей прибегают к единичному нормированию суммарной нагрузки и суммарной площади поперечного сечения опор [4, 5], что позволяет решать задачу подбора оптимальных площадей поперечных сечений с помощью известных антагонистических моделей [4, 6], дабы по соответствующему принципу минимизации максимальных перегрузок [7] одновременно обеспечить безопасность и экономию ресурсов, т.е. сокращение расходов строительного материала и уменьшение геометрических форм. Здесь существенная проблема состоит в том, что интервальные оценки (собственно, неопределенности) нагрузок на опоры и площадей их поперечных сечений являются дополнительным субъективным фактором, ввиду чего впоследствии возникают трудности с переоценками неопределенностей, которые необходимо разрешить.

## ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Предполагается, что в $N$-опорной конструкции-платформе для $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ нормированной нагрузкой на $j$-ю опору в форме неопределенности $[a_j;\, b_j]$ является неизвестное число

$$x_j \in [a_j;\, b_j] \subset (0;\, 1) \text{ при } a_j < b_j \quad \forall\, j = \overline{1,\, N-1} \tag{1}$$

при неизвестной нормированной площади поперечного сечения этой опоры

$$y_j \in [a_j;\ b_j] \subset (0;\ 1) \text{ при } a_j < b_j \quad \forall\ j = \overline{1,\ N-1}. \tag{2}$$

Неопределенные нагрузка и площадь поперечного сечения для $N$-й опоры не принимаются во внимание, поскольку в силу единичного нормирования

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = 1,\ \sum_{k=1}^{N} y_k = 1. \tag{3}$$

Таким образом, при известных интервалах $\{[a_j;\ b_j]\}_{j=1}^{N-1}$ для определения оптимальных площадей поперечных сечений опор платформы используют антагонистическую модель [3, 4] в форме выпуклой игры [5, 6, 8] с ядром

$$T(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}) = T(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{N-1};\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{N-1}) = \tag{4}$$

$$= \max\left\{\frac{x_1}{y_1^2},\ \frac{x_2}{y_2^2},\ \ldots,\ \frac{x_{N-1}}{y_{N-1}^2},\ \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2}\right\} = \max\left\{\left\{\frac{x_j}{y_j^2}\right\}_{j=1}^{N-1},\ \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2}\right\}$$

на декартовом произведении

$$X \times Y = \prod_{p=1}^{2}\left(\prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\ b_j]\right) \subset \prod_{d=1}^{2N-2}(0;\ 1) \subset \prod_{d=1}^{2N-2}[0;\ 1] \subset \mathbb{R}^{2N-2} \tag{5}$$

гиперпараллелепипеда чистых стратегий (нормированных нагрузок на опоры)

$$X = \prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\ b_j] \subset \prod_{j=1}^{N-1}(0;\ 1) \subset \mathbb{R}^{N-1} \tag{6}$$

первого игрока и гиперпараллелепипеда чистых стратегий (нормированных площадей поперечных сечений опор)

$$Y = \prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\ b_j] \subset \prod_{j=1}^{N-1}(0;\ 1) \subset \mathbb{R}^{N-1} \tag{7}$$

второго игрока (проектировщика), где

$$\mathbf{X} = [x_1\ \ x_2 \ldots x_{N-2}\ \ x_{N-1}] \in X, \tag{8}$$

$$\mathbf{Y} = [y_1\ \ y_2 \ldots y_{N-2}\ \ y_{N-1}] \in Y. \tag{9}$$

Поскольку игра с ядром (4) на $(2N-2)$-мерном гиперпараллелепипеде (5) является выпуклой, то в ней существует оптимальная чистая стратегия проектировщика

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^*\ \ y_2^* \ldots y_{N-2}^*\ \ y_{N-1}^*] \in \prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\ b_j] = Y \tag{10}$$

согласно теореме о чистых оптимальных стратегиях второго игрока в выпуклой антагонистической игре [3, 4, 9, 10]. Компоненты этой $(N-1)$-мерной точки вначале находятся как корни равенства

$$v_* = \frac{b_j}{(y_j^*)^2} = \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k^*\right)^2} \quad \forall\ j = \overline{1,\ N-1} \tag{11}$$

в силу того, что

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^* \;\; y_2^* \ldots y_{N-2}^* \;\; y_{N-1}^*] \in \arg \min_{\mathbf{Y} \in \prod_{i=1}^{N-1}[a_i;\; b_i]} \left\{ \max_{\mathbf{X} \in \prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\; b_j]} T(\mathbf{X},\, \mathbf{Y}) \right\} =$$

$$= \arg \min_{\mathbf{Y} \in \prod_{i=1}^{N-1}[a_i;\; b_i]} \left\{ \max \left\{ \left\{ \frac{b_j}{y_j^2} \right\}_{j=1}^{N-1},\; \frac{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2} \right\} \right\}. \qquad (12)$$

Иными словами, вначале проверяют, достигается ли оптимальное значение игры $\upsilon_*$ на таких компонентах $\{y_j^*\}_{j=1}^{N-1}$, которые уравнивают все $N$ частей гиперболических гиперповерхностей под знаком максимума в (12). Однако такое уравнивание подразумевается на гиперпараллелепипеде (7), где каждый $j$-й корень [5] равенства (11)

$$y_j^* = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\, j = \overline{1,\; N-1} \qquad (13)$$

должен быть соответствующей координатой точки (10) этого гиперпараллелепипеда:

$$y_j^* \in [a_j;\; b_j] \;\; \forall\, j = \overline{1,\; N-1}\,. \qquad (14)$$

Если существует непустое подмножество $R \subset \{\overline{1,\; N-1}\}$ такое, что

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \notin [a_r;\; b_r] \;\; \forall\, r \in R \subset \{\overline{1,\; N-1}\}\,, \qquad (15)$$

то число в (15), естественно, уже не является $r$-й компонентой оптимальной стратегии (10). И все-таки оптимальное решение проектировщика (10) определенно существует, но в таких условиях оно будет состоять уже из других компонент $\{y_j^*\}_{j=1}^{N-1}$, на которых равенство (11) выполнится частично: окажутся равными не все $N$ частей равенства (11), а только лишь количество, меньшее этого числа. Поэтому вопрос об оптимальном решении проектировщика (10) для платформы с произвольным количеством опор, где выполнено (15) при $R \neq \varnothing$, является актуальным и требующим обсуждения. Далее рассмотрим случай с переоцененными неопределенностями $\{[a_r;\; b_r]\}_{r \in R}$ .

### ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Пусть известны неопределенности $\{[a_j;\; b_j]\}_{j=1}^{N-1}$ в обобщенной антагонистической модели (1)–(9) выбора оптимальных площадей поперечных сечений $N$-опорной конструкции-платформы для $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, где выполнено условие

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} < a_r \;\; \forall\; r \in R \subset \{\overline{1,\; N-1}\} \qquad (16)$$

при $R \neq \varnothing$. Неопределенности $\{[a_i;\ b_i]\}_{i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R}$ в отличие от неопределенностей $\{[a_r;\ b_r]\}_{r \in R}$ оценены корректно:

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \in [a_i;\ b_i]\ \ \forall\ i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R\ . \tag{17}$$

Необходимо определить компоненты $\{y_j^*\}_{j=1}^{N-1}$ оптимального решения проектировщика (10) для этих условий. Соответствующие утверждения позволят наилучшим образом распределять не только нормированную нагрузку на опоры платформы, подобрав оптимальные площади поперечных сечений ее опор, но и решать иные задачи распределения ресурсов в условиях неопределенностей $\left\{ \{[a_r;\ b_r]\}_{r \in R},\ \{[a_i;\ b_i]\}_{i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R} \right\}$, моделируемые антагонистической игрой с ядром (4) на $(2N-2)$-мерном гиперпараллелепипеде (5).

### УТВЕРЖДЕНИЯ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ПРОЕКТИРОВЩИКА (10) В ИГРЕ С ЯДРОМ (4) В УСЛОВИЯХ (16) И (17)

**Теорема 1.** В антагонистической игре с ядром (4) на декартовом произведении (5) гиперпараллелепипедов (6) и (7) для $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в условиях (16) и (17) при $R \neq \varnothing$ второй игрок обладает оптимальной стратегией (10) с $r$-й компонентой

$$y_r^* = a_r\ \ \forall\ r \in R \tag{18}$$

и компонентами

$$y_i^* = \frac{\left(1 - \sum_{q \in R} a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{u \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}}\quad \forall\ i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R \tag{19}$$

при

$$\frac{\left(1 - \sum_{q \in R} a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{u \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \geq a_i\quad \forall\, i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R\ . \tag{20}$$

**Доказательство.** В силу (16) каждая $r$-я компонента

$$y_r^* > \frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}}\quad \forall\, r \in R. \tag{21}$$

Подставляя (17) как компоненты $\{y_i^*\}_{i \in \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus R}$ с учетом (21) в части $\left\{ \frac{b_j}{(y_j^*)^2} \right\}_{j=1}^{N-1}$ и $\frac{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k^*\right)^2}$ гиперболических гиперповерхностей в равенстве (11), получаем строгое неравенство

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} y_q^*\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} > \frac{b_r}{(y_r^*)^2} \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \text{ и } \forall\, r\in R\,. \tag{22}$$

Поскольку $y_r^* \ge a_r \ \forall\ r \in R$, то наряду с (22) получаем неравенство

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} y_q^*\right)^2} \ge \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} a_q\right)^2} >$$

$$> \frac{b_i}{(y_i^*)^2} > \frac{b_r}{a_r^2} \ge \frac{b_r}{(y_r^*)^2} \quad \text{при } y_r^* \ge a_r \ \ \forall r\in R. \tag{23}$$

Отсюда видно, что выбор хотя бы одной $r$-й компоненты $y_r^* > a_r$ будет противоречить принципу оптимальности второго игрока, повышая значение игры до левой части в (23). Таким образом, формула (18) справедлива, и уже вместо (22) или (23) получаем строгое неравенство

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} a_q\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} > \frac{b_r}{a_r^2} \quad \forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \text{ и } \forall\ r\in R\,, \tag{24}$$

где по-прежнему компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}$ являются значениями (17). Однако из неравенства (24) видно, что его максимальная часть может быть уменьшена в результате уменьшения значений (17) компонент $\{y_i^*\}_{i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}$ настолько, чтобы часть этого неравенства

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} a_q\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} \quad \forall i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \tag{25}$$

стала равенством

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} a_q\right)^2} = \frac{b_i}{(y_i^*)^2} \quad \forall i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R\,, \tag{26}$$

откуда

$$y_i^* \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q\in R} a_q\right) \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \tag{27}$$

и

$$y_u^* = \sqrt{\frac{b_u}{b_i}}\, y_i^* \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R\ ,\ \ \forall\, u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R\ . \tag{28}$$

Теперь, подставляя соотношение (28) в правую часть равенства (27), получаем

$$y_i^* \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i} - \sqrt{b_i} \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} y_u^* - \sqrt{b_i} \sum_{q \in R} a_q =$$

$$= \sqrt{b_i} \left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) - \sqrt{b_i} \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{\frac{b_u}{b_i}}\, y_i^* = \sqrt{b_i} \left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) - y_i^* \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u}\ , \tag{29}$$

откуда вытекает (19). Естественно, здесь должно быть

$$\frac{\left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) \sqrt{b_i}}{\sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \in [a_i;\ b_i] \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R\ , \tag{30}$$

так как иначе равенство (26) будет выполнено вне гиперпараллелепипеда (7), что нарушит принадлежность в (10). Поэтому условие (20) и неравенство

$$\frac{\left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) \sqrt{b_i}}{\sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \le b_i \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R \tag{31}$$

очевидны. Однако

$$\frac{\left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) \sqrt{b_i}}{\sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} - \frac{\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}} =$$

$$= \sqrt{b_i}\, \frac{\left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \left( 1 - \sum_{q \in R} a_q \right) \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} - \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} - \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k}}{\left( \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right) \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\, \frac{\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} - \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} - \sum_{q \in R} a_q \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right)}{\left( \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right) \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\, \frac{\sum_{r \in R} \sqrt{b_r} - \sum_{r \in R} a_r \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right)}{\left( \sum_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right) \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k} \right)} \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R \tag{32}$$

и, суммируя обе части условия (16) по $r \in R \subset \{\overline{1,\ N-1}\}$, получаем

$$\frac{\sum\limits_{r\in R}\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<\sum_{r\in R}a_r. \tag{33}$$

В результате имеем отрицательный числитель в дроби (32) и соответственно сама дробь становится отрицательной. Значит, значения в требовании (30) меньше, чем значения в исходном условии (17), что автоматически приводит к (31), оставляя только требование (20) в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что поскольку

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<\frac{\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\le b_i \quad \forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R,$$

то неравенство (31) выполняется строго. Это означает следующее: какими бы ни были значения в (17), для получения равенства (26) из неравенства (25) компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}$ необходимо одновременно брать меньшими относительно значений в (17). Естественно, одновременность здесь достижима лишь при условии, когда

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\in(a_i;\ b_i]\quad\forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R.$$

Если хотя бы одно из требований принадлежностей в (30) будет нарушено, т.е. не выполнится хотя бы одно требование (20), то равенство (26) не будет выполнено на гиперпараллелепипеде (7) и значения (19) не будут компонентами оптимальной стратегии (10). Рассмотрим этот случай.

**Теорема 2.** Пусть в антагонистической игре с ядром (4) на декартовом произведении (5) гиперпараллелепипедов (6) и (7) для $N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ в условиях (16) и (17) при $R\neq\varnothing$ существует непустое множество индексов $T\subset\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R$ такое, что

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sqrt{b_t}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<a_t\quad\forall\ t\in T\subset\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \tag{34}$$

и

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\ge a_i\quad\forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}. \tag{35}$$

Тогда в этой игре второй игрок обладает оптимальной стратегией (10) с $r$-й компонентой (18), компонентами

$$y_t^*=a_t\quad\forall\ t\in T\subset\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R \tag{36}$$

и компонентами

$$y_i^* = \frac{\left(1 - \sum\limits_{p \in \{R \cup T\}} a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}} \sqrt{b_l} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\} \tag{37}$$

при

$$\frac{\left(1 - \sum\limits_{p \in \{R \cup T\}} a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}} \sqrt{b_l} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \geq a_i \quad \forall\ i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}\,. \tag{38}$$

**Доказательство.** Справедливость утверждения относительно компоненты (18) вытекает непосредственно из теоремы 1. В силу (34) каждая $t$-я компонента представляется как

$$y_t^* > \frac{\left(1 - \sum\limits_{q \in R} a_q\right)\sqrt{b_t}}{\sum\limits_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} \sqrt{b_u} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\ t \in T \subset \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R\,. \tag{39}$$

Вывод (39) означает, что вместо равенства (26) на гиперпараллелепипеде (7) выполнено строгое неравенство

$$\frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum\limits_{u \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus R} y_u^* - \sum\limits_{q \in R} a_q\right)^2} > \frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum\limits_{l \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}} y_l^* - \sum\limits_{p \in \{R \cup T\}} a_p\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} >$$

$$> \frac{b_s}{a_s^2} > \frac{b_s}{(y_s^*)^2} \quad \forall\, i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\} \text{ и } \forall\ s \in R \cup T \tag{40}$$

при $y_s^* > a_s$. Отсюда видно, что выбор хотя бы одной $t$-й компоненты $y_t^* > a_t$ будет противоречить принципу оптимальности второго игрока, повышая значение игры до левой части в (40). Таким образом, должны быть компоненты (36) и уже вместо (40) получаем строгое неравенство

$$\frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum\limits_{l \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}} y_l^* - \sum\limits_{p \in \{R \cup T\}} a_p\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} > \frac{b_s}{a_s^2}$$

$$\forall\ i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\},\ \ \forall\, s \in R \cup T\,, \tag{41}$$

где по-прежнему компоненты $\{y_i^*\}_{i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}}$ взяты как значения в левой части (35). Однако из неравенства (41) видно, что часть его максимального значения может быть уменьшена за счет уменьшения значений в левой части (35) компонент $\{y_i^*\}_{i \in \{\overline{1,\ N-1}\} \setminus \{R \cup T\}}$ до таких значений, при которых часть этого неравенства

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} y_l^* - \sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right)^2} > \frac{b_i}{(y_i^*)^2} \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\} \tag{42}$$

станет равенством

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} y_l^* - \sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right)^2} = \frac{b_i}{(y_i^*)^2} \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}, \tag{43}$$

из которого получим

$$y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} y_l^* - \sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right) \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\} \tag{44}$$

и

$$y_l^* = \sqrt{\frac{b_l}{b_i}}\, y_i^* \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\},\ \forall\, l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}. \tag{45}$$

Далее, подставляя соотношение (45) в правую часть равенства (44), получаем

$$\begin{aligned} y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} &= \sqrt{b_i} - \sqrt{b_i}\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} y_l^* - \sqrt{b_i}\sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p = \\ &= \sqrt{b_i}\left(1-\sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right) - \sqrt{b_i}\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} \sqrt{\frac{b_l}{b_i}}\, y_i^* = \\ &= \sqrt{b_i}\left(1-\sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right) - y_i^*\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} \sqrt{b_l}\,, \end{aligned} \tag{46}$$

откуда вытекает (37). И, естественно, в данном случае должно быть

$$\frac{\left(1-\sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} \sqrt{b_l} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \in [a_i;\ b_i] \quad \forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}, \tag{47}$$

так как иначе равенство (43) будет выполнено вне гиперпараллелепипеда (7), что нарушит принадлежность в (10). Поэтому требование (38) и неравенства

$$\frac{\left(1-\sum_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}} \sqrt{b_l} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \le b_i \quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\} \tag{48}$$

очевидны. Однако

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\{R\cup T\}} a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}-\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R} a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}-\sum_{p\in\{R\cup T\}}a_p\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}-\sum_{p\in\{R\cup T\}}a_p\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sum_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}\sum_{q\in R}a_q-\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\sum_{q\in R}a_q\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\left(\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{q\in R}a_q\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}-\sum_{t\in T}a_t\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}-\sum_{t\in T}a_t\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}\sum_{q\in R}a_q\right)\left(\sum_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{b_i}\,\frac{\sum\limits_{t\in T}\sqrt{b_t}\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)-\sum\limits_{t\in T}a_t\left(\sum\limits_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}{\left(\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum\limits_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}$$

$$\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\{R\cup T\}\,. \tag{49}$$

Суммируя обе части условия (34) по $t\in T\subset\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R$, получаем

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sum\limits_{t\in T}\sqrt{b_t}}{\sum\limits_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<\sum_{t\in T}a_t\,. \tag{50}$$

В результате имеем отрицательный числитель в дроби (49), и соответственно сама дробь становится отрицательной. Следовательно, значения в требовании (47) меньше значений в левой части (35), что с учетом (17) и теоремы 1 автоматически приводит к (48), оставляя только требование (38) в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Следует отметить, что при $T=\varnothing$ в теореме 2 мы возвращаемся к условиям теоремы 1. Кроме того, неравенство (48) выполняется строго благодаря неравенству

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\{R\cup T\}}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<$$

$$<\frac{\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\le b_i\quad \forall\, i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}\,.$$

Таким образом, какими бы ни были значения в левой части (35), для получения равенства (43) из неравенства (42) компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}}$ необходимо одновременно брать меньшими относительно значений в левой части (35). Констатируем, что одновременность здесь достижима лишь при условии

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in R}a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}>a_i\quad \forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}\,.$$

Если хотя бы одно из условий в (38) нарушено, то равенство (43) не будет выполнено на гиперпараллелепипеде (7) и значения (37) не будут компонентами оптимальной стратегии (10). Компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\{R\cup T\}}$ придется находить снова. Итак, получены те же результаты, которые имеем после теоремы 1. Однонаправленная связь между теоремой 1 и теоремой 2 легко индуцируется для любого этапа поиска компонент стратегии (10) с учетом условий (16) и (17) в следующем утверждении.

**Теорема 3.** Пусть в антагонистической игре с ядром (4) на декартовом произведении (5) гиперпараллелепипедов (6) и (7) для $N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ в условиях

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\in[a_i;\ b_i]\quad \forall\ i\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus R_1 \tag{51}$$

при $R_m\ne\varnothing$, где $m=\overline{1,\ M}$ и $M\in\{\overline{1,\ N-1}\}$, существует непустое множество индексов $R_m\subset\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n$ такое, что

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}a_q\right)\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{u\in\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<a_r\quad \forall\, r\in R_m\subset\{\overline{1,\ N-1}\}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n \tag{52}$$

и

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{q\in\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}a_q\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{u\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}\sqrt{b_u}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\geq a_i\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m}R_n. \tag{53}$$

Тогда в этой игре второй игрок обладает оптимальной стратегией (10) с $\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n$-компонентами

$$y_r^*=a_r\quad\forall\, r\in R_m\subset\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m-1}R_n \tag{54}$$

и компонентами

$$y_i^*=\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m}R_n \tag{55}$$

при

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\geq a_i\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m}R_n. \tag{56}$$

**Доказательство.** При $M=1$ имеем утверждение уже доказанной теоремы 1, где формулы (51), (52), (54)–(56) преобразуются в формулы (17), (16), (18)–(20) соответственно. При $M=2$, обозначая $R=R_1$ и $T=R_2$, получаем утверждение, доказанное в теореме 2, идентифицировав (34), (35), (37), (38) с (52), (53), (55), (56), а также (18) и (36) с (54). Чтобы индуцировать доказательство данного утверждения при $M>2$, достаточно всегда принимать $R=\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n$ и $T=R_m$, где $m=\overline{1,\ M}$. Естественно, количество $M$ ограничено числом непустых непересекающихся подмножеств множества индексов $\overline{\{1,\ N-1\}}$. Если все такие подмножества одноэлементны, то их число максимально; отсюда следует запись $M\in\overline{\{1,\ N-1\}}$ в утверждении данной теоремы. Теорема доказана.

Обобщив теоремы 1 и 2, отмечаем очевидное: наряду с условием (56) выполнено неравенство

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}<$$

$$<\frac{\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\le b_i\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m}R_n$$

при $m=\overline{2,\ M}$. Иными словами, какими бы ни были значения в левой части (53), при условии (52) компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}$ необходимо одновременно брать меньшими относительно значений в левой части (53), причем одновременность достижима лишь при условии, когда

$$\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m-1}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}>a_i\quad\forall i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{m}R_n\ .$$

Если хотя бы одно из условий в (56) будет нарушено, то значения (55) не будут компонентами оптимальной стратегии (10) и компоненты $\{y_i^*\}_{i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{m}R_n}$ придется в теореме 3 искать снова с помощью инкремента индекса $m$, при достижении которым своего максимального значения $M$ оптимальное решение проектировщика (10) будет определено. Тогда

$$y_i^*=\frac{\left(1-\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{n=1}^{M}R_n}a_p\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{l\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{M}R_n}\sqrt{b_l}+\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k}}\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup_{n=1}^{M}R_n$$

при $\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{M}R_n\neq\varnothing$ или $y_i^*=a_i\quad\forall\, i\in\overline{\{1,\ N-1\}}$ в случае, если $\overline{\{1,\ N-1\}}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{M}R_n=\varnothing$.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях данных интервальных неопределенностей $\{[a_j;\ b_j]\}_{j=1}^{N-1}$ применение проектировщиком оптимального решения (10) в обобщенной антагонистической модели (1)–(9) выбора оптимальных площадей поперечных сечений $N$-опорной конструкции-платформы для $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ позволит наилучшим образом распределять нормированные площади поперечных сечений опор платформы. Это будет предотвращать максимальную перегрузку конструкции и улучшать ее эксплуатационные свойства. Доказанные теоремы дополняют теорему о единственной чистой оптимальной стратегии проектировщика [5] в выпуклой игре (1)–(9) с компонентами (13), учитывая возможные переоценки неопределенностей $\{[a_j;\ b_j]\}_{j=1}^{N-1}$, приводящие к неравенствам (16), (34) либо к (52), $m=\overline{1,\ M}$. Здесь особенностью в оптимальном решении проектировщика (10), которое определяется, исходя из первоначальных переоценок типа (16), является то, что неравенство (16) дает не только $r$-е компоненты (18), но и может породить ряд компонент (54) со значениями на левых концах соответствующих интервальных неопределенностей $\{[a_r;\ b_r]\}_{r \in R_m \subset \overline{\{1,\ N-1\}} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m-1} R_n}$, если только выполнены условия теоремы 3 для некоторого $m \in \{\overline{2,\ M}\}$. Однако в интервальных неопределенностях $\{[a_j;\ b_j]\}_{j=1}^{N-1}$ возможны как переоценки, так и недооценки, когда некоторые из значений (13) превосходят соответствующие правые концы этих интервалов. Поэтому перспективным является исследование таких случаев или их упреждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1986. — 607 с.
2. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.
3. Романюк В.В. Теорія антагоністичних ігор. — Львів: Новий Світ – 2000, 2010. — 294 с.
4. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1985. — 272 с.
5. Романюк В.В. Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на $N$-колонну будівельну конструкцію-опору // Проблеми трибології. — 2011. — № 2. — С. 111–114.
6. Романюк В.В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори // Там же. — 2010. — № 3. — С. 18–25.
7. Романюк В.В. Узагальнена модель усунення $N$ часткових невизначеностей імовірнісного типу як континуальна антагоністична гра на $(2N-2)$-вимірному паралелепіпеді з мінімізацією максимального дисбалансу // Вісн. Хмельниц. нац. ун-ту. Техн. науки. — 2011. — № 3. — С. 45–60.
8. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1980. — 320 с.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высш. шк. Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.
10. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций. — М.: Гелиос АРВ, 2006. — 368 с.


*Поступила 16.11.2011*