УДК 519.64:517.443:519.254

О.Н. ЛИТВИН, О.П. НЕЧУЙВИТЕР

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАГРАНЖЕВОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ

Аннотация. Рассматривается кубатурная формула приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующей функции трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерлинации функций с оптимальным выбором узловых плоскостей для приближения неосциллирующего множителя. На классе дифференцируемых действительных функций получена оценка погрешности кубатурной формулы.

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций многих переменных, кубатурные формулы, лагранжевая полиномиальная интерлинация и интерфлетация функций.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций многих переменных является одной из наиболее важных задач цифровой обработки сигналов. В настоящее время возникает необходимость приближенного вычисления таких интегралов с помощью информационных операторов различного типа. В качестве данных могут быть значения функции в узловых точках, следы функции на системе взаимно перпендикулярных линий или плоскостей. Решение такой задачи эффективно может выполнять аппарат интерлинации и интерфлетации функций [1, 2]. Безусловно, актуальным является и вопрос оптимального выбора системы линий или системы плоскостей для соответствующих кубатурных формул на различных классах функций. В частности, ответ на этот вопрос можно получить при построении и исследовании кубатурной формулы приближенного вычисления интеграла

$$I(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2,x_3)\sin\omega x_1 \sin\omega x_2 \sin\omega x_3\, dx_1 dx_2 dx_3$$

с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации функций на классе действительных функций $f(x_1,x_2,x_3)$, определенных на области $G=[-1,1]^3$, и таких, что $|f^{(p_1,p_2,p_3)}(x_1,x_2,x_3)|\le M$, $(x_1,x_2,x_3)\in G$, $1\le p_1, p_2, p_3\le r$.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ В ОБЛАСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

В работах [3–5] исследованы n-мерные осциллирующие интегралы, а также рассмотрены методы их оценки. Задача приближенного вычисления многомерных интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием асимптотических методов, методов Файлона, Левина рассматривалась в работах [6–8]. Отметим, что в этих методах использовалась информация о значениях неосциллирующего множителя в узловых точках сетки «tartan» [6], о следах неосциллирующего множителя внутри и на границе n-мерного куба.

В [9] представлена задача приближенного вычисления 2D коэффициентов Фурье, когда информация о функции $f(x_1,x_2)$ задается значениями в узловых точках, а в [10, 11] такая информация задается значениями функции на следах системы взаимно перпендикулярных прямых. Более детально кубатурные формулы такого типа, а также результаты их тестирования освещены в монографиях [12, 13].

В работе [14] рассматривалось приближенное вычисление 3D коэффициентов Фурье с помощью интерфлетации функций в случае, когда информация о функции $f(x_1, x_2, x_3)$ задана значениями в точках, а в [15] информация задана следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей.

Приближенное вычисление тройного интеграла (без осцилляции) дано в [16]. Информация о подынтегральной функции задавалась ее значениями в точках пересечения плоскостей (плоскости пересекают оси координат в узлах полиномов Чебышева 2-го рода по каждой переменной).

Вопрос построения кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций многих переменных в случае, когда информация о неосциллирующем множителе подынтегральной функции задана следами на системе оптимально выбранных взаимно перпендикулярных плоскостей, впервые рассматривается в настоящей статье.

НАИЛУЧШАЯ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ $L_q[-1,1]^s$, $q = \infty, 1, 2$, $s = 2, 3$, ЛАГРАНЖЕВАЯ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРЛИНАЦИЯ И ИНТЕРФЛЕТАЦИЯ

Рассмотрим некоторые теоремы.

Теорема 1 [2]. Пусть $g(t) \in C^r(I)$, $I = [0, 1]$, $1 \le r \le n$; $L_{n-1}g(t)$ — интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$ функции $g(t)$,

$$L_{n-1}g(t) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\ell_{n-1,k}(t), \quad \ell_{n-1,k}(t) = \prod_{i=1,\, i\ne k}^{n} \frac{t - t_i}{t_k - t_i}, \quad k = \overline{1, n},$$

со свойствами

$$L_{n-1}g(t_k) = g(t_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad -\infty < a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \le b < \infty.$$

Тогда для остатка $R_n g(t) := g(t) - L_{n-1}g(t)$ справедливо интегральное представление

$$R_n g(t) = \sum_{k=1}^{n} \ell_{n-1,k}(t) \int_{t_k}^{t} g^{(r)}(\tau) \frac{(t_k - \tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau.$$

При нахождении наилучшей в $L_q[-1, 1]^3$, $q = \infty, 1, 2$, лагранжевой полиномиальной интерфлетации на системе взаимно перпендикулярных плоскостей необходимо учитывать следующее:

1) остаток приближения $f(x_1, x_2, x_3)$ с помощью оператора интерфлетации равен операторному произведению остатков по каждой переменной в отдельности;

2) полиномы степени n с наименьшим отклонением от нуля в метрике $L_q[-1, 1]$ имеют коэффициентом единицу при старшей степени; полином является решением экстремальной задачи

$$\max_{t \in [-1, 1]} \left| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \right| \to \min_{c_0, \ldots, c_{n-1}}, \quad q = \infty, \quad \int_{-1}^{1} \left| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \right|^q dt \to \min_{c_0, \ldots, c_{n-1}}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Теорема 2 [16]. Если $q = \infty, 1, 2$, то полиномами наилучшего приближения являются соответственно полиномы Чебышева 1-го рода

$$T_{n,1}(t) = \frac{\cos(n \times \arccos t)}{2^{n-1}},$$

полиномы Чебышева 2-го рода

$$T_{n,2}(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{2^n \sqrt{1 - t^2}},$$

полиномы Лежандра
$$L_n(t)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$
Это означает, что при построении полиномиальных интерлинантов [1] в R^2 и интерфлетантов [1] в R^3 необходимо выбирать прямые интерлинации
$$x_k=x_{ki_k},\ i_k=\overline{1,p_k};\ k=1,2,$$
и плоскости интерфлетации
$$x_k=x_{ki_k},\ i_k=\overline{1,p_k};\ k=1,2,3,$$
так, чтобы соответствующие числа $x_k=x_{ki_k}$, $i_k=\overline{1,p_k}$; $k=1,2$, и числа $x_k=x_{ki_k}$, $i_k=\overline{1,p_k}$; $k=1,2,3$, были корнями соответствующих полиномов с наименьшим отклонением. В частности, если $q=1$, то справедлива следующая теорема для функции двух переменных.

Теорема 3 [17]**.** Пусть $p=(p_1,p_2)$, $v(x_1,x_2)\in C^p(J^2)$, $J=[-1,1]$, $D^p=$ $=\dfrac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}$, $B^p=\{g(x)\,|\,g\in C^p(J^2),\ D^p g=0\}$, $E(v)$ — величина наилучшего приближения функции f множеством B^p с нормой $||\cdot||=||\cdot||_{L_1(J^2)}$; $g^*\in B^p$ — элемент наилучшего приближения; прямые интерлинации
$$x_{1i_1}=\cos(i_1\pi/(p_1+1)),\ i_1=\overline{1,p_1},\ x_{2i_2}=\cos(i_2\pi/(p_2+1)),\ i_2=\overline{1,p_2},$$
являются нулями полиномов U_{p_1},U_{p_2} Чебышева 2-го рода соответствующей степени p_1 и p_2:
$$U_m(t)=\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},\ \cos\theta=t,\ m=0,1,\ldots,$$
$l_{kp_ki_k}$ — базисные полиномы Лагранжа, $l_{kp_ki_k}(x_{ki'_k})=\delta_{i_ki'_k}$,
$$g^*(x)=\sum_{i_1=1}^{p_1}f(x_{1i_1},x_2)l_{1p_1i_1}(x_1)+\sum_{i_2=1}^{p_2}f(x_1,x_{2i_2})l_{2p_2i_2}(x_2)-$$
$$-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}f(x_{1i_1},x_{2i_2})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2).\tag{1}$$

Для функции $v(x)$ существует единственный наименее удаленный от нее с нормой $||\cdot||=||\cdot||_\infty$ элемент $g^*\in B^p$; этот элемент имеет вид (1), т.е. является интерлинантом, и интерлинирует $v(x)$ на линиях $x_k=x_{ki_k}$, $i_k=\overline{1,p_k}$; $k=1,2$.

Доказательство этой теоремы изложено в [2, с. 66]. Основная идея заключается в нахождении g^* из условия $||v-g^*||\le||v-g||\ \forall g\in B^p$. Остаток приближения функции $v(x)$ наилучшим элементом имеет вид
$$v(x)-g^*(x)=\frac{U_{p_1}(x_1)U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}p_1!\,p_2!}v^{(p_1,p_2)}(\xi_1,\xi_2),\ (\xi_1,\xi_2)\in J^2,\tag{2}$$
где (ξ_1,ξ_2) — некоторая точка, зависящая от $(x_1,x_2)\in J^2$. Поэтому наименьшее значение величины $||v(x)-g^*(x)||$ достигается на тех g^*, для которых ве-

личина $\|\prod_{k=1}^{2}\prod_{i_k=1}^{p_k}(x_k - x_{ki_k})\|$ является наименьшей. Этому условию удовлетворяют полиномы, узлы которых являются нулями полиномов Чебышева 2-го рода по каждой переменной.

Для функции трех переменных сформулируем аналогичное утверждение.

Теорема 4. Пусть $p=(p_1, p_2, p_3)$, $f(x_1, x_2, x_3) \in C^p(J^3)$, $J=[-1,1]$, $D^p = \frac{\partial^{p_1+p_2+p_3}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}}$, $\widetilde{B}^p = \{\widetilde{g}(x) | \widetilde{g} \in C^p(J^3),\ D^p \widetilde{g} = 0\}$; $E(f)$ — величина наилучшего приближения функции f множеством $\widetilde{B}^p$ с нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_1(J^3)}$; $\widetilde{g}^* \in \widetilde{B}^p$ — элемент наилучшего приближения; плоскости интерфлетации

$$x_{1i_1} = \cos(i_1\pi / (p_1+1)),\ i_1 = \overline{1, p_1},\ x_{2i_2} = \cos(i_2\pi / (p_2+1)),\ i_2 = \overline{1, p_2},$$

$$x_{3i_3} = \cos(i_3\pi / (p_3+1)),\ i_3 = \overline{1, p_3},$$

представляют нули полиномов $U_{p_1}, U_{p_2}, U_{p_3}$ Чебышева 2-го рода соответственной степени p_1, p_2 и p_3:

$$U_m(t) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},\ \cos\theta = t,\ m = 0, 1, \dots,$$

$l_{kp_ki_k}$ — базисные полиномы Лагранжа, $l_{kp_ki_k}(x_{ki'_k}) = \delta_{i_ki'_k}$,

$$\widetilde{g}^* f(x) = \sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1i_1}, x_2, x_3) l_{1p_1i_1}(x_1) + \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1, x_{2i_2}, x_3) l_{2p_2i_2}(x_2) +$$

$$+\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_1, x_2, x_{3i_3}) l_{3p_3i_3}(x_3) - \sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_3) l_{1p_1i_1}(x_1) l_{2p_2i_2}(x_2) -$$

$$-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_{1i_1}, x_2, x_{3i_3}) l_{1p_1i_1}(x_1) l_{3p_3i_3}(x_3) -$$

$$-\sum_{i_2=1}^{p_2}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_1, x_{2i_2}, x_{3i_3}) l_{2p_2i_2}(x_2) l_{3p_3i_3}(x_3) + \tag{3}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3}) l_{1p_1i_1}(x_1) l_{2p_2i_2}(x_2) l_{3p_3i_3}(x_3).$$

Для $f(x)$ существует единственный наименее удаленный от $f(x)$ в норме $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ элемент $\widetilde{g}^* \in B^p$, имеющий вид (3), т.е. является интерфлетантом, и интерфлетирует $f(x)$ на плоскостях $x_k = x_{ki_k}$, $i_k = \overline{1, p_k}$; $k = 1, 2, 3$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы в двумерном случае [2, с. 66]. Остаток приближения функции $f(x)$ наилучшим элементом имеет вид

$$f(x) - \widetilde{g}^* f(x) =$$

$$= \frac{U_{p_1}(x_1) U_{p_2}(x_2) U_{p_3}(x_3)}{2^{p_1+p_2+p_3} p_1! p_2! p_3!} f^{(p_1, p_2, p_3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in J^3, \tag{4}$$

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — некоторая точка, зависящая от $(x_1, x_2, x_3) \in J^3$. Поэтому наименьшее значение величины $\| f(x) - \widetilde{g}^*(x) \|$ достигается на тех $\widetilde{g}^*$, для которых величина $\| \prod_{k=1}^{3} \prod_{i_k=1}^{p_k} (x_k - x_{ki_k}) \|$ является наименьшей. Этому условию удовлетворяют полиномы, узлы которых являются нулями полиномов Чебышева 2-го рода по каждой переменной.

Теорема 4 доказана.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАГРАНЖЕВОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

Для приближенного вычисления интеграла

$$I(f,\omega) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2, x_3) \sin\omega x_1 \sin\omega x_2 \sin\omega x_3 \, dx_1 dx_2 dx_3$$

предлагается кубатурная формула

$$\widetilde{I}(f,\omega) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \widetilde{g}^* f(x_1, x_2, x_3) \sin\omega x_1 \sin\omega x_2 \sin\omega x_3 \, dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $\widetilde{g}^* f(x_1, x_2, x_3)$ задается формулой (3).

В развернутом виде кубатурная формула имеет вид

$$\widetilde{I}(f,\omega) = \sum_{i_1=1}^{p_1} \int_{-1}^{1} l_{1_{p_1} i_1}(x_1) \sin\omega x_1 dx_1 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_{1i_1}, x_2, x_3) \sin\omega x_2 \sin\omega x_3 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{p_2} \int_{-1}^{1} l_{2_{p_2} i_2}(x_2) \sin\omega x_2 dx_2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_{2i_2}, x_3) \sin\omega x_1 \sin\omega x_3 dx_1 dx_3 +$$

$$+ \sum_{i_3=1}^{p_3} \int_{-1}^{1} l_{3_{p_3} i_3}(x_3) \sin\omega x_3 dx_3 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2, x_{3i_3}) \sin\omega x_1 \sin\omega x_2 dx_1 dx_2 -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \int_{-1}^{1} l_{1p_1i_1}(x_1) \sin\omega x_1 dx_1 \int_{-1}^{1} l_{2p_2i_2}(x_2) \sin\omega x_2 dx_2 \int_{-1}^{1} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_3) \sin\omega x_3 dx_3 -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_3=1}^{p_3} \int_{-1}^{1} l_{1p_1i_1}(x_1) \sin\omega x_1 dx_1 \int_{-1}^{1} l_{3p_3i_3}(x_3) \sin\omega x_3 dx_3 \int_{-1}^{1} f(x_{1i_1}, x_2, x_{3i_3}) \sin\omega x_2 dx_2 -$$

$$- \sum_{i_2=1}^{p_2} \sum_{i_3=1}^{p_3} \int_{-1}^{1} l_{2p_2i_2}(x_2) \sin\omega x_2 dx_2 \int_{-1}^{1} l_{3p_3i_3}(x_3) \sin\omega x_3 dx_3 \int_{-1}^{1} f(x_1, x_{2i_2}, x_{3i_3}) \sin\omega x_1 dx_1 +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} l_{1p_1i_1}(x_1) \sin\omega x_1 dx_1 \int_{-1}^{1} l_{2p_2i_2}(x_2) \sin\omega x_2 dx_2 \int_{-1}^{1} l_{3p_3i_3}(x_3) \sin\omega x_3 dx_3 .$$

Теорема 5. Справедлива следующая оценка погрешности приближения интеграла $I(f,\omega)$ кубатурной формулой $\widetilde{I}(f,\omega)$ при условии, что все интегралы в кубатурной формуле вычисляются точно:

$$|I(f,\omega)-\widetilde{I}(f,\omega)| \le \frac{M}{2^{p_1+p_2+p_3-3}\, p_1!\, p_2!\, p_3!}.$$

Доказательство. Найдем оценку погрешности приближения. Имеем

$$|I(f,\omega)-\widetilde{I}(f,\omega)| \le \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x_1,x_2,x_3)-\widetilde{g}^{\,*} f(x_1,x_2,x_3)|\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left| \frac{U_{p_1}(x_1) U_{p_2}(x_2) U_{p_3}(x_3)}{2^{p_1+p_2+p_3}\, p_1!\, p_2!\, p_3!} f^{(p_1,p_2,p_3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \right| dx_1 dx_2 dx_3 \le$$

$$\le \frac{M}{2^{p_1+p_2+p_3}\, p_1!\, p_2!\, p_3!} \int_{-1}^{1} |U_{p_1}(x_1)|\, dx_1 \int_{-1}^{1} |U_{p_2}(x_2)|\, dx_2 \int_{-1}^{1} |U_{p_3}(x_3)|\, dx_3 =$$

$$= \frac{M}{2^{p_1+p_2+p_3-3}\, p_1!\, p_2!\, p_3!}.$$

Теорема 5 доказана.

О КАЧЕСТВЕ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ $\widetilde{I}(f,\omega)$

Важной характеристикой при построении кубатурных формул является оптимальность по точности. Покажем, что кубатурная формула $\widetilde{I}(f,\omega)$ является оптимальной по порядку точности. Для приближенного вычисления интеграла $I(f,\omega)$ будем рассматривать множество кубатурных формул ℓ_N, в которых используется информация о функции не более чем на N плоскостях.

Пусть $R(f,\omega,\ell_N)$ — погрешность приближенного вычисления интеграла $I(f,\omega)$ кубатурной формулой ℓ_N: $R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N(f)$.

Погрешностью кубатурной формулы ℓ_N на классе F называют величину

$$R(F,\omega,\ell_N) = \sup_{f(x)\in F} |R(f,\omega,\ell_N)|.$$

Оптимальной погрешностью численного интегрирования на классе называют $R(F,\omega)=\inf_{\ell_N\in L_N} R(F,\omega,\ell_N)$. Для получения оценок снизу величины $R(F,\omega,\ell_N)$ используют метод «шапочек». Сравнивая оценки сверху и снизу, можно сделать вывод о качестве кубатурной формулы.

В [12] приведены оптимальные и близкие к ним квадратурные и кубатурные формулы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. В частности (как и в [18]), показано, что квадратурная формула, которая использует в своем построении многочлен Лагранжа, является оптимальной по порядку точности. Покажем, что кубатурная формула $\widetilde{I}(f,\omega)$ также является оптимальной по порядку точности.

Теорема 6 [19]**.** В случае, когда информация о функции задана на $N=3\ell$ плоскостях: $x_1=x_{i_1}$, $i_1=\overline{1,\ell}$; $x_2=x_{i_2}$, $i_2=\overline{1,\ell}$; $x_3=x_{i_3}$, $i_3=\overline{1,\ell}$, на классе действительных функций трех переменных, определенных на $G=[-1,1]^3$, и таких, что $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)|\le M$, справедлива следующая оценка для погрешности вычисления интеграла $I(f,\omega)$ при $\ell \geq \omega$:

$$R(F,\omega) \geq \frac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3} \frac{1}{2^{3r}} \frac{1}{N^{3r}}, \; r = 1, 2, \ldots$$

Теорема 7. Кубатурная формула $\widetilde{I}(f,\omega)$ является оптимальной по порядку точности при $p_1 = p_2 = p_3 = p, \; p \geq \omega$.

Доказательство. Из теоремы 5 и неравенства Стирлинга имеем

$$R(f,\omega,\widetilde{I}) \leq \frac{M}{2^{3p-3}(p!)^3} \leq \frac{M}{2^{3p-3} e^{-3p} \sqrt{8\pi^3 p^3} \, p^{3p}}.$$

Если записать оценку теоремы 6 в условиях теоремы 5 ($r = p, \; N = p$), то получим

$$\frac{M(p!)^3}{1728[(2p+1)!]^3} \frac{1}{6^{3p}} \frac{1}{p^{3p}} \leq R(f,\omega,\widetilde{I}).$$

А значит, при $p \geq \omega$ справедливо неравенство

$$C_1(p) \frac{M}{p^{3p}} \leq R(f,\omega,\widetilde{I}) \leq C_2(p) \frac{M}{p^{3p}},$$

$$C_1(p) = \frac{(p!)^3}{1728[(2p+1)!]^3} \frac{1}{6^{3p}}, \; C_2(p) = \frac{1}{2^{3p-3} e^{-3p} \sqrt{8\pi^3 p^3}},$$

что и доказывает теорему 7.

О ПОЛНОЙ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ $\widetilde{I}(f,\omega)$

Во многих работах, где рассматриваются квадратурные и кубатурные формулы приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций, исследуется только один вид погрешности — погрешность метода. Как правило, на практике важна не только погрешность метода, но и неустранимая погрешность и погрешность округления. В [12] проиллюстрирована общая схема нахождения полной погрешности приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций одной переменной. Согласно этой схеме изложим общий подход к получению полной погрешности предложенной кубатурной формулы $\widetilde{I}(f,\omega)$.

В теореме 7 рассмотрена кубатурная формула $\widetilde{I}(f,\omega)$, которая является оптимальной по порядку точности, а также получена оценка погрешности метода. В кубатурной формуле $\widetilde{I}(f,\omega)$, как и во многих других оптимальных и близких к ним формулам, рассмотрен случай точного задания входной информации. Другими словами, неустранимая погрешность кубатурной формулы $\widetilde{I}(f,\omega)$ равна нулю.

Известные оценки погрешности округления квадратурных и кубатурных формул используют, как правило, классические подходы [20]. С распространением в бесплатном доступе библиотеки программ GNU GMP [21], реализующей стандарт IEEE 754 [22], появились методы оценки погрешности округления решения задач вычислительной математики в арифметике с плавающей запятой, основанные на сравнении решений с изменяемой длиной мантиссы машинного числа [23]. Для оценки погрешности округления кубатурной формулы $\widetilde{I}(f,\omega)$ воспользуемся оценкой погрешности округления по совпадению первых десятичных знаков (СПЗ) решений с различной длиной мантиссы [23, с. 166–168].

Пусть A — неизвестное точное конечное или бесконечное число; a — его известное приближение с известной погрешностью $\Delta: |A-a| \le \Delta$; a_1 — другое приближение такое, что $a = a_1 + \alpha$, где $|\alpha| < |a|$ и $|A - a_1| \le \Delta + |\alpha|$. Предположим, что мантисса числа a имеет m десятичных знаков. Представим числа a, a_1, α в виде $a = \pm \mu \cdot 10^e = \pm \left(\sum_{i=1}^{m} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e = a_1 + \alpha$; $a_1 = \pm \left(\sum_{i=1}^{t} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e$; $\alpha = \alpha^t =$ $= \pm \left(\sum_{i=t+1}^{m} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e$, e — порядок числа, $1 \le t \le m$. Разбиение числа a на a_1 и α называется сечением числа по мантиссе. Число α называется погрешностью округления числа a_1, а $|\alpha|$ — ошибка сечения числа a. Способ округления числа сечением по мантиссе называют методом отбрасывания [24]. Значение числа t_0, которое гарантирует достижение точности ε_A, рационально определять из условия $t_0 = \min t$, если $\Delta + |\alpha^t| \le \varepsilon_A$.

Рассмотрим v значений функций $\varphi_j(u) = \pm \left(\sum_{i=1}^{k} s_i^j \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e$, $j = \overline{1, v}$, $v \ge 2$, k — натуральное число или $k = \infty$. Считают, что в функциях $\varphi_j(u)$ совпадают t первых знаков, если $s_i^1 = s_i^2 = \ldots = s_i^t$, $i = \overline{1, t}$.

Если $w(u) \in R^1$, $w(u) = \pm \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e = w^t(u) + h^t(u)$, $w^t(u) =$ $= \pm \left(\sum_{i=1}^{t} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e$, $h^t(u) = \pm \left(\sum_{i=t+1}^{\infty} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e$, $w_m(u)$ — вычисленное $w(u)$ при длине мантиссы m, $\Delta_m = w(u) - w_m(u)$, то имеет место теорема об оценках погрешности метода округления решения по совпадению t первых десятичных знаков.

Теорема 8 [23] (об оценках погрешности метода округления решения). Пусть $h_m^t(u) = w_m(u) - w^t(u)$, $|h_m^t(u)| < 1 \cdot 10^{e-t}$, $|\Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$. Для того чтобы решения $w(u)$ и $w_m(u)$ имели t СПЗ, необходимо и достаточно, чтобы $0 \le |h_m^t(u) - \Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$, причем если $h_m^t(u)$ и Δ_m имеют разные знаки, то должно выполняться условие $|h_m^t(u) - \Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$, а если одинаковые знаки, то условие $|h_m^t(u)| \ge |\Delta_m|$. Погрешность решения $w^t(u)$ удовлетворяет условию $|w^t(u) - w(u)| < 1 \cdot 10^{e-t}$.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$. Тогда $|f^{(p_1, p_2, p_3)}(x, y, z)| \le 1$. В табл. 1 даны приближенные значения интегралов $I(f, \omega)$, вычисленные по кубатурной формуле $\widetilde{I}(f, \omega)$, для различных p_1, p_2, p_3 и $\omega = \pi m$, $m = 1, 2, \ldots$ Пусть $\varepsilon = (2^{p_1 + p_2 + p_3 - 3}(p_1)!(p_2)!(p_3)!)^{-1}$. Выпишем точные значения интегралов:

$$I(f, 3\pi) = -0{,}005890402526294; \quad I(f, 4\pi) = 0{,}002448243846718.$$

В табл. 2 отражены результаты применения оценки из теоремы 8, когда $w = I(f, \omega)$, $w_m = \widetilde{I}(f, \omega)$, вычисленные при разной длине мантиссы.

Будем считать, что $w = I(f, 2\pi) = 0{,}20753694393113347 \cdot 10^{-1}$, $w_m = \widetilde{I}_m(f, 2\pi)$, $w^t = I^t(f, 2\pi)$, $h_m^t = w_m - w^t$, $\Delta_m = w_m - w$. В данном вычислительном эксперименте w — точное значение интеграла, однако в качестве w можно рассматривать и приближенно вычисленное значение интеграла при другой длине мантиссы.

Таблица 1. Результаты вычисления $I(f,\omega)$ по кубатурной формуле $\widetilde{I}(f,\omega)$

ω	Количество плоскостей при p			Погрешность $\lvert I(f,\omega)-\widetilde{I}(f,\omega)\rvert$	Оценка погрешности, ε
	p_1	p_2	p_3		
3π	4	4	4	$1.8\cdot10^{-11}$	$1.4\cdot10^{-7}$
		5	5	$1.5\cdot10^{-12}$	$1.4\cdot10^{-9}$
		5	6	$2.3\cdot10^{-14}$	$1.1\cdot10^{-10}$
4π	4	4	4	$2.2\cdot10^{-11}$	$1.4\cdot10^{-7}$
		5	5	$4.8\cdot10^{-12}$	$1.4\cdot10^{-9}$
		5	6	$1.8\cdot10^{-14}$	$1.1\cdot10^{-10}$
		6	6	$2.2\cdot10^{-15}$	$9.8\cdot10^{-12}$
		6	7	$2.3\cdot10^{-15}$	$0.7\cdot10^{-12}$
		6	8	$1.1\cdot10^{-15}$	$4.4\cdot10^{-14}$
4π	5	5	5	$2.3\cdot10^{-12}$	$1.4\cdot10^{-10}$
		5	6	$8.8\cdot10^{-15}$	$1.1\cdot10^{-11}$
		5	7	$5.0\cdot10^{-15}$	$8.4\cdot10^{-13}$
		6	6	$1.6\cdot10^{-15}$	$9.8\cdot10^{-13}$
		6	7	$1.6\cdot10^{-15}$	$7.0\cdot10^{-14}$
4π	6	6	6	$1.9\cdot10^{-15}$	$8.2\cdot10^{-14}$
		6	7	$1.8\cdot10^{-15}$	$5.8\cdot10^{-15}$

В табл. 2 значения t_i СПЗ выделены жирным шрифтом. Числа t_i СПЗ для решений $w_{m_i}=\widetilde{I}_{m_i}(f,2\pi)$ следующие: $t_1=4$, $t_2=5$, $t_3=7$, $t_4=7$, $t_5=8$, $t_6=10$, $t_7=13$. Справедливы следующие оценки для погрешностей решений и погрешностей округления:

$$\Delta_i=\lvert I(f,2\pi)-I^{t_i}(f,2\pi)\rvert\le 1\cdot10^{e-t_i},\quad \lvert h_m^{t_i}\rvert=\lvert I_m(f,2\pi)-I^{t_i}(f,2\pi)\rvert\le 1\cdot10^{e-t_i}.$$

Таблица 2. Результаты вычисления $I(f,2\pi)$ по формуле $\widetilde{I}(f,2\pi)$ при различных значениях m

Количество плоскостей при p				Значение $w_m=\widetilde{I}_m(f,2\pi)$	Погрешность округления $\lvert h_m^t\rvert=\lvert w_m-w^t\rvert$	Погрешность решения $\lvert\Delta_m\rvert=\lvert w_m-w\rvert$
p_1	p_2	p_3	m			
3	3	3	6	**0,2075**92 $\cdot10^{-1}$	$0{,}9\cdot10^{-5}$	$0{,}5\cdot10^{-5}$
4	3	3	6	**0,20753**7 $\cdot10^{-1}$	$0{,}7\cdot10^{-6}$	$0{,}56\cdot10^{-8}$
4	3	3	9	**0,2075369**73 $\cdot10^{-1}$	$0{,}73\cdot10^{-8}$	$0{,}29\cdot10^{-8}$
4	4	3	9	**0,2075369**44 $\cdot10^{-1}$	$0{,}39\cdot10^{-9}$	$0{,}68\cdot10^{-11}$
4	4	3	13	**0,2075369439**5 $\cdot10^{-1}$	$0{,}5\cdot10^{-11}$	$0{,}18\cdot10^{-11}$
4	4	4	14	**0,2075369439311**4 $\cdot10^{-1}$	$0{,}4\cdot10^{-14}$	$0{,}69\cdot10^{-15}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена кубатурная формула приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующей функции трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерлинации функций с оптимальным выбором узловых плоскостей для приближения неосциллирующего множителя на классе действительных функций, определенных на $G=[-1,1]^3$, и таких, что $\lvert f^{(p_1,p_2,p_3)}(x_1,x_2,x_3)\rvert\le M$. Получена оценка погрешности кубатурной формулы. Численный эксперимент подтверждает теоретические результаты работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. — Харків.: Основа, 2002. — 544 с.
2. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Навчальний посібник. — К.: Наук. думка, 2005. – 331 с.

3. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. Математика. — 1979. — **43**, № 5. — С. 971–1003.
4. Попов Д.А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // УМН. — 1997. — **52**, вып. 1 (313). — С. 77–148.
5. Чахкиев М.А. Оценки осциллирующих интегралов с выпуклой фазой // Изв. РАН. Сер. Математика. — 2006. — **70**, № 1. — С. 183–220.
6. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation III: Multivariate expansions, Techn. Report NA2007 / 01, DAMPT. — Univ. of Cambridge, 2007. — 37 c.
7. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation IV: Accelerating Convergence, Tech. Report NA2007/1, DAMPT. — University of Cambridge, 2007. — 24 c.
8. Adcock B. Convergence acceleration of Fourier-like series in one or more dimensions, Tech. Report NA2008/11, DAMPT. — Univ. of Cambridge, 2008. — 25 c.
9. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. — 1998. — № 1. — С. 23–28.
10. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Там же. — 2006. — № 6. — С. 9–13.
11. Lytvyn O.N., Nechuyviter O.P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proc. of the IASTED Intern. Conf. Automation, Control, and Inform. Technology (ASIT 2010) (June 15–18, 2010). — Novosibirsk, 2010. — P. 90–96.
12. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. — Т. 1: Алгоритми. — Київ: Наук. думка, 2011. — 447 с.
13. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. — Т. 2: Застосування. — Київ: Наук. думка, 2011. — 348 с.
14. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вест. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Сб. науч. тр. Темат. вып. «Автоматика и приборостроение». — 2005. — **38**. — С. 90–130.
15. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Точні кубатурні формули наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних // Пробл. машиностроения. — 2011. — **14**, № 3. — С. 56–66.
16. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ, 1976. — 304 с.
17. Haussmann W., Zeller K. Blending interpolation and the best L^1-approximation // Arch. Math. (Basel). — 1983. — **40**, N 6. — P. 545–552.
18. Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // ЖВМ и МФ. — 1978. — **18**, № 2. — С. 294–301.
19. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Про оцінку знизу для оптимальної похибки чисельного інтегрування на класі диференційованих функцій двох та трьох змінних // Поступ в науку. Зб. наук. праць Бучацького ін-ту менеджменту і аудиту. — 2010. — № 6. — С. 130–133.
20. Wilkinson J.H. Rounding Errors in algebraic processes. — Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, 1963.
21. GNU GMP: Multiple precision arithmetic library / http://gmplib.org/.
22. IEEE 754-2008: 754-2008 IEEE standard for floating-point arithmetic. — ISBN: 978-0-7381-5753-5.
23. Бирюков А.Г., Гриневич А.И. Метод оценки погрешностей округления решений задач вычислительной математики в арифметике с плавающей запятой, основанный на сравнении решений с изменяемой длиной мантиссы машинного числа // Тр. МФТИ. — 2013. — **5**, № 2. — С. 160–174.
24. Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1984. — Т. 4.

Поступила 03.05.2012
После доработки 05.12. 2013