

## ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПОНОВКИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ КРАТЧАЙШИХ РАССТОЯНИЙ

**Аннотация.** Рассмотрена оптимизационная задача размещения 3D объектов в многосвязной области, образованной круговым цилиндром и зонами запрета в виде прямых прямоугольных призм. При этом накладываются ограничения на минимально допустимые расстояния между объектами. Для построения математической модели задачи использован метод Ф-функций. В целях получения различных начальных точек предложен подход, основанный на решении вспомогательной задачи с увеличенной размерностью пространства решений. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, задача компоновки, оптимизация, 3D объекты.

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях науки и техники среди интенсивно решаемых в последние десятилетия задач можно выделить задачи поиска наиболее выгодного взаимного расположения объектов различной природы, а именно задачи автоматизированной компоновки различного оборудования [1], компоновки приборов отсеков летательных аппаратов [2], автоматического проектирования генеральных планов на этапе компоновки и объемно-планировочного решения цехов промышленных предприятий [3], конструкторского проектирования теплоэнергетических комплексов и многие другие. В большинстве случаев такие задачи, как правило, отличаются огромным количеством возможных вариантов допустимых решений, неизвестными характеристиками наилучшего варианта решения, большим объемом исходной информации и т.п.

Анализ работ [1–6], в которых исследуются проблемы упаковки трехмерных геометрических объектов, позволяет сделать вывод, что сложность решения рассматриваемой задачи обусловлена отсутствием адекватных математических моделей и эффективных методов ее решения. Из-за высокой вычислительной сложности задач размещения для их решения в большинстве случаев используются эвристические подходы, т.е. вместо полного перебора вариантов, занимающего существенное время (или технически невозможного), применяется значительно более быстрый, но недостаточно обоснованный теоретически, алгоритм. Поскольку эвристические методы не полностью математически обоснованы, они не гарантируют нахождения оптимального решения. Поэтому актуальной задачей является построение адекватных математических моделей, а также совершенствование существующих и разработка новых методов решения задач размещения трехмерных геометрических объектов.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математической формулировки рассматриваемой задачи необходимо выполнить, как минимум, три этапа: описать объекты компоновки; предложить критерий оптимизации; построить математическую модель задачи. От корректного описания объектов компоновки во многом зависит время решения задачи и его качество.

© Ю.Г. Стоян, В.В. Сёмкин, А.М. Чугай, 2014

Пусть задано множество 3D объектов  $O_i \in R^3$ ,  $i \in I = \bigcup_{k=1}^6 I_k$ . Объект  $O_i$  в за-

висимости от значения индекса  $i$  является одним из следующих множеств:

- шаром  $S_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - (r_i^0)^2 \leq 0\}$ ,  $i \in I_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$ ;
- цилиндром  $C_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - (r_i^0)^2 \leq 0, -h_i^0 \leq z \leq h_i^0\}$ ,  $i \in I_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_2 = n_1 + N_2\}$ ;
- параллелепипедом  $P_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : -a_i^0 \leq x \leq a_i^0, -b_i^0 \leq y \leq b_i^0, -c_i^0 \leq z \leq c_i^0\}$ ,  $i \in I_3 = \{n_2 + 1, \dots, n_3 = n_2 + N_3\}$ ;
- сферическим сегментом  $G_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + (z + \tau_{i1}^0)^2 - (\rho_{i1}^0)^2 \leq 0, -z \leq 0\}$ ,  $i \in I_4 = I_4^1 \cup I_4^2 = \{n_3 + 1, \dots, n_4 = n_3 + N_4\}$ ;
- сферическим сегментом  $\check{G}_i = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + (z - \tau_{i2}^0)^2 - (\rho_{i2}^0)^2 \leq 0, z \leq 0\}$ ,  $i \in I_5 = I_5^1 \cup I_5^2 = \{n_4 + 1, \dots, n_5 = n_4 + N_5\}$ , где  $\tau_{qj}^0 = \rho_{qj}^0 - w_{qj}^0$ ,  $w_{qj}^0 \in (0, 2\rho_{qj}^0)$  — высота сегмента,  $q \in I_4 \cup I_5$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , а подмножества индексов  $I_4^1, I_4^2 \subset I_4$ ,  $I_4^1 \cap I_4^2 = \emptyset$ ,  $I_5^1, I_5^2 \subset I_5$ ,  $I_5^1 \cap I_5^2 = \emptyset$  такие, что выполнены неравенства  $\rho_{\alpha_1 1}^0 - w_{\alpha_1 1}^0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 \in I_4^1$ ,  $w_{\alpha_2 1} - \rho_{\alpha_2 1} > 0$ ,  $\alpha_2 \in I_4^2$ ,  $\rho_{\beta_1 2}^0 - w_{\beta_1 2}^0 \geq 0$ ,  $\beta_1 \in I_5^1$ ,  $w_{\beta_2 2} - \rho_{\beta_2 2} > 0$ ,  $\beta_2 \in I_5^2$ , причем  $\text{card}(I_p^k) = N_p^k$ ,  $N_p^1 + N_p^2 = N_p$ ,  $k \in \{1, 2\}$ ,  $p \in \{4, 5\}$ ;
- сфероцилиндром  $SC_i = C_i \cup G_i \cup \check{G}_i$ ,  $i \in I_6 = \{n_5 + 1, \dots, n = n_5 + N_6\}$ , где  $\tau_{ij} = \rho_{ij}^0 - w_{ij}^0$ ,  $w_{ij}^0, \rho_{ij}^0 = \frac{(r_i^0)^2 + (w_{ij}^0)^2}{2w_{ij}^0}$ ,  $j = 1, 2$ , — высоты сферических сегментов.

Объекты  $O_i$ ,  $i \in I$ , допускают только аффинные преобразования трансляции. Объект  $O_i$ ,  $i \in I$ , транслированный на вектор  $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$ , обозначим  $O_i(u_i)$ . Вектор  $u = (u_1, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_2}, \dots, u_{n_3}, \dots, u_n) \in R^{3n}$  определяет положение всех объектов в  $R^3$ .

Задана также многосвязная область размещения  $Y \in R^3$ , представляемая в виде

$$Y = \text{cl} \left( C \setminus \left( \bigcup_{t=1}^{\sigma} \Lambda_t \right) \right), \quad (1)$$

где  $\text{cl}D$  — замыкание множества  $D$ ,  $C = \{X = (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - r^2 \leq 0, 0 \leq z \leq h\}$ ,  $\Lambda_t = \{X = (x, y, z) \in R^3 : -a_t^\Lambda \leq x \leq a_t^\Lambda, -b_t^\Lambda \leq y \leq b_t^\Lambda, 0 \leq z \leq h\}$  — прямые прямоугольные призмы, являющиеся зонами запрета на размещение объектов. Контейнер  $Y$  высоты  $h$  обозначим  $Y(h)$ . Начало собственной системы координат  $\Lambda_t$  находится в точке  $u_t^\Lambda = (x_t^\Lambda, y_t^\Lambda, 0) \in R^3$ ,  $t \in I_\sigma = \{1, \dots, \sigma\}$ .

Ограничения на область допустимых решений в задачах компоновки можно сформулировать в виде условий непересечения объектов между собой и расположения объектов внутри области размещения, а также объектов на минимально допустимых расстояниях (для устранения механических, тепловых, электрических и других воздействий одного объекта на другой). Полагаем, что минимально допустимое расстояние между объектами  $A$  и  $B$  определяется следующим образом:  $d = \rho(A, B) = \min_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(O_i, O_j) = d_{ij}, \quad 0 < i < j \in I, \quad \rho(O_k, \Lambda_t) = d_k^t, \\ \rho(O_k, \bar{C}) = d_k, \quad \rho(O_k, \underline{C}) = d_k^U, \quad \rho(O_k, \underline{C}) = d_k^L, \quad k \in I, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\bar{C}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{C}$  — соответственно боковая, верхняя и нижняя грани цилиндра  $C$ .

Сформулируем задачу: найти вектор  $u \in R^{3n}$  такой, что объекты  $O_i, i \in I$ , содержатся в контейнере  $Y(h)$  с учетом заданных минимальных расстояний и его высота  $h$  достигает минимума.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Для построения адекватной математической модели воспользуемся аппаратом нормализованных Ф-функций [7–11]. Тогда математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$h^* = \min h, \quad (u, h) \in W \subset R^{3n+1}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} W = \{(u, h) \in R^{3n+1} : \Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j) - d_{ij} \geq 0, \quad \Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k) - d_k^t \geq 0, \quad \Phi_k^O(u_k) - d_k \geq 0, \\ L_k^O(u_k, h) - d_k^L \geq 0, \quad U_k^O(u_k, h) - d_k^U \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \quad k \in I, \quad t \in I_\sigma\}, \end{aligned} \quad (4)$$

функция  $\Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j)$  является нормализованной Ф-функцией объектов  $O_i(u_i)$  и  $O_j(u_j)$ , а неравенство  $\Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j) - d_{ij} \geq 0$  обеспечивает такое размещение этих объектов, при котором расстояние между ними не меньше величины  $d_{ij}$ ; функция  $\Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k)$  — нормализованная Ф-функция объектов  $O_k(u_k)$  и  $\Lambda_t(u_t^\Lambda)$ , неравенство  $\Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k) - d_k^t \geq 0$  гарантирует такое размещение объекта  $O_k(u_k)$ , что его расстояние до зоны запрета  $\Lambda_t$  не меньше  $d_k^t$ ; условия  $\Phi_k^O(u_k) - d_k \geq 0$ ,  $L_k^O(u_k, h) - d_k^L \geq 0$ ,  $U_k^O(u_k, h) - d_k^U \geq 0$  описывают такое расположение объекта  $O_k(u_k)$  в области  $Y(h)$ , при котором соблюдены условия на расстояния между этим объектом и боковой, нижней и верхней гранями цилиндра  $C$  соответственно.

Для построенной математической модели отметим некоторые важные особенности, обусловившие выбор метода решения задачи:

- задача (3), (4) является задачей обратно-выпуклого программирования [12], поскольку неравенства из системы (4) задают дополнения выпуклых множеств до  $R^{3n+1}$ ;
- левые части неравенств, формирующие область допустимых решений задачи, являются непрерывно-дифференцируемыми функциями;
- для выполнения каждого из неравенств, формирующих систему (4), необходимо, чтобы выполнялась хотя бы одна из структур неравенств, образующих соответствующие Ф-функции [8–11];
- область допустимых решений задачи (3), (4) в общем случае есть несвязное множество, а каждая компонента связности многосвязна и имеет «овражный» характер;
- область допустимых решений можно представить в виде объединения конечного числа невыпуклых подобластей, каждая из которых формируется в общем случае линейными и нелинейными ограничениями; такое представление области теоретически позволяет свести решение задачи (3), (4) к решению последовательности подзадач нелинейного программирования на каждой подобласти (при этом каждая такая подзадача, в свою очередь, многоэкстремальна);

- для доказательства того, что найденная точка — точка локального экстремума для всей области, необходимо доказать, что она является точкой локального экстремума для каждой подобласти, которой эта точка принадлежит;
- локальные экстремумы могут быть нестрогими;
- матрица систем неравенств блочная и имеет разреженный вид;
- задача (3), (4) относится к классу NP-трудных [13].

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Разработанный в данной работе подход к поиску решения задачи предполагает выполнение следующих этапов: построение начальных точек, поиск локальных экстремумов и их перебор.

При решении оптимизационных задач размещения геометрических объектов для получения начальных точек, как правило, используются различные «жадные» алгоритмы. Однако эти алгоритмы не гарантируют получения любых начальных точек. Кроме того, вычислительные затраты для построения начальных точек значительно возрастают в трехмерном случае. В связи с этим предлагается следующий подход.

**Построение начальных точек и поиск локальных минимумов задачи (3), (4).** Положим, что метрические характеристики рассматриваемых объектов являются переменными. Сформируем вектор этих метрических характеристик:  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_\omega) \in R^\omega$ , где  $\gamma_i$  — вектор метрических характеристик объекта  $O_i$ ;  $\gamma_i = r_i$ , если  $i \in I_1$ ;  $\gamma_i = (r_i, h_i)$ , если  $i \in I_2$ ;  $\gamma_i = (a_i, b_i, c_i)$ , если  $i \in I_3$ ;  $\gamma_i = (\rho_i, w_i)$ , если  $i \in I_4$  или  $i \in I_5$ ;  $\gamma_i = (r_i, h_i, w_{i1}, w_{i2})$ , если  $i \in I_6$ ,  $\omega = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 4n_6$ . Тогда  $(X, h) = (u, \gamma, h) \in R^{3n+\omega+1}$  — вектор переменных.

Обозначим  $\gamma_i^0$  векторы исходных значений метрических характеристик объектов  $O_i$ ,  $i \in I$ , т.е.  $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0) = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_\omega^0) \in R^\omega$ .

Для получения начальной точки зададим высоту  $h = h^0$  (при этом величина  $h^0$  выбирается таким образом, что объекты гарантированно размещаются в области  $\Upsilon(h^0)$ ). Сформируем точку  $X' = (u', \xi)$ , где вектор  $u'$  генерируется случайным образом так, что  $u'_i \in \Upsilon(h^0)$ ,  $i \in I$ , и  $0,01 \cdot \gamma_i^0 > \xi_i > 0$ ,  $i \in I$ .

Сформулируем следующую задачу:

$$F(\tilde{\gamma}) = \max F(\gamma), \quad X \in \Omega \subset R^{3n+\omega}, \quad (5)$$

где

$$F(\gamma) = \sum_{i \in I_\omega} \gamma_i, \quad I_\omega = \{1, 2, \dots, \omega\},$$

$$\Omega = \{X = (u, \gamma) \in R^{3n+\omega} : \Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j, \gamma_i, \gamma_j) - d_{ij} \geq 0, \Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k, \gamma_k) - d_k^t \geq 0,$$

$$\Phi_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k \geq 0, L_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k^L \geq 0, U_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k^U \geq 0,$$

$$\gamma_q^0 - \gamma_q \geq 0, \gamma_q \geq 0, \quad (6)$$

$$\rho_{\alpha_1 1} - w_{\alpha_1 1} \geq 0, w_{\alpha_2 1} - \rho_{\alpha_2 1} \geq 0, \rho_{\beta_1 2} - w_{\beta_1 2} \geq 0,$$

$$w_{\beta_2 2} - \rho_{\beta_2 2} \geq 0, r_s - w_{s1} \geq 0, r_s - w_{s2} \geq 0,$$

$$0 < i < j \in I, k \in I, q \in I_\omega, s \in I_6, \alpha_1 \in I_4^1, \alpha_2 \in I_4^2, \beta_1 \in I_5^1, \beta_2 \in I_5^2, t \in I_\sigma\}.$$

Цель решения данной задачи — поиск такого размещения объектов в области, при котором сумма их метрических характеристик достигает максимума.

Если  $(u', h^0) \notin W$ , то решаем задачу

$$\chi^* = \max \chi, (X, \chi) \in \Psi \subset R^{3n+\omega+1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi = \{ & (X, \chi) = (u, \gamma, \chi) \in R^{3n+\omega+1} : \Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j, \gamma_i, \gamma_j) - d_{ij} - \chi \geq 0, \\ & \Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k, \gamma_k) - d_k^t - \chi \geq 0, \Phi_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k - \chi \geq 0, \\ & L_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k^L - \chi \geq 0, U_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k^U - \chi \geq 0, \\ & \dot{\gamma}_q^0 - \dot{\gamma}_q \geq 0, \dot{\gamma}_q \geq 0, \\ & \rho_{\alpha_1 1} - w_{\alpha_1 1} \geq 0, w_{\alpha_2 1} - \rho_{\alpha_2 1} \geq 0, \rho_{\beta_1 2} - w_{\beta_1 2} \geq 0, \\ & w_{\beta_2 2} - \rho_{\beta_2 2} \geq 0, r_s - w_{s1} \geq 0, r_s - w_{s2} \geq 0, -\chi \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 < i < j \in I, k \in I, q \in I_\omega, s \in I_6, \alpha_1 \in I_4^1, \alpha_2 \in I_4^2, \beta_1 \in I_5^1, \beta_2 \in I_5^2, t \in I_\sigma\},$$

$\chi$  — минимальное отрицательное значение функций, которые находятся в левых частях неравенств, формирующих систему (6). В силу условия  $-\chi \geq 0$  точка  $(X^*, 0)$  является точкой глобального максимума задачи (7), (8). Взяв точку  $X^*$  в качестве начальной, решим задачу (5), (6) и получим точку локального максимума  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$ . Тогда если  $F(\tilde{\gamma}) = \lambda$ , где  $\lambda = \sum_{i \in I_\omega} \dot{\gamma}_i^0$ , то  $\tilde{X}$  — точка

глобального максимума задачи (5), (6) и  $(\tilde{u}, h^0) \in W$ . Поскольку задачи (3), (4) и (5), (6) имеют различные пространства решений, то точка  $(\tilde{u}, h^0) \in W$  в общем случае не является точкой локального экстремума задачи (3), (4). Взяв начальную точку  $(\tilde{u}, h^0)$ , вычислим точку  $(u^{*0}, h^{*0}) \in W$  локального минимума задачи (3), (4).

Для поиска локальных экстремумов задач (3), (4), (5), (6) и (7), (8) используется метод последовательного улучшения значений функции цели на последовательности подобластей [14]. При этом поиск локального экстремума на каждой подобласти осуществлялся с использованием библиотеки IPOPT. В данной библиотеке реализованы алгоритмы внутренней точки, которые для поиска вектора движения используют матрицу Гессе левой части системы ограничений, описывающей область допустимых решений. Кроме того, библиотека демонстрирует эффективность на задачах с матрицами, имеющими блочную структуру и высокую степень разреженности, а также на плохо обусловленных задачах.

**Поиск приближения к глобальному минимуму задачи (3), (4).** В предлагаемом подходе выполняется итерационный поиск приближения к глобальному минимуму задачи (3), (4).

Рассмотрим  $i$ -ю итерацию. Пусть на предыдущей  $i-1$ -й итерации получена точка  $(u^{*i-1}, h^{*i-1}) \in W$  локального минимума задачи (3), (4). Эта точка сохраняется в качестве очередного приближения  $(u^*, h^*) \in W$  к точке глобального минимума задачи (3), (4).

На каждой  $i$ -й итерации на основе текущей величины  $h^*$  вычисляется новое значение высоты области размещения согласно выражению

$$h^i = h^* - 0,5^j \Delta, \quad j \in \Gamma = \{0, 1, 2, \dots, v\}, \quad (9)$$

где  $\Delta = 0,2h^*$ .

Далее осуществляется поиск размещения объектов в области с новым значением высоты. Очевидно, что точка  $(u^*, h^i) \notin W$  вследствие того, что в ней не выполнены некоторые из условий вида  $L_q^O(u_q^*, h^i) - d_q^L \geq 0, q \in I$ , и  $U_q^O(u_q^*, h^i) - d_q^U \geq 0, q \in I$ . Для того чтобы найти начальную точку, принадлежащую области  $W$ , решим последовательно вспомогательные задачи (7), (8) и (5), (6). В качестве начальной точки для задачи (7), (8) берем точку  $(X^*, \chi^0) \in \Psi$ , где  $X^* = (u^*, \gamma^0)$ ,  $\chi^0 = \min \{L_q^O(u_q^*, \gamma^0, h^i) - d_q^L, U_q^O(u_q^*, \gamma^0, h^i) - d_q^U, q \in I\}$ . Пусть  $(\bar{X}, 0)$  — решение данной задачи. Взяв точку  $\bar{X}$  в качестве начальной, вычислим точку локального максимума  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$  задачи (5), (6), в которой возможны два случая:  $F(\tilde{\gamma}) = \lambda$  и  $F(\tilde{\gamma}) < \lambda$ .

Если  $F(\tilde{\gamma}) = \lambda$ , то точка  $(\tilde{u}, h^i) \in W$ . Тогда, взяв начальную точку  $(\tilde{u}, h^i) \in W$ , вычислим локальный минимум  $(u^{*i}, h^{*i})$  задачи (3), (4), который принимаем в качестве очередного приближения  $(u^*, h^*) \in W$  к глобальному минимуму задачи (3), (4). Согласно формуле (9) вычисляем новое значение высоты области размещения (приняв  $j=0$ ) и выполняем поиск размещения объектов в области с новым значением высоты. Для этого берем точку  $(X^*, \chi^0) \in \Psi$  и последовательно решаем задачи (7), (8) и (5), (6). Описанный итерационный процесс повторяем до тех пор, пока не получим  $F(\tilde{\gamma}) < \lambda$ .

Если  $F(\tilde{\gamma}) < \lambda$ , то для того чтобы найти начальную точку  $(\tilde{u}, h^i) \in W$ , осуществляем поиск глобального максимума задачи (5), (6) для текущей высоты  $h^i$ . В случае если для высоты  $h^i$  начальная точка не будет найдена, то возвращаемся к точке  $(u^*, h^*)$  последнего приближения к глобальному минимуму задачи (3), (4). Согласно формуле (9) вычисляем новое значение высоты области размещения, приняв  $j = j+1$ . Для нового значения  $h^i$  снова выполняется поиск начальной точки задачи (3), (4), т.е. решается последовательность вспомогательных задач (7), (8) и (5), (6). Процедура поиска начальной точки для задачи (3), (4) выполняется до тех пор, пока  $h^* - h^i < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — точность решения задачи.

В результате точка  $(u^*, h^*)$  принимается в качестве приближения к глобальному минимуму задачи (3), (4), найденного после генерации первой случайной точки  $X' = (u', \xi)$ . Процесс генерации случайных точек вида  $X' = (u', \xi)$  продолжается до тех пор, пока в результате решения задачи (3), (4) для сгенерированных подряд пяти точек не произойдет улучшение целевой функции (3). В итоге лучший найденный минимум  $(u^*, h^*)$  принимается в качестве решения задачи (3), (4).

**Метод поиска глобального максимума вспомогательной подзадачи (5), (6).** Отметим следующую особенность задачи (5), (6). Если в точке  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$  локального максимума выполняется условие  $F(\tilde{\gamma}) = \lambda$ , то она является точкой глобального максимума. Если  $F(\tilde{\gamma}) < \lambda$ , то точка  $\tilde{X}$  может быть как точкой локального, так и глобального экстремума. Однако, поскольку задача (5), (6) является NP-трудной, осуществить полный перебор локальных максимумов возможно только теоретически.

В связи с этим для поиска глобального максимума задачи (5), (6) предлагаем специальный подход, который может обеспечить плавный переход от одного локального максимума к другому с большим значением целевой функции.

Пусть  $h = h^i$  и  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$  — локальный максимум задачи (5), (6) такой, что  $F(\tilde{\gamma}) < \lambda$ . Это означает, что по крайней мере одна из компонент вектора  $\tilde{\gamma}$  мень-

ше соответствующей компоненты вектора  $\gamma^0$ . Таким образом, существует хотя бы одна компонента вектора  $\tilde{\gamma}$ , удовлетворяющая одному из неравенств:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i &< r_i^0, \quad i \in T_1 \subset I_1, \\ \tilde{r}_i &< r_i^0, \quad i \in T_{21} \subset I_2, \tilde{h}_i < h_i^0, \quad i \in T_{22} \subset I_2, \quad T_2 = T_{21} \cup T_{22}, \\ \tilde{a}_i &< a_i^0, \quad i \in T_{31} \subset I_3, \tilde{b}_i < b_i^0, \quad i \in T_{32} \subset I_3, \\ \tilde{c}_i &< c_i^0, \quad i \in T_{33} \subset I_3, \quad T_3 = T_{31} \cup T_{32} \cup T_{33}, \\ \tilde{\rho}_i &< \rho_i^0, \quad i \in T_{41} \subset I_4, \tilde{w}_i < w_i^0, \quad i \in T_{42} \subset I_4, \quad T_4 = T_{41} \cup T_{42}, \\ \tilde{\rho}_i &< \rho_i^0, \quad i \in T_{51} \subset I_5, \tilde{w}_i < w_i^0, \quad i \in T_{52} \subset I_5, \quad T_5 = T_{51} \cup T_{52}, \\ \tilde{r}_i &< r_i^0, \quad i \in T_{61} \subset I_6, \tilde{h}_i < h_i^0, \quad i \in T_{62} \subset I_6, \tilde{w}_{i1} < w_{i1}^0, \quad i \in T_{63} \subset I_6, \\ \tilde{w}_{i2} &< w_{i2}^0, \quad i \in T_{64} \subset I_6, \quad T_6 = T_{61} \cup T_{62} \cup T_{63} \cup T_{64}, \quad T = \bigcup_{i=1} T_i. \end{aligned}$$

Для того чтобы осуществить переход от локального максимума  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$  к другому локальному максимуму  $\tilde{\tilde{X}} = (\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{\gamma}})$  такому, что  $F(\tilde{\tilde{\gamma}}) > F(\tilde{\gamma})$ , решим вспомогательную задачу

$$F(\gamma^*) = \max F(\gamma), \quad X \in \tilde{\Omega} \subset R^{3n+\omega}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = \{X = (u, \gamma) \in R^{3n+\omega} : \Phi_{ij}^{OO}(u_i, u_j, \gamma_i, \gamma_j) - d_{ij} \geq 0, \Phi_{kt}^{O\Lambda}(u_k, \gamma_k) - d_k^t \geq 0, \\ \Phi_k^O(u_k, \gamma_k) - d_k \geq 0, L_k^O(u_k, \gamma_k, h^0) - d_k^L \geq 0, U_k^O(u_k, \gamma_k, h^0) - d_k^U \geq 0, \gamma_q \geq 0, \\ 0 < i < j \in I, k \in I, q \in I_\omega, t \in I_\sigma\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Задача (10), (11) отличается от задачи (5), (6) отсутствием ограничений на предельные значения метрических характеристик размещаемых объектов.

Используя модификацию метода возможных направлений и стратегию  $\varepsilon$ -активных ограничений [14], вычисляем вектор  $Y^0$  наибольшего роста функции (10) в точке  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$ . Для этого решим следующую задачу:

$$\max_{(\chi, Y^0) \in G} \chi, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G = \{(\chi, Y^0) \in R^{3n+\omega+1} : (-\nabla F(\tilde{X}), Y^0) \geq \chi, (\nabla \Psi_j(\tilde{X}), Y^0) \geq w_j, \\ j = 1, 2, \dots, \zeta_k(\varepsilon), -1 \leq y_i^0 \leq 1, i = 1, 2, \dots, 3n + \omega + 1\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$0 \leq \Psi_j(\tilde{X}) \leq \varepsilon$  —  $\varepsilon$ -активные неравенства из системы (11),

$$w_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \Psi_j(\tilde{X}) \text{ линейное,} \\ \chi, & \text{если } \Psi_j(\tilde{X}) \text{ нелинейное.} \end{cases}$$

Выбор величины  $\varepsilon$  может существенным образом повлиять на результат решения задачи. Полагаем  $\varepsilon = 2\tilde{\varepsilon}$ , где  $\tilde{\varepsilon}$  — точность, с которой была получена точка локального максимума  $\tilde{X}$  при решении задачи (5), (6).

Если в результате решения задачи получим точку, в которой  $\chi > 0$ , то можно построить точку  $X^m = \tilde{X} + 0,5^m Y^0$  такую, что  $F(\gamma^m) > F(\tilde{\gamma})$  и  $X^m \in \tilde{\Omega}$ . Положительные элементы вектора  $Y^0$ , соответствующие направлению изменения метрических характеристик объектов, позволяют определить объекты, размеры которых мо-



гут быть увеличены в текущем локальном максимуме  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$ . Следовательно, в окрестности таких объектов существует «свободное пространство», которое может быть использовано для улучшения значения локального максимума.

Некоторые компоненты вектора  $X^m$  могут удовлетворять одному из неравенств:

$$\begin{aligned} r_i^m &> \tilde{r}_i, \quad i \in T_1^+ \subset I_1, \\ r_i^m &> \tilde{r}_i, \quad i \in T_{21}^+ \subset I_2, h_i^m > \tilde{h}_i, \quad i \in T_{22}^+ \subset I_2, T_2^+ = T_{21}^+ \cup T_{22}^+, \\ a_i^m &> \tilde{a}_i, \quad i \in T_{31}^+ \subset I_3, b_i^m > \tilde{b}_i, \quad i \in T_{32}^+ \subset I_3, \\ c_i^m &> \tilde{c}_i, \quad i \in T_{33}^+ \subset I_3, T_3^+ = T_{31}^+ \cup T_{32}^+ \cup T_{33}^+, \\ \rho_i^m &> \tilde{\rho}_i, \quad i \in T_{41}^+ \subset I_4, w_i^m > \tilde{w}_i, \quad i \in T_{42}^+ \subset I_4, T_4^+ = T_{41}^+ \cup T_{42}^+, \\ \rho_i^m &> \tilde{\rho}_i, \quad i \in T_{51}^+ \subset I_5, w_i^m > \tilde{w}_i, \quad i \in T_{52}^+ \subset I_5, T_5^+ = T_{51}^+ \cup T_{52}^+, \\ r_i^m &> \tilde{r}_i, \quad i \in T_{61}^+ \subset I_6, h_i^m > \tilde{h}_i, \quad i \in T_{62}^+ \subset I_6, \\ w_{i1}^m &> \tilde{w}_{i1}, \quad i \in T_{63}^+ \subset I_6, w_{i2}^m > \tilde{w}_{i2}, \quad i \in T_{64}^+ \subset I_6, \\ T_6^+ &= T_{61}^+ \cup T_{62}^+ \cup T_{63}^+ \cup T_{64}^+. \end{aligned}$$

Обозначим  $T^+ = \bigcup_{k=1}^6 T_k^+$ . Если  $\text{card}(T^+) > 0$ , то на основании точек  $X^m$

и  $\tilde{X}$  при выполнении определенных условий можно построить точку  $\overset{\circ}{X} = (\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{\gamma})$ , тем самым осуществив «перестановку» объектов, номера которых принадлежат множеству  $T^+$ , с объектами, номера которых принадлежат множеству  $T$ .

Для краткости идею построения точки  $\overset{\circ}{X} = (\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{\gamma})$  рассмотрим на примере двух цилиндров. Пусть  $i \in T, j \in T^+, i, j \in I_2$  и выполнены условия

$$\tilde{r}_j \leq r_i^m, \quad \tilde{r}_i \leq r_j^m, \quad \tilde{h}_j \leq h_i^m, \quad \tilde{h}_i \leq h_j^m. \quad (14)$$

Тогда построим точку  $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{\gamma})$  такую, что

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= u_i^m, \quad \hat{u}_j = u_j^m, \quad \hat{r}_i = \min \{r_i^0, r_j^m\}, \quad \hat{r}_j = \min \{r_j^0, r_i^m\}, \\ \hat{h}_i &= \min \{h_i^0, h_j^m\}, \quad \hat{h}_j = \min \{h_j^0, h_i^m\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Все остальные компоненты вектора  $\hat{X}$  равны соответствующим компонентам вектора  $X^m$ .

Если выполнены условия

$$\begin{aligned} \hat{d}_{jk} &\geq d_{jk}, \quad \hat{d}_j^t \geq d_j^t, \quad \hat{d}_j \geq d_j, \quad \hat{d}_j^L \geq d_j^L, \quad \hat{d}_j^U \geq d_j^U, \\ \hat{d}_{ik} &\geq d_{ik}, \quad \hat{d}_i^t \geq d_i^t, \quad \hat{d}_i \geq d_i, \quad \hat{d}_i^L \geq d_i^L, \quad \hat{d}_i^U \geq d_i^U, \\ k &\in I \setminus \{i, j\}, \quad t \in I_\sigma, \end{aligned} \quad (16)$$

то  $\overset{\circ}{X} = \hat{X}$ . Если не существует такого  $j$ , для которого выполняются указанные условия, то  $\overset{\circ}{u}_i = u_i^m, \overset{\circ}{u}_j = u_j^m, \overset{\circ}{r}_i = r_i^m, \overset{\circ}{r}_j = r_j^m, \overset{\circ}{h}_i = h_i^m, \overset{\circ}{h}_j = h_j^m$ .

Таким образом, точке  $\overset{\circ}{X} \neq X^m$  соответствует «перестановка» некоторых объектов  $O_i, i \in I$ , в размещении, соответствующем точке локального максимума  $\tilde{X}$ .



Следовательно, если  $\overset{\circ}{X} \neq X^m$ , то  $\overset{\circ}{X}$  и  $X^m$  находятся в зонах притяжения различных локальных экстремумов [15].

**Теорема.** Если  $\overset{\circ}{X} \neq X^m$  и  $\tilde{X}$  является локальным максимумом, полученным из точки  $\overset{\circ}{X}$ , то  $F(\tilde{\gamma}) > F(\tilde{\gamma})$ .

**Доказательство.** Для простоты пусть  $\overset{\circ}{X}$  и  $X^m$  отличаются значениями переменных  $\gamma_j, \gamma_i, u_j$  и  $u_i, 0 < j < i, i, j \in I_2$ , т.е.  $\overset{\circ}{X} = (u_1^m, u_2^m, \dots, u_j^m, \dots, u_i^m, \dots, u_n^m, \gamma_1^m, \gamma_2^m, \dots, \gamma_j^m, \dots, \gamma_i^m, \dots, \gamma_n^m)$ , где  $u_j^m = u_i^m, u_i^m = u_j^m$ . При этом  $\overset{\circ}{\gamma}_j = (r_j, h_j)$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_i = (r_i, h_i)$  получены согласно выражениям (15). Это означает, что  $O_i = C_j$ , а  $O_j = C_i$ , т.е. объекты «поменяли» свое местоположение и приняли размеры, обеспечивающие условие  $\overset{\circ}{X} \in \tilde{\Omega}$ . Поскольку  $\overset{\circ}{X} \neq X^m$ , точка  $\overset{\circ}{X}$  не лежит в области «притяжения» локального максимума  $\tilde{X}$ . Исходя из выражений (15), (16), точка  $\overset{\circ}{X} \in \Omega$ . Учитывая неравенства (14), получаем  $F(\overset{\circ}{\gamma}) > F(\tilde{\gamma})$ . Тогда очевидно, что  $F(\tilde{\gamma}) > F(\tilde{\gamma})$ , если  $\tilde{X}$  является точкой локального максимума, полученной из начальной точки  $\overset{\circ}{X}$ .

Условия теоремы обеспечивают переход от одного локального максимума к другому, в котором целевая функция  $F(\gamma)$  имеет большее значение. Однако они не всегда позволяют осуществить такой переход, даже если он существует. Поэтому целесообразно расширить возможные переходы, ослабив условия теоремы. Таким образом, путем ослабления ограничений можно построить начальные точки для задачи (3), (4) и получить из них локальные максимумы, среди которых может быть максимум, в котором значение  $F(\gamma)$  будет больше. Поскольку полученные таким образом локальные максимумы в общем случае не гарантируют увеличения значения  $F(\gamma)$ , то точки, являющиеся начальными для их поиска, назовем «перспективными». Для получения «перспективной» точки вместо точки  $X^m$  построим точку  $X^k$  следующим образом (на примере цилиндров):

$$u_i^k = u_i^m, i \in I, r_i^k = \begin{cases} r_i^m, & \text{если } i \notin T^+, \\ \tilde{r}_i + 0,5^{k-1} \delta, & \text{если } i \in T^+, \end{cases}$$

$$h_i^k = \begin{cases} h_i^m, & \text{если } i \notin T^+, \\ \tilde{h}_i + 0,5^{k-1} \delta, & \text{если } i \in T^+, \end{cases}$$

где  $k \in K = \{1, 2, \dots\}, \delta = \max \{\gamma_i^0, i \in I\} - \min \{\gamma_i^0, i \in I\}$ . Мощность множества  $K$  определяется возможностью перестановки хотя бы одной пары объектов.

Первоначально в качестве точки «базового» локального максимума, на основании которого будут строиться «перспективные» точки  $X^k, k \in K$ , принимается точка  $\tilde{X}$ , полученная в результате решения последовательности вспомогательных задач (7), (8) и (5), (6). Если из «перспективной» точки  $X^k, k \in K$ , будет получена точка локального максимума  $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\gamma})$  такая, что  $\lambda > F(\tilde{\gamma}) > F(\tilde{\gamma})$ , то она берется в качестве точки нового «базового» максимума для поиска «перспективных» точек.

Общая схема поиска начальной точки задачи (3), (4) приведена на рис. 1.

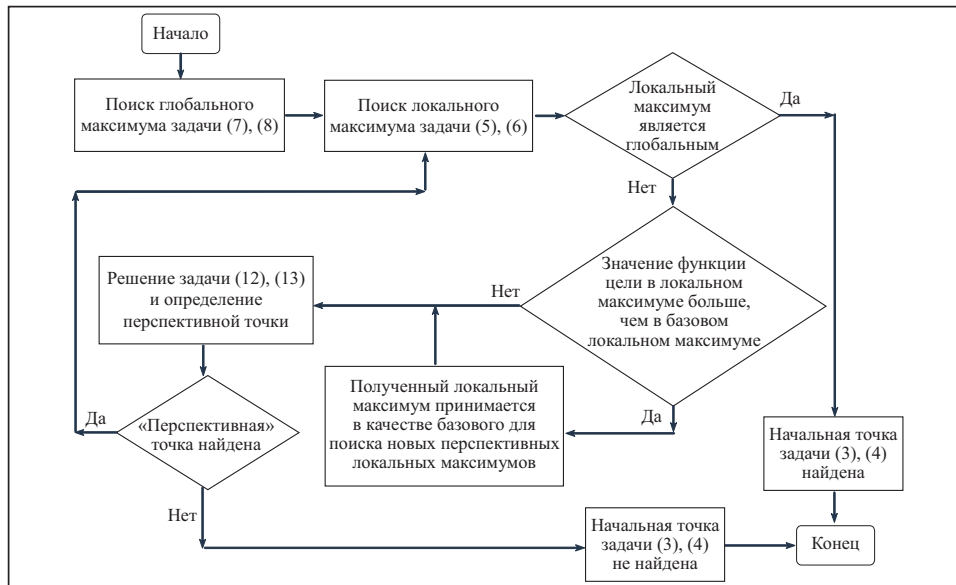


Рис. 1. Схема поиска начальной точки задачи (3), (4)

### ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим следующий численный пример. Пусть задано множество размещаемых объектов  $O_i \in R^3$ ,  $i \in I = \bigcup_{k=1}^6 I_k$ , где  $I_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $I_2 = \{4, 5, 6\}$ ,  $I_3 = \{7, 8, 9\}$ ,  $I_4 = \{10, 11, 12\}$ ,  $I_5 = \{13, 14, 15\}$ ,  $I_6 = \{16, 17, \dots, 20\}$ . Метрические характеристики размещаемых объектов приведены в табл. 1.

Задана также цилиндрическая область размещения (1), образованная из следующих объектов: цилиндра  $C$  радиуса  $r = 38$ ; зоны запрета, полученной объединением призм  $\Lambda_t$ ,  $t = 1, 2, 3$ , с такими параметрами:  $a_1^\Delta = 8$ ,  $b_1^\Delta = 8$ ,  $u_1^\Delta = (0, 0, 0)$ ;  $a_2^\Delta = 4$ ,  $b_2^\Delta = 18$ ,  $u_2^\Delta = (0, 0, 0)$ ;  $a_3^\Delta = 18$ ,  $b_3^\Delta = 4$ ,  $u_3^\Delta = (0, 0, 0)$ .

На размещение объектов заданы ограничения в виде минимально допустимых расстояний (2), представленные в табл. 2–4 (минимально допустимые расстояния  $d_{ij}$  между объектами  $O_i$  и  $O_j$ ,  $j < i < I$ ; минимально допустимые расстояния  $d_i^t$  между объектами  $O_i$ ,  $i \in I$ , и зонами запрета  $\Lambda_t$ ,  $t = 1, 2, 3$ ; минимально допустимые расстояния между объектами  $O_i$ ,  $i \in I$ , и гранями цилиндра  $C$ ).

Таблица 1

$i$	Значение метрических характеристик объектов $O_i$ , $i \in I$							$i$	Значение метрических характеристик объектов $O_i$ , $i \in I$						
	$r_i$	$h_i$	$w_{i1}$	$w_{i2}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$		$r_i$	$h_i$	$w_{i1}$	$w_{i2}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	5	—	—	—	—	—	—	11	6	—	9	—	—	—	—
2	7	—	—	—	—	—	—	12	7	—	13	—	—	—	—
3	9	—	—	—	—	—	—	13	8	—	—	5	—	—	—
4	6	9	—	—	—	—	—	14	5	—	—	8	—	—	—
5	10	6	—	—	—	—	—	15	8	—	—	11	—	—	—
6	5	5	—	—	—	—	—	16	5	7	3	1	—	—	—
7	—	—	—	—	7	4	8	17	10	8	6	6	—	—	—
8	—	—	—	—	9	4	3	18	6	9	5	3	—	—	—
9	—	—	—	—	5	10	7	19	8	0	3	6	—	—	—
10	9	—	6	—	—	—	—	20	7	0	4	4	—	—	—

**Таблица 2**

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	12	9	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	10	9	11	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	9	8	5	8	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	11	7	8	9	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	7	10	10	6	8	5	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	12	8	10	10	7	8	8	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	7	7	11	12	9	11	7	11	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	10	12	8	9	7	9	6	11	8	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	11	11	8	11	9	12	12	8	12	12	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	6	9	12	7	12	12	12	5	8	11	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	6	5	9	9	6	9	5	11	12	6	10	8	11	—	—	—	—	—	—	—
15	6	9	9	12	11	6	7	5	5	7	9	5	5	6	—	—	—	—	—	—
16	5	9	11	6	8	12	10	5	11	11	7	10	9	10	10	—	—	—	—	—
17	5	8	11	5	5	6	12	10	12	11	11	11	6	9	10	12	—	—	—	—
18	11	9	12	7	6	9	9	10	10	6	12	11	6	10	6	9	6	—	—	—
19	5	9	7	5	7	11	7	9	6	8	10	5	6	10	6	7	5	12	—	—
20	10	9	10	6	5	12	5	5	7	6	5	8	11	12	7	12	11	11	8	—

**Таблица 3**

$i$	$d_i^t$	$i$	$d_i^t$
1	1,71	11	1,85
2	0,93	12	1,98
3	1	13	1,3
4	0,83	14	1,85
5	1,21	15	0,1
6	1,74	16	0,93
7	0,69	17	0,29
8	1,25	18	0,15
9	1,7	19	0,33
10	1,42	20	0,91

**Таблица 4**

$i$	$d_i$	$d_i^U$	$d_i^L$	$i$	$d_i$	$d_i^U$	$d_i^L$
1	1,22	1,95	0,52	11	1,68	0,21	1,11
2	0,23	1,68	0,84	12	1,52	1,75	1,91
3	1,41	1,75	1,29	13	0,73	0,71	0,18
4	0,52	0,76	1,56	14	1,45	1,13	1,7
5	1,75	1,45	0,69	15	0,64	0,84	0,31
6	0,89	0,16	1,4	16	1,32	1,56	1,47
7	0,28	1,28	1,95	17	0,95	0,42	0,89
8	0,96	0,18	1,58	18	0,78	1,48	2,01
9	0,91	0,19	1,58	19	1,54	1,2	1,05
10	2,06	0,12	0,79	20	0,73	0,13	1,33

В результате решения задачи получена точка  $X^* = (u^*, h^*)$  приближения к глобальному минимуму. Координаты вектора  $u^*$  приведены в табл. 5, при этом  $h^* = 56,243926$ . Соответствующее размещение объектов изображено на рис. 2.

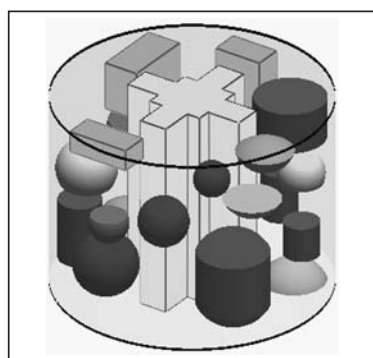


Рис. 2. Размещение объектов, соответствующее точке  $X^*$

Время решения задачи с использованием компьютера на базе процессора Intel Core i5 с тактовой частотой 3,2 Ghz и оперативной памятью 4 Gb составило 22 мин (программа сгенерировала девять случайных начальных бросков).

В связи с невозможностью описания исходных данных для всего многообразия решенных численных примеров на рис. 3 приведены изображения найденных компоновок объектов в области различной конфигурации. На рис. 3, а показана плотная упаковка 100 объектов в ци-

линдрическую область без зон запрета (все минимально допустимые расстояния равны нулю), на рис. 3, б приведен результат размещения 30 объектов в области с двумя зонами запрета, на рис. 3, в-д проиллюстрированы результаты размещения 50, 70 и 100 объектов в областях с четырьмя зонами запрета соответственно.

**Таблица 5**

$i$	Координаты полюсов объектов в точке $X^* = (u^*, h^*)$			$i$	Координаты полюсов объектов в точке $X^* = (u^*, h^*)$		
	$x_i$	$y_i$	$z_i$		$x_i$	$y_i$	$z_i$
1	-22,27114	22,670794	21,171963	11	-20,03042	-22,09105	-1,328037
2	-10,86778	28,786876	7,259485	12	22,389472	16,972395	2,438037
3	13,691357	20,465277	-17,83196	13	-27,17407	10,876718	11,260732
4	30,139755	9,087659	-17,56196	14	5,809568	30,438037	4,445216
5	-19,47108	-17,6051	20,671963	15	26,190352	-12,20885	7,148859
6	-31,62402	-5,565367	-6,927841	16	-6,575277	-30,99013	-13,26344
7	4,7	-31,85957	18,365547	17	-22,7344	13,460262	-13,23196
8	7,449877	29,123926	24,768315	18	13,239401	-28,27378	-13,74428
9	24,7	-12,21662	20,931963	19	-27,82977	5,956146	23,921504
10	-22,5053	-14,80794	-27,33097	20	28,621992	-9,851623	-21,39481

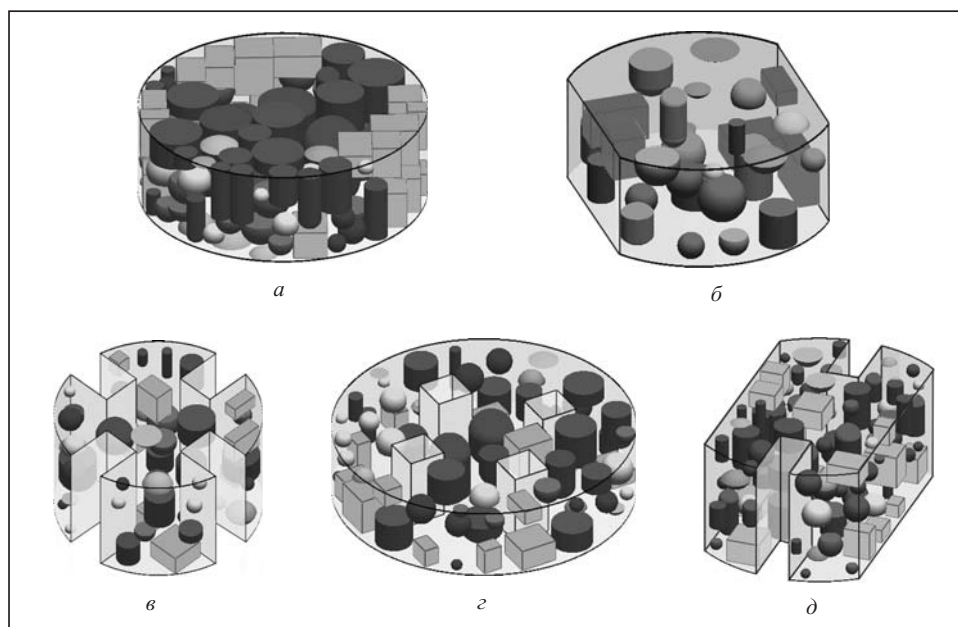


Рис. 3. Примеры решенных задач компоновки объектов в различных областях

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки позволяет численно реализовать на компьютере такие задачи, как поиск параметров размещения, оптимизирующих заданный критерий качества компоновки, оценку получаемого размещения по выбранному критерию, оценку ограничений на размещение (непересечение размещаемых объектов, расположение на заданных расстояниях, размещение внутри области размещения).

Использование метода Ф-функций для построения математической модели задачи компоновки дает возможность применить на всех этапах решения задачи

(поиск начальных точек, локальных экстремумов и их перебор) современные методы нелинейной оптимизации.

Предложен новый метод, заключающийся в расширении размерности задачи за счет введения переменных метрических характеристик, что позволило получать любые начальные точки. Эффективность метода заключается в реализации последовательных изменений размерности пространства решений при осуществлении непрерывных переходов между вспомогательными задачами. Поэтапное улучшение решения задачи основывается на том, что размещение объектов, соответствующее точке локального экстремума задачи (3), (4), в общем случае не является оптимальным для задачи (5), (6) и наоборот.

Время решения задачи может быть существенно уменьшено за счет применения при разработанном подходе современных технологий параллельных вычислений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aladahalli C., Cagan, J., Shimada K. Objective function effect based pattern search — theoretical framework inspired by 3D component layout // *J. Mech. Des.* — 2007. — N 129. — P. 243–254.
2. Егоров С. Я. Аналитические и процедурные модели компоновки оборудования промышленных производств. — М.: Машиностроение-1, 2007. — 104 с.
3. Гаврилов В. Н. Автоматизированная компоновка приборных отсеков летательных аппаратов: монография. — М.: Машиностроение, 1988. — 136 с.
4. Szykman S., Cagan J. Constrained three dimensional component layout using simulated annealing // *ASME J. Mech. Des.* — 1997. — **119**, N 1. — P. 28–35.
5. Cagan J., Shimada K., Yin S. A survey of computational approaches to three-dimensional layout problems // *Comput.-Aid. Des.* — 2002. — **34**, N 8. — P. 597–611.
6. Fasano G. MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems // *4OR: Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Oper. Res. Soc.* — 2008. — **6**, N 3. — P. 291–310.
7. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 268 с.
8. Stoyan Yu. G.  $\Phi$ -function and its basic properties // *Доп. НАН України.* — 2001. — № 8. — С. 112–117.
9. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованная  $\Phi$ -функция сферических сегментов // *Там же.* — 2012. — № 12. — С. 41–48.
10. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованная  $\Phi$ -функция параллелепипеда и сфероцилиндра // *Там же.* — 2013. — № 2. — С. 36–41
11. Семкин В. В., Чугай А. М. Нормализованные  $\Phi$ -функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцилиндром // *Вісн. Харк. нац. ун-ту.* — 2012. — № 1037. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 20. — С. 190–201.
12. Пшеничный Б. Н., Соболенко Л. А. Метод линеаризации для обратно-выпуклого программирования // *Кибернетика и системный анализ.* — 1995. — № 6. — С. 86–97.
13. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
14. Stoyan Yu. G., Zlotnik M. V., Chugay A. M. Solving an optimization packing problem of circles and non-convex polygons with rotations into a multiply connected region // *J. Oper. Res. Soc.* — 2012. — **63**, N 3. — P. 379–391.
15. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm // *Optim. Letters.* — 2013. — DOI: 10.1007/s11590-013-0646-1.5.

*Поступила 04.07.2013*