УДК 519.8

П.И. СТЕЦЮК, Ж.-Ф. ЭММЕНЕГГЕР

МАКСИМАЛЬНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ЧИСЛО МАТРИЦЫ И ЕГО ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ[1]

Аннотация. Показано, что максимальное сингулярное число матрицы и соответствующие ему сингулярные векторы являются оптимальным решением специальной квадратичной экстремальной задачи. Рассматривается экономическая интерпретация оптимального решения для линейной модели производства и продуктивной модели Леонтьева, показана связь оптимального решения с числом и векторами Фробениуса. Приведено сравнение чисел Фробениуса и максимальных сингулярных чисел для обратной матрицы Леонтьева в 15-отраслевом балансе Украины за 2003–2009 годы.

Ключевые слова: максимальное сингулярное число, квадратичная экстремальная задача, число и векторы Фробениуса, неразложимая матрица, обратная матрица Леонтьева.

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость экономических, транспортных, энергетических и других систем, как правило, характеризуется величиной максимального собственного числа некоторой матрицы. Компоненты собственных векторов, отвечающих этому числу, связаны со значениями параметров системы в состоянии устойчивого равновесия. Для экономических систем эту роль выполняют число и векторы Фробениуса квадратных матриц с неотрицательными коэффициентами [1, 2].

Технологические процессы часто описываются с помощью прямоугольных $m\times n$-матриц A, в которых количество столбцов n (технологии) и количество строк m (выпуск) не совпадают. Для таких процессов число и векторы Фробениуса напрямую не применимы, так как не имеют аналогов для прямоугольных матриц. Оказывается, что в этом случае они связаны с максимальным сингулярным числом прямоугольной матрицы A, квадрат которого можно интерпретировать как число Фробениуса для квадратной матрицы, которая получена умножением прямоугольной матрицы на транспонированную. Роль векторов Фробениуса здесь выполняют левый и правый сингулярные векторы — собственные векторы $m\times m$-матрицы AA^T и $n\times n$-матрицы A^TA, которые соответствуют квадрату максимального сингулярного числа.

Свойства максимального сингулярного числа σ_A и его использование в экономических моделях является предметом исследования в настоящей статье. В первом разделе рассмотрим число σ_A и его свойства для вещественных матриц с использованием квадратичной экстремальной задачи, в которой оптимальное значение целевой функции равно σ_A [3]. Во втором разделе для неотрицательных матриц дадим экономическую интерпретацию числа σ_A и отвечающих ему сингулярных векторов. Приведем сравнение числа σ_A с числом Фробениуса для обратной матрицы Леонтьева в агрегированном 15-отраслевом балансе Украины за 2003–2009 годы.

1. ЧИСЛО σ_A И КВАДРАТИЧНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть A — вещественная $m\times n$-матрица и $\sigma_A>0$ — ее максимальное сингулярное число, $\sigma_A=\sqrt{\lambda_{\max}(A_1)}=\sqrt{\lambda_{\max}(A_2)}$, где $\lambda_{\max}(A_1)$ и $\lambda_{\max}(A_2)$ — максимальные собственные числа симметричных $m\times m$-матрицы $A_1=AA^T$

[1]Работа частично поддержана грантом SNSF-SCOPES Project Nr. 127962 (Valorisation Grant).

© П.И. Стецюк, Ж.-Ф. Эмменеггер, 2014

и $n\times n$-матрицы $A_2 = A^T A$ соответственно. Левый и правый сингулярные векторы числа σ_A равны собственным векторам матриц A_1 и A_2, соответствующим максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A_1)=\lambda_{\max}(A_2)=\sigma_A^2$.

Лемма 1. Число σ_A равно оптимальному значению целевой функции в квадратичной экстремальной задаче

$$\sigma_A = (u^*)^T A x^* = \max_{x\in R^n,\, u\in R^m} u^T A x \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{2}$$

Оптимальным решением (u^*, x^*) в задаче (1), (2) являются либо векторы

$$u^* = \xi(A_1),\ x^* = A^T u^* / || A^T u^* ||, \tag{3}$$

либо векторы

$$x^* = \xi(A_2),\ u^* = A x^* / || A x^* ||, \tag{4}$$

где $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ — собственные векторы матриц A_1 и A_2, соответствующие максимальным собственным числам $\lambda_{\max}(A_1)=\lambda_{\max}(A_2)$.

Доказательство. Задачу (1), (2) запишем в виде

$$\sigma_A = \max_{||u||=||x||=1} u^T A x = \max_{||u||=1} \varphi(u),$$

где $\varphi(u)$ — решение подзадачи

$$\varphi(u) = \max_{x} u^T A x \tag{5}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{6}$$

Пусть v — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (6). Функция Лагранжа для позадачи (5), (6) имеет вид

$$L(x, v) = u^T A x + v\left(1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Из условия $\dfrac{\partial L(x,v)}{\partial x}=0$ находим $A^T u - 2vx(v)=0$, откуда имеем

$$x(v) = \frac{1}{2v} A^T u. \tag{7}$$

В результате получаем

$$\psi(v) = L(x(v), v) = \frac{1}{4v} || A^T u||^2 + v.$$

Функция $\psi(v)$ при $v^* = \dfrac{1}{2} || A^T u ||$ достигает минимума $\psi^* = \psi(v^*) = || A^T u||$.

Из (7) определяем оптимальное решение подзадачи (5), (6)

$$x^*(u) = x(v^*) = A^T u / || A^T u ||, \tag{8}$$

на основании которого $\varphi(u) = ||A^T u||$. Следовательно,

$$\max_{||u||=1} \varphi(u) = \max_{||u||=1} ||A^T u|| = \max_{||u||=1} \sqrt{u^T A A^T u} = \max_{||u||=1} \sqrt{u^T A_1 u}. \tag{9}$$

С учетом того, что $\lambda_{\max}(A_1) = \max\limits_{||u||=1} u^T A_1 u$, получаем $\max\limits_{||u||=1} \varphi(u) = \sqrt{\lambda_{\max}(A_1)} = \sigma_A$, что доказывает равенство оптимального значения целевой функции в задаче (1), (2) и числа σ_A.

Решением задачи (9) будет собственный вектор матрицы A_1, который соответствует ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A_1)$. Отсюда с учетом (8) имеем $u^* = \xi(A_1)$ и $x^* = A^T u^* / ||A^T u^*||$, что доказывает для задачи (1), (2) оптимальность решения (u^*, x^*) по формуле (3).

Аналогично можно обосновать и формулу (4). Здесь соответствующая задача имеет вид

$$\sigma_A = \max_{||x||=||u||=1} u^T A x = \max_{||x||=1} \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — решение подзадачи

$$\varphi(x) = \max_u u^T A x \tag{10}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1. \tag{11}$$

Для подзадачи (10), (11) имеем решение

$$u^*(x) = Ax / ||Ax||, \tag{12}$$

при котором $\varphi(x) = ||Ax||$. Следовательно,

$$\max_{||x||=1} \varphi(x) = \max_{||x||=1} \sqrt{x^T A^T A x} = \max_{||x||=1} \sqrt{x^T A_2^T x} = \sqrt{\lambda_{\max}(A_2)} = \sigma_A. \tag{13}$$

Для задачи (13) оптимальным решением x^* будет $\xi(A_2)$ — собственный вектор матрицы A_2, соответствующий ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A_2)$. С учетом (12) имеем $x^* = \xi(A_2)$ и $u^* = Ax^* / ||Ax^*||$, что доказывает оптимальность решения (u^*, x^*) по формуле (4) для задачи (1), (2). Этим завершается доказательство леммы.

Если кратность числа σ_A больше единицы, то это число — единственное оптимальное значение целевой функции, но ему соответствует бесконечно много оптимальных решений в задаче (1), (2). Лемма 1 отражает взаимосвязь между входящими в оптимальное решение векторами из множеств собственных векторов матриц A_1 и A_2, отвечающих их максимальным собственным числам $\lambda_{\max}(A_1) = \lambda_{\max}(A_2)$. С помощью леммы 1 можно найти одно (но произвольное) оптимальное решение из множества оптимальных решений, которое зависит от выбора векторов в формулах (3) или (4).

Если используется формула (3), то оптимальное решение (u^*, x^*) состоит из вектора u^* — некоторого произвольного собственного вектора матрицы A_1 (им может быть как любой вектор из базисной системы собственных векторов, так и их произвольная нормированная линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами) и вектора x^* — собственного вектора матрицы A_2, но не произвольного, а вычисленного по формуле (3). По существу, для собственного вектора матрицы $A_1 = AA^T$ выполняется равенство

$$\lambda_{\max}(A_1)\xi(A_1) = \lambda_{\max}(A_1)AA^T\xi(A_1). \tag{14}$$

Если это равенство умножить справа на матрицу A^T, то получаем

$$\lambda_{\max}(A_1)A^T\xi(A_1) = \lambda_{\max}(A_1)A^T A(A^T\xi(A_1)). \tag{15}$$

Из (15) легко увидеть, что вектор $\xi(A_2) = A^T\xi(A_1)/||A^T\xi(A_1)||$ является собственным вектором матрицы $A_2 = A^T A$, так как при $\lambda_{\max}(A_1) = \lambda_{\max}(A_2)$ для него выполняется равенство

$$\lambda_{\max}(A_2)\xi(A_2) = \lambda_{\max}(A_2)A^T A\xi(A_2)\,. \tag{16}$$

Если для вычисления сингулярного вектора использовать формулу (4), то получим аналогичную ситуацию, но при этом выбирается любой вектор из базисной системы собственных векторов для матрицы A_2 или произвольная их нормированная линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами. Здесь оптимальное решение (u^*, x^*) состоит из вектора x^* — некоторого произвольного собственного вектора матрицы A_2 и вектора u^* — собственного вектора матрицы A_1, но не произвольного, а вычисленного по формуле (4). Действительно, если равенство (16) умножить справа на матрицу A, то получим равенство

$$\lambda_{\max}(A_2)A\xi(A_2) = \lambda_{\max}(A_2)AA^T(A\xi(A_2)). \tag{17}$$

Учитывая, что $\lambda_{\max}(A_2) = \lambda_{\max}(A_1)$, из (17) следует справедливость равенства (14) для вектора $\xi(A_1) = A\xi(A_2)/||A\xi(A_2)||$. Следовательно, вектор $\xi(A_1) = A\xi(A_2)/||A\xi(A_2)||$ является собственным вектором матрицы A_1, соответствующим ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A_1)$.

Из вышеизложенного вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Если кратность σ_A равна единице, то числу σ_A в задаче (1), (2) соответствует единственное оптимальное решение (u^*, x^*), компоненты которого

$$u^* = \xi(A_1) \text{ и } x^* = \xi(A_2) \tag{18}$$

равны собственным векторам матриц A_1 и A_2, отвечающим их максимальным собственным числам $\lambda_{\max}(A_1) = \lambda_{\max}(A_2)$.

Этот случай имеет место при анализе экономических моделей, где коэффициенты матрицы являются неотрицательными. Аналогичная ситуация и для случая, когда кратность числа σ_A больше единицы, если возмущенные коэффициентами матрицы AA^T и $A^T A$ имели единственное максимальное собственное число.

2. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В экономических приложениях оперируют с неотрицательными и неразложимыми матрицами. Неотрицательной называют матрицу, все компоненты которой неотрицательны. Квадратную $n \times n$-матрицу A называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$A = \begin{Bmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ 0 & \mathrm{A}_3 \end{Bmatrix},$$

где A_1 — квадратная матрица. В макроэкономике неразложимость матрицы A означает, что каждая отрасль использует (хотя бы косвенно) продукты всех других отраслей.

Число Фробениуса λ_A равно максимальному собственному числу $n \times n$-матрицы A с неотрицательными коэффициентами. Правый вектор Фробениуса равен вектору x_A, который удовлетворяет условиям

$$Ax_A = \lambda_A x_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (x_A)_i = 1. \tag{19}$$

Левый вектор Фробениуса равен вектору p_A, который удовлетворяет условиям

$$A^T p_A = \lambda_A p_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (p_A)_i = 1. \tag{19'}$$

В соотношениях (19) и (19′) векторы Фробениуса отмасштабированы таким образом, чтобы сумма их компонент равнялась единице. Это сопряжено с удобством интерпретации каждой компоненты этих векторов, например как доли (в процентном соотношении) вклада той или иной технологии в конечный выпуск продукции. Для симметричной матрицы правый и левый векторы Фробениуса совпадают. Такой вектор назовем вектором Фробениуса. Нормированный вектор Фробениуса является собственным вектором симметричной матрицы A, соответствующим ее максимальному собственному числу λ_A.

Для неотрицательных и неразложимых матриц теорема Фробениуса–Перрона [1, теорема 1.1, с. 29] гарантирует существование правого (левого) вектора Фробениуса, все компоненты которого положительны. Из изложенного выше следует справедливость такой леммы.

Лемма 3. Если неотрицательная $m \times n$-матрица A не содержит нулевых строк и столбцов, а минимальная по размеру матрица из числа матриц $A_1 = AA^T$ и $A_2 = A^T A$ является неразложимой, то число σ_A в задаче (1), (2) достигается в единственной точке (u^*, x^*), все компоненты которой положительны. При этом вектор u^* равен нормированному вектору Фробениуса для матрицы A_1, а вектор x^* равен нормированному вектору Фробениуса для матрицы A_2.

Содержательный смысл оптимального решения задачи (1), (2) рассмотрим на примере линейной системы $y = Ax$ со входом $x \in R^n$ и выходом $y \in R^m$, которая описывает процесс производства m видов продукции n предприятиями (технологиями). Здесь A — неотрицательная технологическая $m \times n$-матрица, в которой коэффициент a_{ij} означает количество i-го продукта, произведенного по j-й технологии, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Величина $a_{ij} > 0$, если i-й продукт производится по j-й технологии, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Задачу (1), (2) для указанного процесса можно записать в таком виде: найти

$$\sigma_A = (u^*)^T y^* = \max_{y \in R^m,\, u \in R^m} u^T y \tag{20}$$

при ограничениях

$$y = Ax, \; x \in R^n, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{22}$$

Задача (20)–(22) является более прозрачной для интерпретации содержательного смысла максимального сингулярного числа σ_A и соответствующих ему сингулярных векторов, чем задача (1), (2). Легко увидеть, что если компоненты вектора $u \in R^m$ интерпретировать как цены на единицу производимых продуктов, то получаем оптимальное соотношение между нормированным вектором использования технологий и нормированным вектором цен. Оптимальное соотношение реализует максимум суммарной цены на производимые продукты, и этот максимум равен числу σ_A — максимальному сингулярному числу матрицы A. Если выполнены условия леммы 3, то оптимальное соотношение однозначно определяет оптимальные цены, равные положительному нормированному вектору Фробениуса матрицы $A_1 = AA^T$, и оптимальное использование технологий, равное положительному нормированному вектору Фробениуса матрицы $A_2 = A^T A$.

К интересной двойственной интерпретации числа σ_A и векторов Фробениуса легко придти, если задачу (1), (2) записать в таком виде: найти

$$\sigma_A = (p^*)^T x^* = \max_{p \in R^n,\, x \in R^n} p^T x \tag{23}$$

при ограничениях

$$p = A^T u, \; u \in R^m, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{25}$$

Задача (23)–(25) записана с помощью матрицы A^T и является не менее прозрачной, чем задача (20)–(22). Здесь вектор p определяет стоимости использования технологий, где цена на производство единицы каждого отдельного продукта одинакова. Легко видеть, что оптимальное значение целевой функции (23) отражает максимальную стоимость использования технологий и реализуется на таких же нормированном векторе использования технологий и нормированном векторе цен, как и в задаче (20)–(22).

Указанная интерпретация оптимального решения задачи (1), (2) справедлива также, если $n = m$, т.е. количество технологий равно количеству продуктов. Для квадратных матриц леммы 1 и 3 имеют больше приложений, так как в качестве неизвестных в задаче (1), (2) можно рассматривать не только используемые технологии, но и выпуск продукции. Проиллюстрируем это на примере модели Леонтьева $y = (I - A)x$, где x — валовый выпуск, y — конечный выпуск, A — матрица коэффициентов прямых затрат, I — единичная матрица. Здесь матрица Леонтьева $(I - A)$ не является неотрицательной, но для продуктивной модели Леонтьева (ей соответствует $\lambda_A < 1$) неотрицательной является обратная матрица Леонтьева $B = (I - A)^{-1}$. Отсюда имеем, что $x = By$ и леммы 1 и 3 можно задействовать для конечного выпуска y и добавленной стоимости w, которая связана с двойственной (ценовой) моделью Леонтьева $w = (I - A^T)p$, где w — вектор норм добавленной стоимости, p — вектор цен.

Для продуктивной модели Леонтьева квадратичная экстремальная задача имеет вид: найти

$$\sigma_B = (w^*)^T By^* = \max_{w \in R^n,\, y \in R^n} w^T By \tag{26}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1. \tag{27}$$

Если переобозначить $y \to x$, $w \to u$, то задача (26), (27) совпадет с задачей (1), (2) и для нее применимы леммы 1 и 3.

В результате получим нормированные векторы конечного продукта и добавленной стоимости, которые отвечают максимизации числа σ_B — величине, пропорциональной национальному доходу [4]. При этом число σ_B всегда будет больше, чем число Фробениуса λ_B. На основании табл. 1 приведем сравнение чисел σ_B и λ_B для агрегированного 15-отраслевого баланса Украины за 2003–2009 гг. [5]. Здесь λ_A — числа Фробениуса технологических матриц A: $\lambda_B = 1/(1-\lambda_A)$. Из последнего столбца таблицы видим, что число σ_B превышает число Фробениуса λ_B не меньше, чем на 20 %.

Таблица 1

Год	λ_A	λ_B	σ_B	$(\sigma_B - \lambda_B)/\lambda_B$
2003	0,58641	2,41787	2,914	0,205
2004	0,58476	2,40825	2,937	0,220
2005	0,59611	2,47591	3,107	0,255
2006	0,58495	2,40936	2,980	0,237
2007	0,57231	2,33812	2,865	0,225
2008	0,56623	2,30535	2,884	0,251
2009	0,56958	2,32332	2,866	0,234

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье показано, что сингулярное число матрицы и его сингулярные векторы для экономических моделей позволяют построить некоторые оптимальные соотношения, которые связывают ценовой и ресурсный факторы. Сингулярные векторы тесно связаны с векторами Фробениуса, они расширяют область действия последних на класс неотрицательных прямоугольных матриц. Однако интерпретация оптимальных соотношений связана с нормированными векторами, которые не играют большой роли в экономических приложениях. Чтобы заменить нормированные векторы на линейные выпуклые комбинации компонент, существует большой резерв по модификации квадратичной экстремальной задачи (1), (2). Так, например, масштабирование переменных u и x позволяет рассматривать векторы, которые легко приблизить к выпуклым комбинациям. Такие задачи несколько сложнее, чем задача (1), (2). Их оптимальные решения будут определяться сингулярным числом некоторой модифицированнной технологической матрицы, которая получена умножением технологической матрицы слева и справа на диагональные матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
2. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз. Ч. 2: Макроекономіка. — К.: Вища шк., 2004. — 208 с.
3. Стецюк П.И. Квадратичная задача для максимального сингулярного числа // Праці Міжнарод. наук. конф. «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XL), присвяч. 90-річчю від дня народження акад. В.М. Глушкова, Україна, Крим, Велика Ялта, смт. Кацивелі, 30 вересня — 4 жовтня 2013 р. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2013. — С. 255.
4. Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 51–59.
5. Стецюк П.И., Бондаренко А.В. О спектральных свойствах модели Леонтьева // Теория оптимальных решений. — 2011. — № 10. — С. 84–90.

Поступила 03.01.2014