СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ

УДК 519.8

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ В ВИДЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ: СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СЛАБАЯ ДОПУСТИМОСТЬ

Аннотация. Введено понятие нечеткой линейной системы уравнений как совокупности пяти специальных интервальных систем уравнений. Понятия слабой и сильной разрешимости (допустимости) нечеткой линейной системы уравнений представлены в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и нечетком). Обоснованы критерии слабой разрешимости и допустимости нечеткой системы уравнений во всех пяти смыслах. Доказаны другие свойства нечетких систем и их слабых решений (во всех пяти смыслах).

Ключевые слова: нечеткая система, разрешимость и допустимость системы.

ВВЕДЕНИЕ

Учет неопределенности данных, которые используются в моделях систем, объектов, процессов и явлений, является сложной и актуальной проблемой. Среди подходов к учету неопределенности популярным ввиду своей гибкости и адекватности является использование аппарата нечетких множеств (в частности, [1–15]). При этом результатирующая характеристика предмета исследования представляется двояко: либо как набор нечетких чисел, либо как совокупность «обычных» чисел, полученная при обоснованном оперировании с нечеткими данным. Представление результатов тем или иным образом определяется как постановкой задачи, так и предметом исследования. Публикаций, посвященных обоим подходам, достаточно много, поэтому ограничимся лишь работами [1–15]. Отметим, что в [9–14] полученный результат является нечетким числом (или их набором).

Многие задачи, решаемые в условиях неопределенности, очевидно часто оперируют системами линейных уравнений с нечеткими данными (например, [16–17]). В указанных работах решение осуществляется с представлением результатов в двух названных видах. При этом используются нечеткие числа (гауссовские) с континуальным носителем. Это требует в первом случае (четком результате) использования модальных значений нечетких чисел (т.е. проведения практически их дефазификации). Во втором случае (нечеткий результат) используются условные функции принадлежности или усредненные нечеткие значения, что представляется адекватным далеко не во всех случаях использования систем уравнений с нечеткими параметрами.

Поэтому актуальным является поиск и других подходов к решению систем линейных уравнений с нечеткими данными. В настоящей статье делается определенный шаг в этом направлении для получения четкого результата с использованием данных в виде дискретных нечетких чисел стандартизированного вида, к которым сводятся произвольные нечеткие числа.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Множество (нечеткое множество) пар $A = \{a | \mu(a);$ $a \in [a_L, a_R], \ \mu \in [0,1]\}$ называем нечетким числом.

Определение 2. Множество пар $A = \{a_1 | \mu_1, \ldots, a_n | \mu_n\}$ будем называть дискретным нечетким числом, если $a_i \in R^1 \ \forall i = \overline{1, n}$; $\mu_i \in [0,1]$, $\mu_i > 0 \ \forall i = 2, \ldots, n-1$ (или нечетким числом с дискретным носителем $a_1, \ldots, a_n$). При этом $a_1 = a_L, a_n = a_R$.

Определение 3. Множество пар $A = \{a | \mu(a) \ \forall a \in [a_L, a_R] \subset R^1,$ $\mu(a) \in [0,1]\}$ будем называть нечетким числом с континуальным носителем $[a_L, a_R]$, если $\mu(a) > 0 \ \forall a \in (a_L, a_R)$.

Определение 4. Точку a, в которой $\mu(a) = 1$, назовем пиком для нечеткого числа A.

Определение 5. Дискретное нечеткое число A будем называть однопиковым, если существует единственное i, $1 \le i \le n$, такое, что $\mu_i = 1$, а $\mu_1 = \mu_n = 0$. При этом $a_i = a_M$.

Определение 6. Нечеткое число с континуальным носителем будем называть однопиковым, если существует единственная точка $a_M \in (a_L, a_R)$ такая, что $\mu(a_M) = 1$, а $\mu(a_L) = \mu(a_R) = 0$.

Определение 7. Множество чисел a в множестве пар нечеткого числа A, для которых задана $\mu(a)$, называется носителем, а $\mu(a)$ — функция принадлежности нечеткого числа A.

Определение 8. Нечеткое число A назовем нормальным, если для любых заданных в A элементах носителя a_i^L, a_j^L от a_L до a_M выполняется $\mu(a_i^L) < \mu(a_j^L)$ $\forall a_i^L < a_j^L$ и для любых заданных элементов носителя a_i^R, a_j^R от a_M до a_R выполняется $\mu(a_i^R) > \mu(a_j^R) \ \forall a_i^R < a_j^R$.

Определение 9. Нормальное однопиковое нечеткое число назовем стандартным (с континуальным или дискретным носителем).

Определение 10. Стандартизированным нечетким числом назовем дискретное нечеткое число вида $A = \{a_{L_0}|0;\ a_{L_1}|0{,}25;\ a_{L_2}|0{,}5;\ a_{L_3}|0{,}75;\ a_M|1;\ a_{R_3}|0{,}75;$ $a_{R_2}|0{,}5;\ a_{R_1}|0{,}25;\ a_{R_0}|0\}$, где $a_{L_0} < a_{L_1} < a_{L_2} < a_{L_3} < a_M < a_{R_3} < a_{R_2} < a_{R_1} < a_{R_0}$. Это число можно задавать упорядоченной девяткой $A = (a_{L_0}, a_{L_1}, a_{L_2}, a_{L_3}, a_M, a_{R_3},$ $a_{R_2}, a_{R_1}, a_{R_0}) = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, a_M, \overline{a}_3, \overline{a}_2, \overline{a}_1, \overline{a}_0)$, $a_M = \underline{a}_4 = \overline{a}_4$.

Замечание 1. Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного с континуальным носителем осуществляется дискретизацией носителя в соответствии со значениями функции принадлежности (рис. 1).

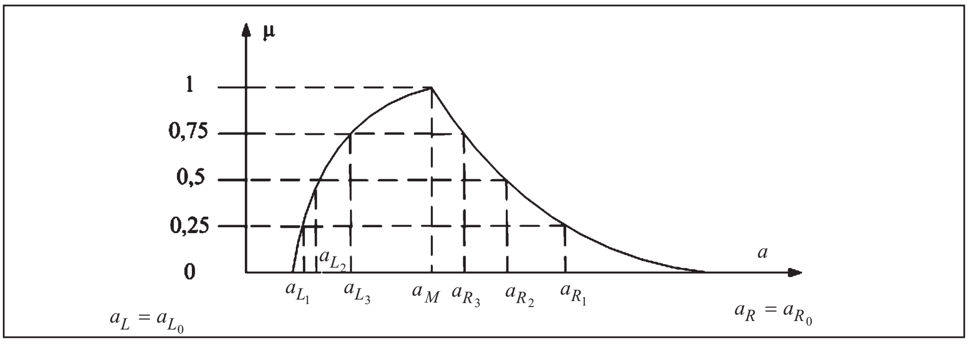

Рис. 1

Отметим, что $\forall a \in [\underline{a}_4, \overline{a}_4]$ выполняется $\mu(a) = 1$; $\forall a \in [\underline{a}_3, \overline{a}_3]$ выполняется $0{,}75 \le \mu(a) \le 1$; $\forall a \in [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ имеем $0{,}5 \le \mu(a) \le 1$; $\forall a \in [\underline{a}_1, \overline{a}_1]$ имеем

$\mu(a) \in [0{,}25; 1]$; $\forall a \in [\underline{a}_0, \overline{a}_0]$ имеем $\mu(a) \in [0; 1]$, т.е. $\forall a \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ имеем $\mu(a) \in [i/4; 1]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Замечание 2. Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного с дискретным носителем можно осуществить по методике, описанной в [18–19].

Замечание 3. Выбор девяти элементов в стандартизированном нечетком числе определяется теми же рассуждениями, что и выбор девяти уровней шкалы Саати [20].

Введем необходимые понятия интервальных матриц, следуя [21].

Две $m \times n$ матрицы $\underline{A}$, $\overline{A}$ будем обозначать $\underline{A}, \overline{A} \in R^{m \times n}$, $\underline{A} \le \overline{A}$ (знаки $\le, <$ для матриц (в том числе векторов) означают поэлементное сравнение, выполняемое для всех элементов).

Определение 11. Множество матриц I_A, $I_A = \{A \mid \underline{A} \le A \le \overline{A}\}$, называется интервальной матрицей. Имеет место и другое обозначение: $I_A = [\underline{A}, \overline{A}]$. Матрицы $\underline{A}$, $\overline{A}$ называются соответственно нижней и верхней границами интервальной матрицы I_A.

Определение 12. Средней матрицей интервальной матрицы I_A называется матрица

$$A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}), \tag{1}$$

а матрицей радиусов интервальной матрицы I_A называется матрица

$$\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}). \tag{2}$$

Замечание 4. Матрица радиусов всегда имеет неотрицательные элементы, т.е.

$$\Delta_{ij} \ge 0 \ \ \forall i = \overline{1, m}; \ \ \forall j = \overline{1, n}.$$

Замечание 5. Согласно определению 12 имеем

$$\underline{A} = A_c - \Delta; \ \ \overline{A} = A_c + \Delta,$$

т.е. $I_A = [\underline{A}, \overline{A}] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ или $I_A = \{A \mid |A - A_c| \le \Delta\}$. Под абсолютной величиной матрицы $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ понимается матрица $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m \times n}$.

Частным случаем интервальной матрицы является интервальный вектор, который можно рассматривать как вектор-столбец или как матрицу из $R^{m \times 1} = R^m$, т.е. матрицу с одним столбцом.

Определение 13. Интервальный вектор — это интервальная матрица с одним столбцом.

Введем следующие обозначения: I_b — интервальный вектор-столбец, $I_b = \{b \mid \underline{b} \le b \le \overline{b}\}$, где $\underline{b}, \overline{b} \in R^m$ — нижняя и верхняя границы для I_b; $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \overline{b})$ — средний вектор интервального вектора I_b; $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$ — вектор радиусов интервального вектора $I_b = [\underline{b}, \overline{b}] = [b_c - \delta; b_c + \delta]$.

Определение 14. Назовем нечеткой матрицей $A^f \in R^{m \times n \times 5}$ трехмерную таблицу (матрицу, массив) с элементами a_{ijt}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $t = 1, 2, \ldots, 5$, где двумерная матрица $I_A^t = (a_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $t = \text{const}$ ($t \in \{1, 2, \ldots, 5\}$), является интервальной матрицей вида $I_A^t = [\underline{A}_t, \overline{A}_t]$. Здесь $\underline{A}_t = (\underline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $\overline{A}_t = (\overline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $t = 0, 1, 2, 3, 4$; a_{ij} — нечеткое стандартизированное число $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, a_{ij4}, \overline{a}_{ij3}, \overline{a}_{ij2}, \overline{a}_{ij1}, \overline{a}_{ij0})$, $a_{ij4} = \overline{a}_{ij4} = \underline{a}_{ij4}$, i — номер строки, j — номер столбца. Число t назовем номером слоя матрицы A^f; I_A^t — слоем t матрицы A^f, а матрицу A^f назовем пятислойной.

Если $A^f \in R^{m \times 1 \times 5}$, то A^f назовем нечетким вектор-столбцом с m нечеткими координатами и обозначим $b^f \in R^{m \times 5}$.

Пример. Пусть a — стандартизированное нечеткое число: $a = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, т.е. $a = (0|0;\ 1|0,25;\ 2|0,5;\ 3|0,75;\ 4|1;\ 5|0,75;\ 6|0,5;\ 7|0,25;\ 8|0)$. Рассмотрим одноэлементный нечеткий вектор (число) $A^f = (I_b^t)$, $t = 0, 1, \ldots, 4$; $m = 1$; $n = 1$, где $I_b^0 = [0; 8]$, $I_b^1 = [1; 7]$, $I_b^2 = [2; 6]$, $I_b^3 = [3; 5]$, $I_b^4 = [4; 4]$. Тогда A^f — пятислойная матрица с одним столбцом и одной строкой (нечеткое число), т.е. $A^f = a$.

Замечание 6. Четкое число $A = \{a|1\}$ задается стандартизированным нечетким числом вида $A = (a, a, a, a, a, a, a, a, a)$, т.е. $\underline{a}_i = \overline{a}_i = a_M = a$ $\forall i = 1, 2, 3, 4$. В интервальном виде число A задается матрицей $I_A^5 = (I_b^t)$, $t = 0, 1, \ldots, 4$, где $I_b^0 = [a; a] = I_b^1 = I_b^2 = I_b^3 = I_b^4$.

Определение 15. Под нечеткой линейной системой уравнений

$$A^f x = b^f \tag{3}$$

будем понимать совокупность пяти интервальных линейных систем [21]:

$$I_A^4 x = I_b^4;\ I_A^3 x = I_b^3;\ I_A^2 x = I_b^2;\ I_A^1 x = I_b^1;\ I_A^0 x = I_b^0. \tag{4}$$

В связи с этим напомним определение интервальной линейной системы.

Определение 16 [21]. Под интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \tag{5}$$

понимают семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{6}$$

где

$$A \in I_A;\ b \in I_b. \tag{7}$$

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Определение 17. Система линейных уравнений (6) называется разрешимой, если она имеет некоторое решение, и допустимой, если она имеет неотрицательное решение.

Определение 18 [21]**.** Система уравнений (5) называется слаборазрешимой (допустимой), если какая-либо из систем (6) с данными (7) разрешима (допустима). Система уравнений (5) называется сильноразрешимой (допустимой), если каждая система (6) с данными (7) разрешима (допустима).

Поставим в соответствие системе уравнений $I_A^t = I_b^t$ с номером $t = 0, 1, 2, 3, 4$ семейство систем уравнений вида (6) с номером t с данными (7)

$$A^t x = b^t, \tag{8}$$

$$A^t \in I_A^t;\ b^t \in I_b^t. \tag{9}$$

Определение 19. Нечеткая система уравнений (3) называется слаборазрешимой (допустимой) в четком смысле, если какая-либо из систем (8) с данными (9) при $t = 4$

$$A^4 x = b^4 \tag{10}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (3) называется сильноразрешимой (допустимой) в четком смысле, если каждая система (10) с данными (9) при $t = 4$ разрешима (допустима).

Определение 20. Нечеткая система уравнений (3) называется слаборазрешимой (допустимой) в квазичетком смысле, если при $t = 3$ какая-либо из систем (8) с данными (9)

$$A^3 x = b^3 \tag{11}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (3) называется сильно-разрешимой (допустимой) в квазичетком смысле, если каждая система (11) с данными (9) при $t=3$ разрешима (допустима).

Определение 21. Нечеткая система уравнений (3) называется слаборазрешимой (допустимой) в получетком (в полунечетком) смысле, если при $t=2$ какая-либо система

$$A^2 x = b^2 \tag{12}$$

из систем (8) с данными из (9) разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (3) называется сильно разрешимой (допустимой) в получетком (в полунечетком) смысле, если каждая система (12) с данными (9) при $t=2$ разрешима (допустима).

Определение 22. Нечеткая система уравнений (3) называется слаборазрешимой (допустимой) в квазинечетком смысле, если при $t=1$ какая-либо система

$$A^1 x = b^1 \tag{13}$$

из систем (8) с данными из (9) разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (3) называется сильноразрешимой (допустимой) в квазинечетком смысле, если каждая система (13) с данными (9) при $t=1$ разрешима (допустима).

Определение 23. Нечеткая система уравнений (3) называется слаборазрешимой (допустимой) в нечетком смысле, если при $t=0$ какая-либо система

$$A^0 x = b^0 \tag{14}$$

из систем (8) с данными из (9) разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (3) называется сильноразрешимой (допустимой) в нечетком смысле, если каждая система (14) с данными (9) при $t=0$ разрешима (допустима).

Введение определений 17–23 объясняется следующим. Пусть необходимо определить, является ли разрешимой некоторая система уравнений

$$A_0 x = b_0,\ A_0 \in R^{m\times n};\ x \in R^n;\ b_0 \in R^m, \tag{15}$$

при этом известно только, что $A_0 \in A^f$, $b_0 \in b^f$.

Тогда очевидно, что система уравнений (15) разрешима, если система уравнений (3) сильноразрешима в четком смысле. Система уравнений (15) неразрешима, если известно, что система уравнений (3) не является слабо разрешимой в нечетком смысле. В других ситуациях она сильно- или слаборазрешима с разной степенью нечеткости.

Вектор $x \in R^n$ называется [21] слабым решением интервальной системы уравнений (5), если он удовлетворяет системе уравнений (6) для некоторых A и b, удовлетворяющих условию (7).

Определение 24. Вектор $x^t \in R^n$ называется слабым решением типа t ($t = 0,1,2,3,4$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (см. (3)), если он является слабым решением в смысле [21] системы уравнений $I_A^t x = I_b^t$ вида (5).

Свойства нечетких матриц и нечетких систем вида (3)–(4) дает следующее утверждение.

Теорема 1. Имеют место включения

$$I_A^t \supset I_A^{t+1}\quad \forall t = 0,1,2,3;\qquad I_b^t \supset I_b^{t+1}\quad \forall t = 0,1,2,3.$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определений 10, 11, 13–16.

Следствие из теоремы 1. Для $\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ — матрицы радиусов интервальной матрицы I_A^t и для $\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$ — вектора радиусов интервального вектора I_b^t, где I_A^t, I_b^t вводятся согласно определениям 14, 15, имеют место неравенства

$$\Delta^{t+1} < \Delta^t,\ \delta^{t+1} < \delta^t,\ t = 0,1,2,3 .$$

Доказательство. Согласно определениям 14, 16 и теореме 1 имеем $\underline{A}^t < \underline{A}^{t+1}$; $\overline{A}^{t+1} < \overline{A}^t$.

Согласно (2) $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, т.е. $\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$, $\Delta^{t+1} = \frac{1}{2}(\overline{A}^{t+1} - \underline{A}^{t+1})$, откуда $\Delta^{t+1} < \Delta^t$ для $\forall t \in \{0,1,2,3\}$. Аналогично согласно определению 13 $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$, а из определений 14–16 и теоремы 1 имеем δ^t: $\underline{b}^t < \underline{b}^{t+1}$; $\overline{b}^{t+1} < \overline{b}^t$. Таким образом, $\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$, $\delta^{t+1} = \frac{1}{2}(\overline{b}^{t+1} - \underline{b}^{t+1})$; в результате имеем $\delta^{t+1} < \delta^t$, $t = 0,1,2,3.$ Следствие доказано.

Теорема 2. Вектор $x^t \in R^n$ является слабым решением типа t $(t = 0,1,2,3,4)$ нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (см. (3)) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству

$$|A_c^t x^t - b_c^t| \le \Delta^t |x^t| + \delta^t , \tag{16}$$

где $A_c^t = \frac{1}{2}(\underline{A}^t + \overline{A}^t)$ — средняя матрица интервальной матрицы I_A^t; $\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ — матрица радиусов интервальной матрицы I_A^t; $b_c^t = \frac{1}{2}(\underline{b}^t + \overline{b}^t)$ — средний вектор интервального вектора I_b^t;

$$\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$$

— вектор радиусов интервального вектора I_b^t.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из критерия Оеттли–Прагера слабой разрешимости интервальной линейной системы и определений слабого решения типа t, нечеткого стандартизированного числа и самого понятия нечеткой линейной системы.

Действительно, известен критерий слабости решения интервальной системы, который доказали Оеттли и Прагер [21, с. 79, теорема 2.9; 22]: вектор $x \in R^n$ является слабым решением интервальной линейной системы (5) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству

$$|A_c x - b_c| \le \Delta |x| + \delta . \tag{17}$$

Используя (17) для каждой системы (4) (при своем t), получаем справедливость теоремы 2.

Теорема 3. Если вектор $x^t \in R^n$ является слабым решением типа t $(t = 1,2,3,4)$ нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (см. (3)), то он является слабым решением типа $t-1$ этой системы.

Доказательство. Если вектор x^t — слабое решение типа t нечеткой системы (3), то согласно определению 24 он является слабым решением системы

$$I_A^t x^t = I_b^t,$$

т.е. является решением некоторой системы $A^t x^t = b^t$ вида (8) с данными (9).

Согласно теореме 1 $I_A^t \subset I_A^{t-1}$, $t = 0,1,2,3,4$. А согласно (9) $A^t \in I_A^t$, а следовательно, $A^t \in I_A^{t-1}$. Аналогично имеем для b^t: $I_b^t \subset I_b^{t-1}$, $t = 0,1,2,3,4$; $b^t \in I_b^t$, т.е. $b^t \in I_b^{t-1}$. Следовательно, вектор x^t удовлетворяет системе $A^t x = b^t$ вида (6) и (8) с данными $A^t \in I_A^{t-1}$; $b^t \in I_b^{t-1}$ вида (7) и (9). Таким образом, согласно определению слабого решения интервальной системы вектор x^t является слабым решением интервальной системы $I_A^{t-1} x^t = I_b^{t-1}$. Согласно определению 27 это означает, что вектор x^t является слабым решением типа $t-1$ нечеткой системы $A^f x = b^f$ вида (3), что и требовалось доказать.

Следствие 1 из теоремы 3. Если при $t = 0, 1, 2, 3, 4$ вектор $x^t \in R^n$ удовлетворяет неравенству (16) при выполнении условий теоремы 3, то он удовлетворяет и неравенству

$$|A_c^{t-1} x^t - b_c^{t-1}| \le \Delta^{t-1} |x^t| + \delta^{t-1} \tag{18}$$

(обозначения взяты из условия теоремы 3).

Доказательство. Справедливость неравенства (18) следует из того, что согласно теореме 3 для x^t — слабого решения типа $t-1$ системы (3) выполняется неравенство (16), в котором все параметры (кроме x^t) имеют номер $t-1$, т.е. выполняется неравенство (18), что и требовалось доказать.

Следствие 2 из теоремы 3. Если вектор $x^t \in R^n$ — слабое решение типа t нечеткой системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (3), то он является слабым решением типа $t-1$, …, 1, 0.

Доказательство заключается в рекуррентном применении теоремы 3.

Замечание 7. Максимальный тип $t_{\max}$ слабого решения $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$ нечеткой линейной системы вида (3) определяет ограничение на значения функции принадлежности элементов этого решения. Очевидно, что $\forall i = \overline{1, n}$ имеем $\mu^t = \mu(x_i^t) \ge \dfrac{t_{\max}}{4}$, т.е. $\mu(x_i^t) \in \left\{ \dfrac{t_{\max}}{4}, \dfrac{t_{\max}}{4} + \dfrac{1}{4}, \ldots, 1 \right\}$.

Замечание 8. Отметим, что слабое решение системы (3): типа $t = 4$ — это слабое решение в четком смысле; типа $t = 3$ — в квазичетком смысле; типа $t = 2$ — в получетком (или, что то же самое, в полунечетком) смысле; типа $t = 1$ — в квазинечетком смысле; типа $t = 0$ — в нечетком смысле.

Введем в рассмотрение вектор $y \in R^m$, координаты которого определим следующим образом:

$$y^i = \frac{(A_c^t x^t - b_c^t)_i}{(\Delta^t |x^t| + \delta^t)_i} \text{ при } (\Delta^t |x^t| + \delta^t)_i > 0, \ i = \{1, 2, \ldots, m\}; \tag{19}$$

$$y^i = 1 \text{ при } (\Delta^t |x^t| + \delta^t)_i = 0, \ i = \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{20}$$

Определим $\forall x \in R^m$ вектор $\operatorname{sgn} x$ с i-й координатой ($i = 1, 2, \ldots, m$):

$$(\operatorname{sgn} x)_i = \begin{cases} 1, & x_i \ge 0; \\ -1, & x_i < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Обозначим D_y для вектора $y \in R^m$ квадратную матрицу из $R^{m \times n}$, в которой элементы вектора находятся на главной диагонали, а все остальные элементы — нулевые, т.е.

$$D_y = \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & y_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & y_m \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Очевидно, что $\forall x \in R^m$ имеет место представление

$$|x| = D_z x, \tag{23}$$

где

$$z = \operatorname{sgn} x, \tag{24}$$

поскольку для произвольного $z \in R^m$ имеем $D_z x = (z_1 x_1, z_2 x_2, \ldots, z_m x_m)^T$, здесь и далее T — символ транспонирования.

Теорема 4. Если вектор x^t — решение неравенства (16), то он удовлетворяет равенству

$$(A_c^t - D_y \Delta D_z) x^t = b_c^t + D_y \delta^t, \tag{25}$$

где вектор y определяется условием (19), (20), а вектор z — равенством (24) при $x = x^t$.

Доказательство. Заметим, что вектор, стоящий под знаком модуля в (16), можно представить как

$$A_c^t x^t - b_c^t = D_y (\Delta^t |x^t| + \delta^t), \tag{26}$$

поскольку $D_y v = (y_1 v_1, y_2 v_2, \ldots, y_m v_m)^T$, где $v = \Delta^t |x^t| + \delta^t$. Таким образом, из (19), (20) имеем

$$(D_y v)_i = \begin{cases} (A_c^t x^t - b_c^t)_i, & v_i > 0, \\ 0, & v_i = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Заметим, что если при некотором x^t, удовлетворяющем (16), правая часть неравенства (16) — нулевой вектор, то и левая часть (16) — нулевой вектор. Это означает, что в (27) можно заменить условия $v_i > 0$ и $v_i = 0$ на $(A_c^t x^t - b_c^t)_i > 0$ и $A_c^t x^t - b_c^t = 0$ соответственно, что и доказывает (26).

Положим $z = \operatorname{sgn} x^t$, тогда $|x^t| = D_z x^t$, а из (26), сгруппировав слева члены с параметром x^t, а справа — без параметра, имеем

$$(A_c^t - D_y \Delta^t D_z) x^t = b_c^t + D_y \delta^t,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим единичный k-мерный вектор $e = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^k$, и если его размерность не указана, то ее легко определить из контекста.

Пусть $I_A^t = [\, A_c^t - \Delta^t;\ A_c^t + \Delta^t \,]$ — заданная интервальная $m \times n$ матрица, определяемая в (4), а $y \in Y_m \subset R^m$, $z \in Y_n \subset R^n$ — векторы соответствующих множеств Y_k, заданных условием $Y_k = \{ y \in R^k \,\big|\, |y| = e \}$. Введем в рассмотрение такие матрицы:

$$A_{yz}^t = A_c^t - D_y \Delta^t D_z \,. \tag{28}$$

Здесь D_y, D_z — матрицы вида (22). Очевидно, что из определения интервальной матрицы и из (28) для элемента матрицы A_{yz}^t имеем

$$(A_{yz}^t)_{ij} = (A_c^t)_{ij} - y_i \Delta_{ij}^t z_j = \begin{cases} \overline{a}_{ij}^t, & y_i z_j = -1; \\ \underline{a}_{ij}^t, & y_i z_j = 1, \end{cases} \tag{29}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если x, z — единичные векторы e, то соответственно D_y, D_z в этом случае — единичные матрицы. Поэтому $A_{ye}^t = A_c^t - D_y \Delta^t$; $A_{ez}^t = A_c^t - \Delta^t D_z$; $A_{-ez}^t = A_c^t + \Delta^t D_z$; $A_{ee}^t = \underline{A}^t$; $\underline{A}_{-ee}^t = \overline{A}^t$. Аналогично для интервального m-мерного вектора $I_b^t = [\, b_c^t - \delta^t, b_c^t + \delta^t \,]$, определяемого в (4), вводим в рассмотрение вектор $b_y^t = b_c^t + D_y \delta^t$, где

$$(b_y^t)_i = (b_c^t)_i + y_i \delta_i^t = \begin{cases} \underline{b}_i^t, & y_i = -1; \\ \overline{b}_i^t, & y_i = 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $y = e$, то $\overline{b}_{-e}^t = \underline{b}^t$, $b_e^t = \overline{b}^t$.

Отметим, что согласно введенным определениям $A_{yz}^t \in I_A^t$; $b_y^t \in I_b^t$.

Теорема 5. Нечеткая линейная система $A^f x = b^f$ вида (5) является слаборазрешимой только в следующем понимании:

1) в четком смысле, когда система $A_{ez}^4 x \le \overline{b}^4$; $-A_{-ez}^4 x \le -\underline{b}^4$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

2) в квазичетком смысле, когда система $A_{ez}^3 x \le \overline{b}^3$; $-A_{-ez}^3 x \le -\underline{b}^3$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

3) в получетком (полунечетком) смысле, когда система $A_{ez}^2 x \le \overline{b}^2$; $-A_{-ez}^2 x \le -\underline{b}^2$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

4) в квазинечетком смысле, когда система $A_{ez}^1 x \le \overline{b}^1$; $-A_{-ez}^1 x \le -\underline{b}^1$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

5) в нечетком смысле, когда система $A_{ez}^0 x \le \overline{b}^0$; $-A_{-ez}^0 x \le -\underline{b}^0$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$.

Доказательство. Нечеткая линейная система $A^f x = b^f$ вида (5) согласно определениям 18–23 является слаборазрешимой в четком ($t = 4$), квазичетком ($t = 3$), получетком ($t = 2$), квазинечетком ($t = 1$), нечетком ($t = 0$) смыслах, если слаборазрешимой является при соответствующем t интервальная система $I_A^t x = I_b^t$. Эта система согласно теореме 2.11 из [21] является слаборазрешимой тогда и только тогда, когда система

$$A_{ez}^t x \le \overline{b}^t, \; -A_{-ez}^t x \le -\underline{b}^t \tag{30}$$

разрешима при некотором векторе $z \in Y_n$. Сравнивая систему (30) при каждом $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ с системами из условия теоремы, видим ее совпадение с одной из таких система (при своем *t*). Теорема доказана.

Слабая разрешимость в четком ($t = 4$), квазичетком ($t = 3$), получетком ($t = 2$), квазинечетком ($t = 1$) и нечетком ($t = 0$) смыслах системы (3) согласно определениям 19–24 означает существование некоторого слабого решения типа *t* нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$. Поэтому с учетом теоремы 3 справедлив следующий вывод.

Следствие из теоремы 5. Если нечеткая система $A^f x = b^f$ вида (5) является: 1) слаборазрешимой в четком смысле, то она слаборазрешима в квазичетком смысле; 2) слаборазрешимой в квазичетком смысле, то она слаборазрешима в получетком (полунечетком) смысле; 3) слаборазрешимой в получетком смысле, то она слаборазрешима в квазинечетком смысле; 4) слаборазрешимой в квазинечетком смысле, то она слаборазрешима в нечетком смысле.

Иными словами, слаборазрешимость является свойством вложенности: из слаборазрешимости при большем t следует ее справедливость и при всех меньших t.

Утверждение 1. Проверка слабой разрешимости нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (3) в любом из перечисленных смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком, нечетком) является NP-трудной задачей.

Справедливость утверждения следует из того, что проверка слабой разрешимости нечеткой системы (3) — это проверка на слабую разрешимость соответствующей интервальной линейной системы, что согласно [21, теорема 2.12] есть NP-трудной задачей.

Для характеризации слабой допустимости (в соответствующем смысле $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) нечеткой системы уравнений вида (3) воспользуемся теоремой 2.

Теорема 6. Нечеткая система уравнений $A^f x = b^f$ вида (3) является слабодопустимой (в соответствующем параметре $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ смысле) тогда и только тогда, когда допустима система

$$\underline{A}^t x \le \overline{b}^t, \tag{31}$$

$$-\overline{A}^t x \le -\underline{b}^t. \tag{32}$$

Доказательство. Понятие слабого решения системы (3) (определение 24) дает возможность утверждать, что система (3) слабодопустима в соответствующем параметру t смысле тогда и только тогда, когда имеет неотрицательное слабое решение типа t, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Согласно теореме 2 вектор x^t является слабым допустимым решением типа t, если и только если он удовлетворяет неравенству

$$|A_c^t x^t - b_c^t| \le \Delta^t |x^t| + \delta^t, \tag{33}$$

которое можно трактовать как

$$-\Delta^t x^t - \delta^t \le A_c^t x^t - b_c^t \le \Delta^t x^t + \delta^t. \tag{34}$$

Из левого неравенства (34) имеем

$$-(A_c^t + \Delta^t) x^t \le -b_c^t + \delta^t, \tag{35}$$

а из правого неравенства получаем

$$(A_c^t - \Delta^t) x^t \le b_c^t + \delta^t. \tag{36}$$

Неравенство (35) эквивалентно (32), а (36) эквивалентно неравенству (31), что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Проверка слабой допустимости нечеткой линейной системы (3) в любом из пяти (соответствующих разным смыслам $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) может быть выполнена с полиномиальными затратами времени.

Справедливость следует из необходимости проверки выполнимости только одной системы неравенств вида (31), (32); согласно [23] это осуществимо за полиномиальное время.

Замечание 9. Результаты работы обобщаются при необходимости на случай рассмотрения более пяти α-уровней [1–7] нечеткого числа.

Замечание 10. Результаты работы обобщаются и на случай, когда пик нечеткого числа достигается больше, чем в одной точке a_M на отрезке $[\underline{a}_4, \overline{a}_4]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье введено понятие нечеткой линейной системы уравнений как совокупности пяти специальных интервальных систем уравнений. Введены понятия слабой и сильной разрешимости (допустимости) нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и нечетком). Обоснованы критерии слабой разрешимости и слабой допустимости нечеткой системы уравнений во всех пяти смыслах. Доказаны другие свойства нечетких систем и их слабых решений (во всех пяти смыслах).

Целесообразным направлением дальнейших исследований является изучение сильной разрешимости и сильной допустимости нечеткой линейной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
2. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе // Классификация и кластер. — М.: Мир, 1980. — С. 208–247.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
4. Кофман А., Алуха Х.Хил. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями. — Минск: Вышэйшая шк., 1992. — 200 с.
5. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 2. — С. 158–162.
6. Сергиенко И. В., Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Там же. — 2003. — № 2. — С. 3–15.
7. Парасюк И.Н., Ершов С.В. О трансформациях нечетких графов, задаваемых FD–граматиками // Там же. — 2007. — № 2. — С. 129–146.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
9. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
10. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Операції та відношення над нечіткими числами // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 5. — С. 39–46.
11. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами // Там же. — 2008 — № 6. — С. 25–33.
12. Донец Г.А., Емец А.О. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 65–76.
13. Емец О.А., Парфенова Т.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации // Там же. — 2010. — № 2. — С. 86–101.
14. Емец О.А., Емец А.О., Парфенова Т.А. Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах // Там же. — 2013. — № 2. — С. 55–60.
15. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. — К.: Выща шк., 1991. — 191 с.
16. Серая О.В., Раскин Л.Г. Решение систем линейных алгебраических уравнений с нечетко заданными параметрами // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. — Харьков, 2006. — Вып. 31. — С. 233–241.
17. Раскин Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. — Харьков: Парус, 2008. — 352 с.
18. Емец О.А., Емец А.О. Редукция нечетких чисел с дискретным носителем // Материалы Междунар. науч. конф. «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI `2012)» (Евпатория, 27–31 мая 2012 г.). — Херсон: ХНТУ, 2012. — С. 361–362.
19. Iemets O.O., Yemets' O.O. About the problem of growing of a discrete fuzzy number carrier during algebraic operations // XX Intern. Conf. Problems of Decision Making under Uncertainties: Abstracts, Sept. 17–21, 2012, Brno (Czech Republic). — Kyiv, 2012. — P. 117–124.
20. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
21. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик и др. — Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. исследований, 2008. — 288 с.
22. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution if linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numer. mathem. — 1964. — № 6. — P. 405–409.
23. Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. — 1979. — **244.** — С. 1093–1096.

Поступила 14.03.2013