УДК 517.958+517.977.5

Е.М. ДОНЧИК

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ С ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия приближенной и 0-управляемости атомарными функциями для уравнения струны, управляемого внешней нагрузкой, на прямоугольной области. Функция внешней нагрузки представлена как скалярное произведение атомарных функций и непосредственно самих управлений. Управления, решающие эти задачи, найдены в явном виде.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача управляемости, управление внешней нагрузкой, преобразование Фурье, функция ограниченной вариации.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управляемости в уравнениях в частных производных возникают при исследовании различных физических процессов, в частности волновых, и привлекают внимание многих математиков (см., например, [1–5], а также библиографию в [3, 4]). Так, Ж.-Л. Лионс в [1] привел основы систематизации задач оптимального управления для уравнений в частных производных. В.А. Ильин в [2] рассмотрел граничное управление процессом колебаний на двух концах и на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. E. Zuazua в [3] исследовал условия ε-управляемости и 0-управляемости в пространстве L_2 для серии задач управления в уравнениях в частных производных.

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Л.В. Фардигола и Г.М. Скляр в [4] рассмотрели задачу управляемости для волнового уравнения в пространстве Соболева H_l^s, где в качестве функции управления выбрано граничное условие

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=0,\ x>0,\ t\in(0,T),$$

с управлением $w(0,t)=-u(t),\ t\in(0,T)$, а также получили необходимые и достаточные условия приближенной и 0-управляемости. К.С. Халина в [5] изучила в пространстве Соболева уравнение струны, где функции управления внесены в краевые условия $w(0,t)=u_0(t),\ w(\pi,t)=u_\pi(t),\ t\in(0,T)$. Л.В. Фардигола в [6] рассмотрела уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}-q^2 w(x,t),\ x>0,\ t\in(0,T),\ q\ge 0,$$

где в качестве функции управления выбрано граничное условие $w_x(0,t)=u(t)$, $t\in(0,T)$. R.F. Curtain и A.I. Pritchard в [7] исследовали сильную стабилизацию систем с бесконечной размерностью для улучшения пертурбации. I. Lasiecka и R.T. Triggiani в [8] изучили регулярность структурно затухающих задач с точечным и с граничным управлением. Y. You в [9] рассмотрел точную управляемость (0-управляемость) для уравнения Петровского на ограниченной области.

Однако в некоторых случаях решения задач управляемости при внесении управлений в граничные условия возникают сложности при практической реализации процедуры поиска результатов решения. В настоящей статье построено управление на основе использования атомарных функций, внесенных в функцию внешней нагрузки, которые решают задачу приближенной управляемости и 0-управляемости.

Обозначим F оператор преобразования Фурье

$$(F\varphi)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{R} e^{-i\sigma x}\varphi(x)dx\,,$$

при этом выполняется $(Ff,\varphi)=(f,F^{-1}\varphi)$.

Далее использованы пространства атомарных функций, впервые введенные В.Л. Рвачевым и В.А. Рвачевым в 1971 г. [10, 11]. Данные функции являются финитными (т.е. с конечным носителем) бесконечно дифференцируемыми решениями функционально-дифференциальных уравнений специального вида, имеют достаточно хорошие аппроксимативные свойства. Иными словами, если существует дифференциальное уравнение [12, 13]

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y(2x+1)-y(2x-1)\,,\ x\in(0,\pi)\,,$$

то его финитным решением является атомарная функция $up(x)$ с носителем $\operatorname{supp} up(x)\in[-1,1]$, преобразование Фурье которой будет $\widetilde{up}(\sigma)=\prod\limits_{i=1}^{K}\frac{\sin\sigma\cdot 2^{-i}}{\sigma\cdot 2^{-i}}$, $K\in\mathbb{N}$. Таким образом, $up(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}\prod\limits_{i=1}^{K}\frac{\sin\sigma\cdot 2^{-i}}{\sigma\cdot 2^{-i}}d\sigma$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем задачу управляемости атомарными функциями для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x,t)\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t\in(0,T)\,,\ T\ge\frac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}\,,\ K\in\mathbb{N}\,, \tag{1}$$

$$g(x,t)=\sum_{j=1}^{n}up\left(\frac{x}{T}-x_j\right)\sum_k \varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\, g_j^{n,K}(t)\,,\ g_j^{n,K}\left(\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T<t\le T\right)\equiv 0\,, \tag{2}$$

где $up(x)$ — атомарная функция; $\varGamma_h$ — оператор сдвига, $(\varGamma_h\varphi)(t)=\varphi(x,t+h)$. При $x_j=\frac{\pi j}{n}$, $j=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $t\in(0,T)$, $T\ge\frac{\pi\cdot 2^K}{2^{K-1}-1}$, $K\in\mathbb{N}$, а $g_j^{n,K}(t)$ — искомая функцияй, определяющая результирующее управление, $j=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Предполагается найти такие представления функции управления $g_j^{n,K}(t)$, которые обеспечат получение решений исходного дифференциального уравнения, принадлежащих заранее определенному классу решений.

Пусть начальные и граничные условия уравнения (1) имеют вид

$$w(x,0)=\partial w(x,0)/\partial t=0\,,\ x\in(0,\pi)\,, \tag{3}$$

$$w(0,t)=w(\pi,\ t)=0\,,\ t\in(0,T)\,. \tag{4}$$

Пусть имеется биекция $f:D\mapsto f(D)$, где $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ — прямоугольник, $x_1\in[a_1,b_1], x_2\in[a_2,b_2]$, П — произвольное разбиение прямоугольника D прямыми $x_1=x_{1_i}, x_2=x_{2_j}$ такими, что $x_{1_i}<x_{1_{i+1}}, x_{2_j}<x_{2_{j+1}}$.

Введем пространство

$$V(D)=\left\{\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2)\,|\,x_1\in[a_1,b_1],x_2\in[a_2,b_2]\ \exists C>0\ \forall n,K\in\mathbb{N}:\\ &\sum_{i=1}^{2^{K-1}-2}\sum_{j=1}^{n-1}|\varphi(x_{1_{i+1}},x_{2_{j+1}})-\varphi(x_{1_i},x_{2_{j+1}})-\varphi(x_{1_{i+1}},x_{2_j})+\varphi(x_{1_i},x_{2_j})|\le C\end{aligned}\right\},$$

где $\varphi:(x_1,x_2)\mapsto\varphi(x_1,x_2)$ — биекция. Тогда функция $f(x_1,x_2)$, определенная на прямоугольнике D и принадлежащая пространству $V(D)$, согласно [12] называется функцией ограниченной вариации. Точную верхнюю грань сумм

$$\sum_{i=1}^{2^{K-1}-2}\sum_{j=1}^{n-1}\left|f(x_{1_{i+1}},x_{2_{j+1}})-f(x_{1_i},x_{2_{j+1}})-f(x_{1_{i+1}},x_{2_j})+f(x_{1_i},x_{2_j})\right|$$

по всевозможным конечным разбиениям Π назовем полной вариацией функции f на прямоугольнике D и обозначим

$$V[f,D]=\sup_{\Pi}\sum_{i=1}^{2^{K-1}-2}\sum_{j=1}^{n-1}\left|f(x_{1_{i+1}},x_{2_{j+1}})-f(x_{1_i},x_{2_{j+1}})-f(x_{1_{i+1}},x_{2_j})+f(x_{1_i},x_{2_j})\right|.$$

Обозначим Q_T прямоугольник: $Q_T=[0\le x\le\pi]\times\left[0\le t\le\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right]$, $K\in\mathbb{N}$.

Замечание 1. Решения волнового уравнения представляют собой функции двух переменных, имеющих вид волны, т.е. $f(x\pm t)$. Отметим, что если $f(t)\in V\left(0,\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$, то $f(x\pm t)\in V(Q_T)$, и наоборот.

У атомарных функций есть некоторые практически эффективные свойства, в частности, они финитны, бесконечно дифференцируемы, имеют явное выражение для преобразования Фурье, удобно вычисляемы. Использование таких атомарных функций позволяет построить эффективную процедуру нахождения управления $g_j^{n,K}(t)$ в каждой точке области $[0\le x\le\pi]\times\left[0\le t\le\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right]$ для любого $n,K\in\mathbb{N}$.

Полагаем, что функция управления в (2) выбирается из пространства $V\left(0,\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$, т.е.

$$g_j^{n,K}(t)\in V\left(0,\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right). \tag{5}$$

Далее получим критерий приближенной управляемости и 0-управляемости атомарными функциями для системы (1)–(4) с ограничениями на управление (5). Отметим, что управления, которые решают задачу управляемости атомарными функциями, находятся в явном виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Определение 1. Система (1)–(4) называется приближенно управляемой за время $T\ge\dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$, если нуль принадлежит замыканию $\mathcal{R}(w)$, и 0-управляемой, если нуль принадлежит $\mathcal{R}(w)$ в $V(Q_T)$.

Обозначим EE оператор нечетного продолжения по x, т.е. $(EEf)(x)=$ $=f(x)-f(-x)$, а OE — оператор четного продолжения, $(OEf)(x)=f(x)+f(-x)$.

Введем нечетные 2π — периодические продолжения по x функции $w(x,t)\in V(Q_T)$:

$$\mathrm{w}(\cdot,t)=\sum_{k\in Z}\varGamma_{2\pi k}\,EE\begin{pmatrix}w(\cdot,t)\\ \partial w(\cdot,t)/\partial t\end{pmatrix}\in V(Q_T),$$

при этом выполняется свойство $(\varGamma_h f,\varphi)=(f,\varGamma_{-h}\varphi)$.

Легко видеть, что управляемая система (1)–(5) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{d\mathrm{w}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{d^2}{dx^2} & 0\end{pmatrix}\mathrm{w}-\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}up\left(\frac{x}{T}-\frac{j\pi}{n}\right)g_j^{n,K}(t),\ n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

$$t \in (0, T), \quad \mathrm{w}(x, 0) = 0 .$$

Применяя преобразование Фурье по x системы (6), получаем следующую задачу Коши в пространстве $V(Q_T)$:

$$\frac{d\mathrm{v}(\sigma, t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{v}(\sigma, t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in Z} e^{2\pi k \sigma i} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \left(e^{-\frac{\pi}{n} j\sigma i} - e^{\frac{\pi}{n} j\sigma i} \right) \Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}} Tk} \prod_{i=1}^{K} \frac{\sin \sigma T 2^{-i}}{\sigma T 2^{-i}} g_j^{n, K}(t), \quad t \in (0, T), \tag{7}$$

$$\mathrm{v}(\sigma, 0) = 0, \tag{8}$$

где $\mathrm{v}(\sigma, t) = F\mathrm{w}(\sigma, t) \in V(Q_T)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Таким образом, функция

$$\mathrm{v}(\sigma, t) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in Z} e^{2\pi k \sigma i} \times$$

$$\times \int_0^t \Omega(\sigma, t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \left(e^{-\frac{\pi}{n} j\sigma i} - e^{\frac{\pi}{n} j\sigma i} \right) \Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}} Tk} \prod_{i=1}^{K} \frac{\sin \sigma T 2^{-i}}{\sigma T 2^{-i}} g_j^{n, K}(\tau) \end{bmatrix} d\tau,$$

где

$$\Omega(\sigma, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\sigma t} + e^{-i\sigma t} & (1/i\sigma)(e^{i\sigma t} - e^{-i\sigma t}) \\ i\sigma(e^{i\sigma t} - e^{-i\sigma t}) & e^{i\sigma t} + e^{-i\sigma t} \end{bmatrix}$$

является решением (7), (8). Тогда

$$\mathrm{w}(\cdot, t) = \sum_{k \in Z} \Gamma_{2\pi k} \int_0^t S(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} up\left(x - \frac{j\pi}{n} \right) \Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}} Tk} g_j^{n, K}(\tau) d\tau$$

будет единственным решением задачи (6) в $V(Q_T)$, где

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1} \Omega(\sigma, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_t + \Gamma_{-t} & (d/dx)^{-1}(\Gamma_t - \Gamma_{-t}) \\ (d/dx)(\Gamma_t - \Gamma_{-t}) & \Gamma_t + \Gamma_{-t} \end{bmatrix}$$

или

$$\mathrm{w}(\cdot, t) = S(t) \left[\sum_{k \in Z} \Gamma_{2\pi k} \int_0^t S(-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} up\left(\frac{x}{T} - x_j \right) \Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}} Tk} g_j^{n, K}(\tau) d\tau \right].$$

Система, определяемая состоянием w, находится множеством $\mathcal{R}_T(\mathrm{w})$ пространства $V(Q_T)$:

$$\mathcal{R}_T(\mathrm{w}) = \bigcup\nolimits_{n, K \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n^K(\mathrm{w}),$$

где

$$\mathcal{R}_n^K(\mathrm{w}) = \left\{ R(\mathrm{w}) \mid T \geq \frac{\pi 2^K}{2^{K-1} - 1} \wedge g_j^{n, K} \in V\left(0, \ \frac{2^{K-1} - 1}{2^K} T \right) \right\},$$

$$R(\mathrm{w}) = \sum_{k \in Z} \Gamma_{2\pi k} \int_0^t S(-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} up\left(\frac{x}{T} - x_j \right) \Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}} Tk} g_j^{n, K}(\tau) d\tau - S^{-1}(t) \mathrm{w}(x, t),$$

$$t \in (0, T).$$

Следовательно, определение 1 равносильно следующему определению.

Определение 2. Состояние w = EEw системы (1)–(4) называется приближенно управляемым за время $T \geq \dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$, если нуль принадлежит замыканию $\mathcal{R}(\mathrm{w})$, и 0-управляемым, если нуль принадлежит $\mathcal{R}(\mathrm{w})$ в $V(Q_T)$.

Выражение $S^{-1}(t)\mathrm{w}(x, t)$, характеризующее систему (1)–(4), представляется в виде

$$S^{-1}(t)\mathrm{w}(x, t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (\Gamma_{-t} + \Gamma_t)\mathrm{w}(x, t) + (d/dx)^{-1}(\Gamma_{-t} - \Gamma_t)(d/dt)\mathrm{w}(x, t) \\ (d/dx)(\Gamma_{-t} - \Gamma_t)\mathrm{w}(x, t) + (\Gamma_{-t} + \Gamma_t)(d/dt)\mathrm{w}(x, t) \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$g_{j,i}^{n,K}(t) = g_j^n(t)\left(H\left(t - \frac{T(2i-1)}{2^K}\right) - H\left(t - \frac{T(2i+1)}{2^K}\right)\right), \; i = \overline{1, 2^{K-1}-1}, \; K \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где H — функция Хевисайда: $H(t) = 1$, если $t > 0$, и $H(t) = 0$, если $t \leq 0$. Тогда

$$\operatorname{supp} \, g_{j,i}^{n,K}(t) \in \left[\frac{T(2i-1)}{2^K}, \frac{T(2i+1)}{2^K}\right], \quad i = \overline{1, 2^{K-1}-1}, \; K \in \mathbb{N}.$$

Пусть $T \geq \dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$, $K \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathcal{R}_n^K(w)$ множество таких состояний $w \in V(Q_T)$, для которых существуют управления $g_j^{n,K} = \sum\limits_i^{2^{K-1}-1} g_{j,i}^{n,K}(t) \in$ $\in V\left(0, \dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$, $j = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, 2^{K-1}-1}$, $K \in \mathbb{N}$ такие, что задача (1)–(3) имеет единственное решение в $V(Q_T)$; $\mathcal{R}(w) = \bigcup_{n, K \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n^K(w)$.

Рассмотрим функцию

$$M(x, t) = -\frac{1}{2T}\left(\frac{d^2}{dx^2}(\Gamma_{-t} + \Gamma_t)\mathrm{w}(x, t) + (\Gamma_{-t} - \Gamma_t)\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\mathrm{w}(x, t)\right).$$

Теорема 1. Система (1)–(4) является приближенно управляемой за время $T \geq \dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$ (а состояние w — приближенно управляемым), если функция

$$w(x, t) \in V(Q_T). \tag{10}$$

Кроме того, если

$$m_{j,i}^{n,K}(x, t) =$$

$$= M(x, t)\left[H\left(x - \frac{\pi(j-1)}{n}\right) - H\left(x - \frac{\pi j}{n}\right)\right]\left[H\left(t - \frac{T(2i-1)}{2^K}\right) - H\left(t - \frac{T(2i+1)}{2^K}\right)\right],$$

$$j = \overline{1, n-1}, \; i = \overline{1, 2^{K-1}-1},$$

$$g_{2j,2i}^{n,K}(t) = -g_{2j,1}^{n,K}\left[-t - (4i-3)\frac{T}{2^K}\right] + \sum_{l=1}^{i} g_{1,2i-2l+1}^{n,K}\left[-t - (2j-2)\frac{\pi}{n} - (4l-1)\frac{T}{2^K}\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j} m_{2j-2i+1, 2i-2l+1}^{n,K}\left[x - (2i-1)\frac{\pi}{n}, \, t - (4l-3)\frac{T}{2^K}\right], \; j = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}, \; i = \overline{1, \left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]},$$

$$g_{2j+1,2i}^{n,K}(t) = -g_{2j+1,1}^{n,K}\left[-t - (4i-3)\frac{T}{2^K}\right] - \sum_{l=1}^{i} g_{1,2i-2l+1}^{n,K}\left[t - (2j-1)\frac{\pi}{n} - (4l-3)\frac{T}{2^K}\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j} m_{2j-2i+2, 2i-2l+1}^{n,K}\left[x - (2i-1)\frac{\pi}{n}, \, t - (4l-3)\frac{T}{2^K}\right], \; j = \overline{1, \left[\frac{n-1}{2}\right]}, \; i = \overline{1, \left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]},$$

$$g_{2j,2i+1}^{n,K}(t)=g_{2j,1}^{n,K}\left[t-(4i-3)\frac{T}{2^K}\right]+\sum_{l=1}^{i}g_{1,2i-2l+2}^{n,K}\left[-t-(2j-2)\frac{\pi}{n}-(4l-1)\frac{T}{2^K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+1,2i-2l+2}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},\,t-(4l-3)\frac{T}{2^K}\right],\;j=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]},\;i=\overline{1,2^{K-2}-1},$$

$$g_{2j+1,2i+1}^{n,K}(t)=g_{2j+1,1}^{n,K}\left[t-(4i-3)\frac{T}{2^K}\right]-\sum_{l=1}^{i}g_{1,2i-2l+2}^{n,K}\left[t-(2j-1)\frac{\pi}{n}-(4l-3)\frac{T}{2^K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+2,2i-2l+2}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},\,t-(4l-3)\frac{T}{2^K}\right],$$

$$j=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},\;i=\overline{1,2^{K-2}-1},\tag{11}$$

где

$$g_{2j,1}^{n,K}(t)=g_{2j,2^{K-1}-1}^{n,K}\left[t+(2^K-3)\frac{T}{2^K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]}g_{1,2^{K-1}-2l+1}^{n,K}\left[-t-(2j-2)\frac{\pi}{n}+(2^K+4l-3)\frac{T}{2^K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+1,2^{K-1}-2l+1}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},\,t+(2^K+4l-1)\frac{T}{2^K}\right];$$

$$g_{2j+1,1}^{n,K}(t)=g_{2j+1,2^{K-1}-1}^{n,K}\left[t+(2^K-3)\frac{T}{2^K}\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{\left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]}g_{1,2^{K-1}-2l+1}^{n,K}\left[-t-(2j-1)\frac{\pi}{n}+(2^K+4l-3)\frac{T}{2^K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{2^{K-1}-1}{2}\right]}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+2,2^{K-1}-2l+1}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},\,t+(2^K+4l-1)\frac{T}{2^K}\right],\;j=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

для четного n имеем

$$g_{1,2i}^{n,K}(x)=-g_{n,2i}^{n,K}\left[-x-(n-2)\frac{\pi}{n}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}g_{n-2l+1,1}^{n,K}\left[x+(2i-2)\frac{T}{2^{K-1}}-(n-2l-1)\frac{\pi}{n}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{p=1}^{i}m_{n-2l+1,2i-2p+1}^{n,K}\left[-x-(n-2l-1)\frac{\pi}{n},\,t-(4p-3)\frac{T}{2^K}\right];$$

$$g_{1,2i+1}^{n,K}(x)=-g_{n,2i+1}^{n,K}\left[-x-(n-2)\frac{\pi}{n}\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}g_{n-2l+1,1}^{n,K}\left[x+(2i-1)\frac{T}{2^{K-1}}-(n-2l-1)\frac{\pi}{n}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{p=1}^{i} m_{n-2l+1,\,2i-2p+2}^{n,K}\left[-x-(n-2l-1)\frac{\pi}{n},\ t-(4p-3)\frac{T}{2^K}\right],$$

для нечетного n имеем

$$g_{1,2i}^{n,K}(x)=g_{n,2i}^{n,K}\left[x+(n-1)\frac{\pi}{n}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} g_{n-2l+2,1}^{n,K}\left[-x-(2i-2)\frac{T}{2^{K-1}}+(n+2l)\frac{\pi}{n}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{p=1}^{i} m_{n-2l+2,2i-2p+1}^{n,K}\left[x+(n+2l)\frac{\pi}{n},\ t-(4p-3)\frac{T}{2^K}\right];$$

$$g_{1,2i+1}^{n,K}(x)=g_{n,2i+1}^{n,K}\left[x+(n-1)\frac{\pi}{n}\right]-\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} g_{n-2l+2,1}^{n,K}\left[-x-(2i-1)\frac{T}{2^{K-1}}+(n+2l)\frac{\pi}{n}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{p=1}^{i} m_{n-2l+2,2i-2p+2}^{n,K}\left[x+(n+2l)\frac{\pi}{n},\ t-(4p-3)\frac{T}{2^K}\right],\ i=\overline{1,2^{K-2}-1},$$

то управления $g_j^{n,K}(t)=\sum_{i=1}^{2^{K-1}-1} g_{j,i}^{n,K}(t)$, $j=\overline{1,n}$, решают задачу приближенной управляемости за время $T\ge\dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$.

Доказательство. Достаточность условия (10). Пусть условие (10) выполняется. Для всех $g_j^{n,K}(t)\in V\left(0,\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$ с учетом (9) имеем

$$\int_0^t S(-\tau)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sum_{j=1}^{n} up\left(\frac{x}{T}-x_j\right)\sum_{i=1}^{2^{K-1}-1} g_{j,i}^{n,K}(\tau)d\tau=-\frac{T}{2}\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left(\Gamma_{\frac{\pi j}{n}}-\Gamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)\partial^{-2}EE(G_j^{n,K})(x)\\ \sum_{j=1}^{n}\left(\Gamma_{\frac{\pi j}{n}}-\Gamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)OE(G_j^{n,K})(x)\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

где $\partial^{-2}f(x)$ — первообразная второго порядка функции $f(x)$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,2^{K-1}-1}$,

$$G_j^{n,K}(t)=\left(\Gamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T}-\Gamma_{-\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T}\right)g_{j,2^{K-1}-1}^{n,K}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\frac{2^{K-1}-2}{2}}\left(\Gamma_{-\frac{2i-1}{2^K}T}-\Gamma_{\frac{2i-1}{2^K}T}\right)g_{j,i}^{n,K}(t).$$

Согласно замечанию 1 из (10) следует

$$M\in V(Q_T). \qquad (13)$$

Для нахождения управления разобьем промежуток $[0,\pi]$ на n равных интервалов, а промежуток $\left[0,\dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right]$ на $2^{K-1}-1$ равных интервалов. Тогда функцию $M(x,t)$ естественно записать в виде суммы $n(2^{K-1}-1)$ финитных функций двух переменных

$$m_{j,i}^{n,K}(x,t),\ \operatorname{supp} m_{j,i}^{n,K}(x,t)\in\left[\frac{\pi(j-1)}{n},\frac{\pi j}{n}\right]\times\left[\frac{T(2i-1)}{2^K},\frac{T(2i+1)}{2^K}\right],$$

$$j=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,2^{K-1}-1},\ K\in\mathbb{N},$$

т.е. $M(x,t)=\sum_{j,i=1}^{n,2^{K-1}-1} m_{j,i}^{n,K}(x,t)$, $n\in\mathbb{N}$, $K\in\mathbb{N}$. При этом выполняется условие

$$\begin{cases} m_{1,i}^{n,K}(x,t)=m_{j,i}^{n,K}\left(\dfrac{\pi j}{n}-x,\ t\right); \\ m_{j,1}^{n,K}\left(x,\ t+\dfrac{T}{2^K}\right)=m_{j,i}^{n,K}\left(x,\ \dfrac{T}{2^K}(2i-1)-t\right); \\ j=\overline{1,n},\ \ i=\overline{1,2^{K-1}-1},\ \ n,K\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{14}$$

Для каждого участка $\left[\frac{\pi(j-1)}{n},\frac{\pi j}{n}\right]\times\left[\frac{T(2i-1)}{2^K},\frac{T(2i+1)}{2^K}\right]$, $j=\overline{1,n-1}$, $i=\overline{1,2^{K-1}-1}$, составим разностные уравнения, что позволит для совокупности рассматриваемых участков для разных j и i построить соответствующие системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} g_{1,1}^{n,K}\left(x-\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+g_{2,1}^{n,K}\left(-x-\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+g_{1,2}^{n,K}\left(-x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+ \\ \qquad +g_{2,2}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)=m_{1,1}^{n,K}\left(x,\ t+\dfrac{T}{2^K}\right), \\ -g_{1,p}^{n,K}\left(-x+\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2T}{2^K}\right)-g_{2,p}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2T}{2^K}\right)+g_{1,p+2}^{n,K}\left(-x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+ \\ \qquad +g_{2,p+2}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)=m_{1,p+1}^{n,K}\left(x,\ t+\dfrac{T}{2^K}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -g_{l,1}^{n,K}\left(-x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+g_{l+2,1}^{n,K}\left(-x-\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)-g_{l,2}^{n,K}\left(x-\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+ \\ \qquad +g_{l+2,2}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)=m_{l+1,1}^{n,K}\left(x,\ t+\dfrac{T}{2^K}\right), \\ g_{l,p}^{n,K}\left(x-\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2T}{2^K}\right)-g_{l+2,p}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2T}{2^K}\right)-g_{l,p+2}^{n,K}\left(x-\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)+ \\ \qquad +g_{l+2,p+2}^{n,K}\left(x+\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2T}{2^K}\right)=m_{l+1,p+1}^{n,K}\left(x,\ t+\dfrac{T}{2^K}\right), \end{cases}$$

$$l=\overline{1,\, j-1},\ j=\overline{2,\, n-1}\,,\ \ p=\overline{1,\, i-1},\ \ i=\overline{2,\, 2^{K-1}-1}\,. \tag{15}$$

Решая эти системы, получаем управления на каждом участке. Из (13) следует $M(x,\, t)\in V\left(0\le x\le \frac{(n-1)\pi}{n}\times 0\le t\le \frac{2^{K-1}-2}{2^K}T\right)$. Тогда

$$V\left(M,0\le x\le \frac{(n-1)\pi}{n}\times 0\le t\le \frac{2^{K-1}-2}{2^K}T\right)=\Delta_{\frac{j\pi}{n},\frac{iT}{2^{K-1}}}=$$

$$=\sup_{Q_T}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{2^{K-1}-3}|\, m_{j+1,\,i+1}^{n,\,K}-m_{j+1,\,i}^{n,\,K}-m_{j,\,i+1}^{n,\,K}+m_{j,\,i}^{n,\,K}\,|=$$

$$=\sup_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^{2^{K-1}-3}|\, m_{2,\,i+1}^{n,\,K}-m_{2,\,i}^{n,\,K}-m_{1,\,i+1}^{n,\,K}+m_{1,\,i}^{n,\,K}\,|+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{n-2}\sum_{i=1}^{2^{K-1}-3}|\, m_{j+1,\,i+1}^{n,\,K}-m_{j+1,\,i}^{n,\,K}-m_{j,\,i+1}^{n,\,K}+m_{j,\,i}^{n,\,K}\,|\right)=$$

$$=\sup_{Q_T}\left(|\, m_{2,2}^{n,\,K}-m_{2,1}^{n,\,K}-m_{1,\,2}^{n,\,K}+m_{1,1}^{n,\,K}\,|+\sum_{i=2}^{2^{K-1}-3}|\, m_{2,\,i+1}^{n,\,K}-m_{2,\,i}^{n,\,K}-m_{1,\,i+1}^{n,\,K}+m_{1,\,i}^{n,\,K}\,|+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{n-2}\sum_{i=1}^{2^{K-1}-3}|\, m_{j+1,\,i+1}^{n,\,K}-m_{j+1,\,i}^{n,\,K}-m_{j,\,i+1}^{n,\,K}+m_{j,\,i}^{n,\,K}\,|\right).$$

С учетом (15) получаем

$$\Delta_{\frac{j\pi}{n},\frac{iT}{2^{K-1}}}=\Delta_1\quad+\Delta_{2\,\frac{iT}{2^{K-1}}}\quad+$$

$$+\sup_{Q_T}\sum_{j=2}^{n-2}\sum_{i=1}^{2^{K-1}-3}\left|g_{j,\,i}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{j+2,\,i}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-\right.$$

$$-g_{j,\,i+2}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j+2,\,i+2}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{j,\,i-1}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g_{j+2,\,i-1}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j,\,i+1}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{j+2,\,i+1}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-$$

$$-g_{j-1,\,i}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j+1,\,i}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j-1,\,i+2}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-$$

$$-g_{j+1,\,i+2}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j-1,\,i-1}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{j+1,\,i-1}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-$$

$$\left.-g_{j-1,\,i+1}^{n,\,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{j+1,\,i+1}^{n,\,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)\right|=$$

$$=V\left(f,0\le x\le \pi\times 0\le t\le \frac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right),\quad T\ge \frac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}, \tag{16}$$

где

$$\Delta_1 = \sup_{Q_T}\left| g_{1,1}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{3,1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{1,3}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+\right.$$

$$+g_{3,3}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{1,1}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{3,1}^{n,K}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g_{1,2}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{3,2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{1,1}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g_{2,1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{1,3}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{2,3}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g_{1,1}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{2,1}^{n,K}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$\left.+g_{1,2}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{2,2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)\right|;$$

$$\Delta_{2\,\frac{iT}{2^{K-1}}} = \sup_{Q_T}\sum_{i=2}^{2^{K-1}-3}\left| g_{1,i}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{3,i}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-\right.$$

$$-g_{1,i+2}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{3,i+2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{1,i-1}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g_{3,i-1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{1,i+1}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{3,i+1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-$$

$$-g_{1,i}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{2,i}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{1,i+2}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-$$

$$-g_{2,i+2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{1,i-1}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g_{2,i-1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$\left.+g_{1,i+1}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g_{2,i+1}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)\right|.$$

Здесь f — линейная комбинация функций $g_j^{n,K}$ со смещенным носителем. Так как каждая g является функцией двух переменных и имеет вид волны, то воспользовавшись замечанием 1 и тем, что каждую функцию ограниченной вариации можно представить как линейную комбинацию функций ограниченной вариации, приходим к выводу, что $g_j^{n,K}(t)\in V\left(0,\ \dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$.

Поскольку $\mathrm{w}\in\mathcal{R}(\mathrm{w})$, то нуль принадлежит замыканию $\mathcal{R}(\mathrm{w})$ в $V(Q_T)$. Таким образом, установлено, что система (1)–(4) приближенно управляемая.

Необходимость условия (10). Пусть система (1)–(4) является приближенно управляемой. Тогда нуль принадлежит замыканию $\mathcal{R}(\mathrm{w})$ в $V(Q_T)$ по определению 2. Поэтому для каждых $\mathrm{w}\in\mathcal{R}(\mathrm{w})$ существуют такие управления $g_j^{n,K}(t)\in V\left(0,\ \dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$, $j=\overline{1,n}$, что

$$\mathrm{w}(\cdot,\ t)=S(t)\left(\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\int_0^t S(-\tau)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sum_{j=1}^n up\left(\frac{x}{T}-x_j\right)G_j^{n,K}(\tau)d\tau\right).$$

С учетом (12) функция $\mathrm{w}(x,t)$ примет вид

$$\mathrm{w}=T\ S(t)\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^n\left(\varGamma_{\frac{\pi j}{n}}-\varGamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)\partial^{-2}EE(G_j^{n,K})(x)\\ \sum\limits_{j=1}^n\left(\varGamma_{\frac{\pi j}{n}}-\varGamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)OE(G_j^{n,K})(x)\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

В координатной форме уравнение (17) можно представить в следующем виде:

$$-\frac{1}{2T}((\varGamma_{-t}+\varGamma_t)\mathrm{w}+(d/dx)^{-1}(\varGamma_{-t}-\varGamma_t)(d/dt)\mathrm{w})=$$

$$=\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\left(\sum_{j=1}^n\left(\varGamma_{\frac{\pi j}{n}}-\varGamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)\partial^{-2}EE(G_j^{n,K})(x)\right); \qquad (18)$$

$$-\frac{1}{2T}(d/dx)((\varGamma_{-t}-\varGamma_t)\mathrm{w}+(\varGamma_{-t}+\varGamma_t)(d/dt)\mathrm{w})=$$

$$=\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\left(\sum_{j=1}^n\left(\varGamma_{\frac{\pi j}{n}}-\varGamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)OE(G_j^{n,K})(x)\right).$$

Для нахождения управления $g_j^{n,K}$, $j=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, достаточно дважды продифференцировать (18) по x:

$$\sum_{k\in Z}\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^{K-1}}Tk}\varGamma_{2\pi k}\left(\sum_{j=1}^n\left(\varGamma_{\frac{\pi j}{n}}-\varGamma_{-\frac{\pi j}{n}}\right)EE(G_j^{n,K})(x)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2T}\left(\frac{d^2}{dx^2}(\varGamma_{-t}+\varGamma_t)\mathrm{w}\right)-\frac{1}{2}\left((\varGamma_{-t}-\varGamma_t)\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x\partial t}\right),$$

где

$$G_j^{n,K}(t)=\left(\varGamma_{\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T}-\varGamma_{-\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T}\right)g^{n,K}_{j,2^{K-1}-1}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\frac{2^{K-1}-2}{2}}\left(\varGamma_{-\frac{2i-1}{2^K}T}-\varGamma_{\frac{2i-1}{2^K}T}\right)g^{n,K}_{j,i}(t).$$

Аналогично построению (15) для каждого участка $\left[\frac{\pi(j-1)}{n},\frac{\pi j}{n}\right]\times\left[\frac{T(2i-1)}{2^K},\frac{T(2i+1)}{2^K}\right]$, $j=\overline{1,n-1}$, $i=\overline{1,2^{K-1}-1}$, составим разностные уравнения, что позволит для совокупности рассматриваемых участков для разных j и i построить систему разностных уравнений.

Используя (16), на основании того факта, что линейная комбинация функций ограниченной вариации также является функцией ограниченной вариации, получаем условие (5). Теорема доказана.

Важным понятием при исследовании управляемых систем является 0-управляемость. Действительно, имеет смысл рассмотреть случай 0-управляемой системы: по определению 0-управляемости имеем $0 \in \mathcal{R}(M)$ в $V(Q_T)$, где $M(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2^{K-1}-1} m_{j,i}^{n,K}(x,t)$.

Теорема 2. Система (1)–(4) является 0-управляемой за время $T \geq \dfrac{\pi 2^K}{2^{K-1}-1}$, если кроме (10) для функции $M(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2^{K-1}-1} m_{j,i}^{n,K}(x,t)$ $\forall n, K \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$m_{n,2^{K-1}-1}^{n,K}\left[x, t+\frac{T}{2^K}\right] + \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-3}{2}} m_{n,2^{K-1}-2l-1}^{n,K}\left[x, t+(1-4l)\frac{T}{2^K}\right] -$$

$$- \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-1}{2}} m_{n,2^{K-1}-2l}^{n,K}\left[x, t-(4l+3)\frac{T}{2^K}\right] + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} m_{n-2i,2^{K-1}-1}^{n,K}\left[x-2i\frac{\pi}{n}, t+\frac{T}{2^K}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-3}{2}} m_{n-2i,2^{K-1}-2l-1}^{n,K}\left[x-2i\frac{\pi}{n}, t+(1-4l)\frac{T}{2^K}\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-1}{2}} m_{n-2i,2^{K-1}-2l}^{n,K}\left[x-2i\frac{\pi}{n}, t-(4l+3)\frac{T}{2^K}\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} m_{n-2i+1,\, 2^{K-1}-1}^{n,K}\left[x-2(i+1)\frac{\pi}{n}, t+\frac{T}{2^K}\right] - \tag{19}$$

$$- \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-3}{2}} m_{n-2i+1,2^{K-1}-2l-1}^{n,K}\left[x-2(i+1)\frac{\pi}{n},\ t+(1-4l)\frac{T}{2^K}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{2^{K-1}-1}{2}} m_{n-2i+1,2^{K-1}-2l}^{n,K}\left[x-2(i+1)\frac{\pi}{n}, t-(4l+3)\frac{T}{2^K}\right] = 0 .$$

Доказательство. Пусть система (1)–(4) является 0-управляемой. Иными словами для всех $g_j^{n,K}(t) \in V\left(0, \dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)$ для каждого отрезка $[\pi(j-1)/n, \pi j/n]$, $j = \overline{1,n}$, полосы $\left[\dfrac{2^{K-1}-3}{2^K}T, \dfrac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right]$ с учетом (14) для функции

$$m_{j,2^{K-1}-1}^{n,K}(x,t) = M(x,t)\left[H\left(x-\frac{\pi(j-1)}{n}\right) - H\left(x-\frac{\pi j}{n}\right)\right] \times$$

$$\times\left[H\left(t-\frac{2^{K-1}-3}{2^K}T\right)-H\left(t-\frac{2^{K-1}-1}{2^K}T\right)\right]$$

получим

$$\begin{cases} -g^{n,K}_{1,2^{K-1}-2}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g^{n,K}_{2,2^{K}-2}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)- \\ -g^{n,K}_{1,2^{K-1}-1}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K-1}}T\right)-g^{n,K}_{2,2^{K-1}-1}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K}}T\right)= \\ =m^{n,K}_{1,2^{K-1}-1}\left(x,t+\frac{T}{2^K}\right), \\ g^{n,K}_{l,2^{K-1}-2}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)-g^{n,K}_{l+2,2^{K-1}-2}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+ \\ +g^{n,K}_{l,2^{K-1}-1}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K-1}}T\right)-g^{n,K}_{l+2,2^{K-1}-1}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K}}T\right)= \\ =m^{n,K}_{l+1,2^{K-1}-1}\left(x,t+\frac{T}{2^K}\right), \\ l=\overline{1,\,j-1},\ j=\overline{2,\,n-1}. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда согласно определению 2 условием 0-управляемости будет следующее равенство:

$$g^{n,K}_{n-1,2^{K-1}-2}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+g^{n,K}_{n,2^{K-1}-2}\left(-x+2\pi-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{2^{K-1}}\right)+$$

$$+g^{n,K}_{n-1,2^{K-1}-1}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K-1}}T\right)+g^{n,K}_{n,2^{K-1}-1}\left(x-2\pi+\frac{\pi}{n}+\frac{2^{K-1}-2}{2^{K-1}}T\right)=$$

$$=m^{n,K}_{n,2^{K-1}-1}\left(x,t+\frac{T}{2^K}\right). \tag{21}$$

Подставляя (11) в уравнение (21) с учетом (20), получаем (19).

Теорема доказана.

Таким образом, условие (19) обеспечивает 0-управляемость системы (1)–(4) в $V(Q_T)$ при условии, что система является приближенно управляемой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача управления атомарными функциями для волнового уравнения струны с внешней нагрузкой, найдены критерии аппроксимативной управляемости и 0-управляемости. Полученные результаты в дальнейшем могут послужить основой для решения задач управления атомарными функциями при исследованиях волновых уравнений более высоких размерностей с внешней нагрузкой и без таковой, а также управляемых систем.

Автор выражает благодарность профессору В.М. Колодяжному за поддержку и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

2. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 11. — С. 1513–1528.

2. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Там же. — 2000. — **36,** № 12. — С. 1670–1685.

3. Zuazua E. Controllability of partial differential equations. — Madrid: Universidad Autonoma, 2002. — 311 p.

4. Sklyar G.M., Fardigola L.V. The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — **276**, N 1. — P. 109–134.

5. Фардигола Л.В., Халіна К.С. Проблеми керованості для рівняння струни // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 7. — С. 939–952.

6. Fardigola L.V. Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant // SIAM J. Control Optim. — 2008. — **47,** N 4. — P. 2179–2199.

7. Curtain R.F., Pritchard A.J. Robust stabilizations of infinite-dimensional systems with respect of coprime factor perturbations // Differential Equations, Dynamical Systems, and Control Science. A Festschrift in Honor of Lawrence Markus: Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Marcel Dekker, 1994. — **152**. — P. 437–456.

8. Lasiecka I., Triggiani R. Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories: Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. — Cambridge: Cambridge University press, 2000. — 1067 p.

9. You Y. Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain // Adv. Appl. Math. — 1990. — N 11. — P. 372–388.

10. Рвачев В Л., Рвачев В.А. Об одной финитной функции // ДАН УССР. Сер. А. — 1971. — С. 705–707.

11. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — К.: Наук. думка, 1979. — 194 с.

12. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Кибернетика и ситемный анализ. — 2007. — № 6. — С. 37–46.

13. Hahn H. Theorie der reellen Funktionen. — Berlin: Springer, 1921. — **1**. — P. 12–21.

Поступила 05.04.2013