СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6: 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКАХ

Аннотация. Исследованы вопросы оптимального управления динамическим температурным состоянием однородной и слоистой пластины (параболической системы) при одновременном наблюдении за температурой и мощностью теплового потока на отдельных ее участках. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок при одновременной идентификации нескольких параметров рассматриваемой системы.

Ключевые слова: идентификация параметров, градиентные методы, параболические системы, явные выражения градиентов функционалов-невязок.

При решении задач продления ресурсов сложных современных сооружений (атомных реакторов, трубопроводов, объектов химической промышленности и др.) возникает необходимость в проведении компьютерного моделирования поведения исследуемых объектов или их отдельных составляющих при сложных силовых и температурных воздействиях. Для проведения таких исследований необходимо учитывать физические и механические параметры исследуемых тел. В процессе эксплуатации ввиду старения характеристики материалов существенно изменяются и для математического моделирования требуется проведение дополнительных исследований для их определения. Часто динамика изменения упомянутых параметров определяется численно на основе решения обратных математических задач при дополнительных наблюдениях за смещениями, температурами в отдельных точках или на отдельных поверхностях [1–3]. В силу того, что в ряде случаев легче проводить наблюдения за изменениями давлений, напряжений, мощностей тепловых потоков, целесообразно эти показатели использовать для построения эффективных вычислительных алгоритмов идентификации параметров исследуемых объектов.

В работах [2, 3] на основе результатов теории оптимального управления [4, 5] получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации различных параметров параболических, а в [6, 7] — соответственно для псевдопараболических и эллиптических многокомпонентных систем при наблюдениях за следами решения задач состояния.

В настоящей статье исследованы вопросы оптимального управления динамическим температурным состоянием однородной и слоистой пластины (параболической системы) при одновременном наблюдении за ее температурой и мощностью теплового потока на отдельных участках. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок при одновременной идентификации нескольких параметров рассматриваемой системы.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЕМ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, l)$, определено уравнение диффузии

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}) + f(x, t), \tag{1}$$

где $0 < k_0 \le k(x) \le k_1 < \infty$, $k \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $f \in C(\Omega_T)$.

На концах отрезка $[0, l]$ при $t \in (0, T)$ заданы смешанные краевые условия

$$-k\frac{\partial y}{\partial x} = u, \quad x = 0, \tag{2}$$

$$k\frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \ x = l. \tag{3}$$

При $t = 0$ задано начальное условие

$$y(x,0) = y_0(x), \ x \in \Omega. \tag{4}$$

На основании задачи состояния (1)–(4) сформулируем задачу оптимального управления. Каждому управлению $u \in \mathcal{U}$ поставим в соответствие значение функционала стоимости

$$J(u) = ||Cy(u) - z_g||_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}}, \tag{5}$$

где $z_g = (z_{g1}(t), z_{g2}(x, t))$ — известный элемент из $\mathcal{H}$, $Cy(u) = (y_1(t), y_2(x, t)) \in$ $\in \mathcal{H} = L_2(0, T) \times L^2(0, T; L_2(\Omega_0))$, $(\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \int_0^T \varphi_1\psi_1 dt + \int_0^T\int_{\Omega_0} \varphi_2\psi_2 dxdt$, $\Omega_0 \subset \Omega$, $||\varphi||_{\mathcal{H}} = (\varphi, \varphi)_{\mathcal{H}}^{1/2}$. $\varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(x, t))$, $\psi = (\psi_1(t), \psi_2(x, t))$; $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, $y_1(t) =$ $= y(u; l, t)$, $y_2(x, t)|_{\Omega_{0T}} = k\left.\frac{\partial y(u)}{\partial x}\right|_{\Omega_{0T}}$, $\Omega_{0T} = \Omega_0 \times (0, T)$, $\mathcal{N}u = \bar{a}u$, $\bar{a} = \text{const} > 0$, $u \in \mathcal{U} = L_2(0, T)$.

Пусть V — некоторое гильбертово пространство, а V' — пространство, двойственное ему. Аналогично [8] определим пространство $L^2(0, T; V)$ функций $t \to f(t)$, отображающих интервал $(0, T)$ в пространство V измеримых и таких функций, что

$$\left(\int_0^T ||f(t)||_V^2(t)dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Введем пространство $W(0, T) = \{f \in L^2(0, T; V) : \frac{df}{dt} \in L^2(0, T; V')\}$. Следуя [8], каждому управлению $u \in \mathcal{U}$ соответствует единственное состояние — функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall v(x) \in V_0 = W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{dy}{dt} v dx + a(y, v) = l(u; v), \quad t \in (0, T), \tag{6}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

где

$$a(y, v) = \int_\Omega k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx + \alpha y(l, t)v(l), \quad l(u; v) = \int_\Omega f v dx + \beta v(l) + uv(0). \tag{8}$$

Обозначим

$$\pi(u, v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(0), \quad \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{\mathcal{H}} + (\bar{a}u, v)_{\mathcal{U}},$$
$$L(v) = (z_g - \bar{y}(0), \bar{y}(v) - \bar{y}(0))_{\mathcal{H}}, \tag{9}$$

где $Cy(v) = \bar{y}(v) = (y_1(v; t), y_2(v; x, t))$, $y_1(v; t) = y(v; l, t)$, $y_2(v; x, t)|_{\Omega_{0T}} = k\frac{\partial y(v)}{\partial x}$,

$x \in \Omega_0$, $t \in (0, T)$. Тогда

$$J(u) = \pi(u, u) - 2L(u) + || z_g - \bar{y}(0) ||^2_{\mathcal{H}}. \tag{10}$$

Пусть $y' = y(u')$, $y'' = y(u'')$ — решения из $W(0, T)$ задачи (6), (7) при функции $u = u(t)$, равной соответственно $u', u'' \in \mathcal{U}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} || y' - y'' ||^2 + \alpha_0 || y' - y'' ||^2_V \le \alpha_1 | u' - u'' | \, || y' - y'' ||_V, \tag{11}$$

где $|| v ||_V = || v ||_{W_2^1(\Omega)}$. Следовательно, $|| y' - y'' ||_{V \times L_2} \le \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} || u' - u'' ||_{\mathcal{U}}$. С учетом теорем вложения [9] имеем

$$|| \bar{y}' - \bar{y}'' ||_{\mathcal{H}} \le c_1 || u' - u'' ||_{\mathcal{U}}. \tag{12}$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ и линейного функционала $L(\cdot)$ на $\mathcal{U}$. На основании [8, гл. 1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 1. Пусть при каждом $u \in \mathcal{U}$ состояние системы определяется как решение задачи (6), (7). Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{13}$$

Управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$\langle J'(u), v - u \rangle \ge 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{14}$$

т.е. когда

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{\mathcal{H}} + (\bar{a}u, v - u)_{\mathcal{U}} \ge 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{15}$$

Для каждого элемента $v \in \mathcal{U}$ сопряженное состояние определим как единственную функцию $\psi \in W(0, T)$, которая $\forall\, z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right) + a(\psi, z) = (y(v; l, t) - z_{g1}(t)) z(l) +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \left(k \frac{\partial y(v)}{\partial x} - z_{g2} \right) k \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad t \in (0, T), \tag{16}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{17}$$

Выбирая $z = y(v) - y(u)$, с учетом (6), (7) на основании (16), (17) имеем

$$(\bar{y}(u) - z_g, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{\mathcal{H}} = \int_0^T (v - u) \psi(0, t) dt. \tag{18}$$

Учитывая полученное равенство, необходимое условие (15) оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ принимает вид

$$\int_0^T (\psi(0, t) + \bar{a}u)(v - u) dt \ge 0 \;\; \forall\, v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{19}$$

Следовательно, выполнение равенств (6), (7), (16), (17) и неравенства (19) является необходимым и достаточным условием существования оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$. Если $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то из (19) получаем

$$u = -\psi(0, t) / \bar{a}. \tag{19'}$$

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ СОСТОЯНИЕМ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть на составной области $\Omega_T = \bigcup_{i=1}^{2} \Omega_{iT}$ определено уравнение диффузии

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + f(x, t), \tag{20}$$

где $\Omega_{iT} = \Omega_i \times (0, T)$, $i = 1, 2$, $\Omega_1 = (0, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, l)$, $0 < \xi < l < \infty$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{2} \Omega_i$. На концах отрезка $[0, l]$ при $t \in (0, T)$ заданы смешанные краевые условия

$$-k \frac{\partial y}{\partial x} = u, \; x = 0, \tag{21}$$

$$k \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \quad x = l. \tag{22}$$

В точке $x = \xi$ при $t \in (0, T)$ условия сопряжения неидеального контакта имеют вид

$$\left[k \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0, \tag{23}$$

$$\left\{ k \frac{\partial y}{\partial x} \right\}^{\pm} = r[y] \;, \tag{24}$$

где $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^{\pm} = \{\varphi\}^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0, t)$, $r = \text{const} \ge 0$.

При $t = 0$ задано начальное условие

$$y(x,0) = y_0(x), \; x \in \Omega. \tag{25}$$

Функционал стоимости имеет вид (5), где $\Omega_0 \subset \Omega_i$, $i \in \{1,2\}$. Следуя [5], каждому управлению $u \in \mathcal{U}$ соответствует единственное состояние – функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, допускающая разрыв в точке $x = \xi$, которая $\forall\, v(x) \in V_0 = \{v(x) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \, i = 1,2\}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{dt} v dx + a(y, v) = l(u; v), \quad t \in (0, T), \tag{26}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{27}$$

где

$$W(0, T) = \{ f \in L^2(0, T; V) : \frac{df}{dt} \in L^2(0, T; V') \},$$

$$V = \{ v(x, t) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \; i = 1, 2, \; t \in (0, T) \},$$

$$a(y, v) = \int_{\Omega} k \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + r[y][v] + \alpha y(l, t) v(l), \, l(u; v) = \int_{\Omega} f v dx + \beta v(l) + u v(0). \tag{28}$$

Пусть $y' = y(u')$, $y'' = y(u'')$ — решения из $W(0, T)$ задачи (26), (27) при функции $u = u(t)$, равной соответственно $u', u'' \in \mathcal{U}$. Справедливы соотношения вида (11), (12). Имеет место теорема, аналогичная теореме 1. Сопряженное состояние $\forall\, v \in \mathcal{U}$ определим как единственную функцию $\psi \in W(0, T)$, которая $\forall\, z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам вида (16), (17), где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена соответствующим выражением (28). Справедливы выражения вида (18), (19), (19′).

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (1)–(4), где функция $u = u(t) \in \mathcal{U} = L_2(0, T)$ является неизвестной. Предположим, что при $x = l$ известно решение этой задачи, а на $\Omega_0 \subset \Omega$ известна мощность теплового потока:

$$y(l, t) = f_0(t), \quad k \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\Omega_0} = f_1(x, t)|_{\Omega_0}, \quad t \in (0, t). \tag{29}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (y(u; l, t) - f_0(t))^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_0} \left(k\frac{\partial y(u)}{\partial x} - f_1\right)^2 dx dt. \tag{30}$$

Задачу (6), (7), (30) будем решать с помощью градиентных методов

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{31}$$

где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются выражениями [1]:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2},$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2},$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2},$$

где J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - \bar{f}$,

$$Au_n = \left\{ y(u_n)|_{(x=l)\times(0,T)}, \; k\left.\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right|_{\Omega_{0T}} \right\}, \quad \bar{f} = \{f_0, f_1\},$$

$$\|e_n\|^2 = \int_0^T (y(u_n; l, t) - f_0(t))^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(k\frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1(x, t)\right)^2 dx dt,$$

$y(u_n)$ — решение задачи (6), (7) при $u = u_n$.

Пусть $u, v \in \mathcal{U}$. При $\lambda \in (0, 1)$ имеем $z = \lambda v + (1 - \lambda) u = u + \lambda (v - u) \in \mathcal{U}$. С учетом обозначений (9) при $\bar{a} = 0$, $z_g = \bar{f}$ имеем

$$2J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|\bar{f} - \bar{y}(0)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\pi(u + \lambda(v - u), u + \lambda(v - u)) - \pi(u, u)}{2\lambda} -$$

$$- \lim_{\lambda \to 0} \frac{2L(u + \lambda(v - u)) - 2L(u)}{2\lambda} = \pi(u, v - u) - L(v - u)$$

или

$$\langle J'_u, v - u \rangle = \pi(u, v - u) - L(v - u) = (\bar{y}(u) - \bar{f}, \bar{y}(v) - \bar{y}(u))_{\mathcal{H}}. \tag{32}$$

Учитывая (32), (6), (7) и полагая $z = y(u_{n+1}) - y(u_n)$, на основе (16), (17) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^T (y(u_n; l, t) - f_0(t))(y(u_{n+1}; l, t) - y(u_n; l, t))dt +$$

$$+\int_0^T \int_{\Omega_0} \left(k \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1 \right) k \frac{\partial (y(u_{n+1}) - y(u_n))}{\partial x} dxdt =$$

$$= -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} (y(u_{n+1}) - y(u_n))dxdt + \int_0^T a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))dt =$$

$$= \int_0^T (l(u_{n+1}; \psi) - l(u_n; \psi))dt = \int_0^T \psi(0, t)\Delta u_n dt$$

или

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^T \psi(0, t)\Delta u_n dt, \tag{33}$$

где $\psi(x, t)$ — решение задачи (16), (17) при $v = u_n$. Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{34}$$

где $\widetilde{\psi}_n = \psi(0, t)$, $|| J'_{u_n} ||^2 = \int_0^T \widetilde{\psi}_n^2 dt.$

Замечание 1. Если $\mathcal{U} = R = (-\infty, \infty)$, то на основании (33) получаем $\widetilde{\psi}_n = \int_0^T \psi(0, t)dt$ и $|| J'_{u_n} || = |\widetilde{\psi}_n|$.

Замечание 2. Если неизвестный параметр u задачи идентификации находится в виде

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(t), \tag{35}$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ — система известных линейно независимых функций, а $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m \in R^m$ является неизвестным вектором, то для его нахождения с помощью градиентного метода (31) градиент J'_{u_n} функционала-невязки имеет вид

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \quad \widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m, \quad \widetilde{\psi}_n^i = \int_0^T \psi(0, t)\varphi_i(t)dt, \quad || J'_{u_n} ||^2 = \sum_{i=1}^m (\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть температурное состояние однородной пластины описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-u \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \quad x = 0, \quad t \in (0, T), \quad u \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{36}$$

где $\Omega = (0, l)$.

Предполагаем, что при $x = l$ известно решение этой задачи, а на $\Omega_0 \subset \Omega$ известна мощность теплового потока:

$$y(l, x) = f_0(t), \quad u \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{\Omega_0} = f_1(x, t)|_{\Omega_0}, \quad t \in (0, T). \tag{37}$$

Полученная задача (36), (37) состоит в определении функции $u = u(x,t) \in$ $\in \mathcal{U} = C_+([0,T]) = \{v(x,t) \in C^{1,0}(\Omega_T) : v > 0 \ \ \forall t \in [0,T]\}$, при которой решение $y(u) = y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (36) удовлетворяет равенствам (37).

Для этой задачи функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(\int_0^T (y(u;l,t) - f_0(t))^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(u \frac{\partial y(u)}{\partial x} - f_1(x,t) \right)^2 dx dt \right). \tag{38}$$

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (36) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y = y(u) = y(u;x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{dy}{dt} v dx + a(u;y,v) = l(v), \ \ t \in (0,T), \tag{39}$$

$$y(u;x,0) = y_0(x), x \in \Omega, \tag{40}$$

где множества $W(0,T)$, V_0 определены в разд. 1,

$$a(u;y,v) = \int_\Omega u \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx + \alpha y(u;0,t) v(0), \quad l(v) = \int_\Omega f v dx + \beta v(0) + \beta_1 v(l).$$

Пусть $\pi(u,v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(u_n), \bar{y}(v) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}$, $L(v) = (\bar{f} - \bar{y}(u_n), \bar{y}(v) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}$, где

$$\bar{y}(u_n) = \left(y(u_n;l,t),\ u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\bigg|_{\Omega_0} \right), \ \ \bar{f} = (f_0(t),\ f_1(x,t)|_{\Omega_0}),$$

$$(\varphi,\psi)_{\mathcal{H}} = \int_0^T \varphi_1(t)\psi_1(t) dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \varphi_2(x,t)\psi_2(x,t) dx dt, \ \ \varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(x,t)),$$

$$\psi = (\psi_1(t), \psi_2(x,t)).$$

Тогда $2J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) + ||\bar{f} - \bar{y}(u_n)||^2_{\mathcal{H}}$.

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (38)–(40) на основании начально-краевой задачи (36) определим функцию $\tilde{y} = \tilde{y}(u_{n+1}) = \tilde{y}(u_{n+1};x,t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_n \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right) + f(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_n \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$-u_n \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = -\alpha \tilde{y} + \beta + \Delta u_n \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$u_n \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = \beta_1 - \Delta u_n \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x = l, \quad t \in (0,T),$$

$$\tilde{y}(x,0) = y_0(x), x \in \Omega, \tag{41}$$

где $y = y(u_n) = y(u_n;x,t)$.

Вместо классического решения начально-краевой задачи (41) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $\tilde{y} = \tilde{y}(u_{n+1}) = \tilde{y}(u_{n+1};x,t) \in$ $\in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{d\tilde{y}}{dt} v dx + a(u_n;\tilde{y},v) = l(u_n, \Delta u_n; v), \quad t \in (0,T), \tag{42}$$

$$\tilde{y}|_{t=0} = y_0, \quad x \in \Omega, \tag{43}$$

где

$$l(u_n, \Delta u_n; v) = (f, v) + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right) v dx + \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} v \Big|_{x=0} -$$

$$-\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} v \Big|_{x=l} + \beta v(0) + \beta_1 v(l). \tag{44}$$

При $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$ $\forall \lambda \in (0,1)$ имеем $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$,

$$\bar{y}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) \approx \bar{\bar{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) = \lambda(\bar{\bar{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n)),$$

где

$$\bar{y}(u_n) = \left\{ y(u_n; l, t), u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\Big|_{\Omega_0} \right\}, \quad \bar{\bar{y}}(u_{n+1}) = \left\{ \tilde{y}(u_{n+1}; l, t),\ u_n \frac{\partial \tilde{y}(u_{n+1})}{\partial x}\Big|_{\Omega_0} \right\}.$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_n + \lambda \Delta u_n) - J(u_n)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_n + \lambda \Delta u_n, u_n + \lambda \Delta u_n) - 2L(u_n + \lambda \Delta u_n) - \pi(u_n, u_n) + 2L(u_n)}{2\lambda} \approx$$

$$\approx \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\bar{\bar{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n), \bar{\bar{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}}{2\lambda} -$$

$$- \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\bar{f} - \bar{y}(u_n), \bar{\bar{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}}{\lambda} = (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{\bar{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}$$

или

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{\bar{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}. \tag{45}$$

На каждом шаге итерационного процесса (31) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (38)–(40) введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в определении функции $\psi(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z\right) + a(u_n; \psi, z) = (y(u_n; l, t) - f_0(t)) z(l) +$$

$$.+ \int_{\Omega_0} \left(u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1\right) u_n \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad t \in (0, T),$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{46}$$

Выбирая в задаче (46) $z = \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, на основании (42), (43), (45) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right) \psi dx dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l}\right) dt. \tag{47}$$

Пусть решение $u(x, t)$ задачи (38)–(40) находится в виде

$$u = u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \varphi_i(x) > 0, \tag{48}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система известных линейно независимых функций на Ω,

$\alpha_i = \alpha_i(t),\ i = \overline{1, m},$ — неизвестные функции. Тогда на основании (47) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \Delta\alpha_i \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_i(x) \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right) \psi dx dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \Delta\alpha_i \left(\varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l} \right) dt. \tag{49}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n, \tag{50}$$

где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,\ \widetilde{\psi}_n^i = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_i(x) \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right) \psi dx + \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l},$$

$$|| J'_{u_n} ||^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (\widetilde{\psi}_n^i)^2 dt.$$

Замечание 3. Если в представлении (48) $\alpha_i = \text{const},\ i = \overline{1, m},$ то на основании (49) имеем

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m,\quad \widetilde{\psi}_n^i = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_i(x) \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}) \psi dx dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l} \right) dt,\quad || J'_{u_n} ||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

Замечание 4. Если $\mathcal{U} = C_+([0, T]) = \{v(t) \in C([0, T]) \colon v > 0\}$, то на основании (47) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx \int_0^T \Delta u_n \left(\int_\Omega \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=1} \right) dt.$$

Следовательно, $J''_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \int_\Omega \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l},\quad || J'_{u_n} ||^2 = \int_0^T \widetilde{\psi}_n^2 dt.$$

Замечание 5. Если восстанавливаемый параметр u находится в виде

$$u = u(t) = u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(t) > 0, \tag{51}$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ — система известных линейно независимых функций, то на основании (47) имеем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i \int_0^T \varphi_i(t) \left(\int_\Omega \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=1} \right) dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$,

$$\widetilde{\psi}_n^i = \int_0^T \varphi_i(t) \left(\int_\Omega \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx + \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \Big|_{x=l} \right) dt,$$

$$|| J'_{u_n} ||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

Замечание 6. Если $\mathcal{U} = R_+ = (0, +\infty)$, то на основании (47) имеем $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2} \psi dx dt + \int_0^T \left(\frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \bigg|_{x=0} - \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \psi \bigg|_{x=l} \right) dt, \; || J'_{u_n} || \approx | \widetilde{\psi}_n |.$$

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ ЕЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим задачу идентификации (36), (38), где при каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (36) используется ее обобщенное решение, т.е. функция $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам (39), (40).

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (36), (38) на основании слабой задачи (39), (40) определим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{y}(u_{n+1}) = \widetilde{y}(u_{n+1}; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} v dx + a(u_n; \widetilde{y}, v) = l(v) - \int_\Omega \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{52}$$

Тогда при $u + \Delta u \in \mathcal{U}$ $\forall \lambda \in (0, 1)$ имеем $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$. Справедливо представление (45), а на основании (46) с учетом (39), (40), (52), пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx -\int_0^T \int_\Omega \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt. \tag{53}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = -\dfrac{\partial y(u_n)}{\partial x} \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, $|| J'_{u_n} ||^2 \approx \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \widetilde{\psi}_n^2 dx dt.$

Замечание 7. Если $u = u(x) \in \mathcal{U} = C_+(\overline{\Omega}) = \{v(x) \in C(\Omega) : v > 0\}$, то на основании (53) получаем $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = -\int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt, \; || J'_{u_n} ||^2 \approx \int_\Omega (\widetilde{\psi}_n(x))^2 dx.$$

Замечание 8. Если $u = u(t) \in \mathcal{U} = C_+([0, T])$, то $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = -\int_\Omega \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx, \; || J'_{u_n} ||^2 \approx \int_0^T \widetilde{\psi}_n^2(t) dt.$$

Замечание 9. Если $u \in \mathcal{U} = R_+ = (0, +\infty)$, то $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt, \; || J'_{u_n} || \approx | \widetilde{\psi}_n |.$$

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ/СТОКОВ

Пусть на области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, l)$, определено уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + u. \tag{54}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-k \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \; x = 0, \; t \in (0, T), \; k \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1, \; x = l, \; t \in (0, T). \tag{55}$$

При $t=0$ задано начальное условие

$$y(x,0)=y_0(x), \quad x\in\Omega . \tag{56}$$

Заданы условия (29). Полученная задача (29), (54)–(56) состоит в определении функции $u=u(x,t)\in\mathcal{U}=C(\Omega_T)$, при которой решение $y=y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (54)–(56) удовлетворяет равенствам (29). Функционал-невязка имеет вид (30).

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (54)–(56) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y=y(u)=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{dy}{dt} v dx + a(y,v)=l(u;v), \ t\in(0,T), \tag{57}$$

$$y(u;x,0)=y_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{58}$$

где

$$a(y,v)=\int_\Omega k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\alpha y(0,t)v(0), \ l(u;v)=(u,v)+\beta v(0)+\beta_1 v(l). \tag{58'}$$

Задачу (57), (58), (30) будем решать с помощью градиентных методов (31). Имеет место равенство вида (32). На каждом шаге итерационного процесса (31) сопряженная задача имеет вид

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, z\right)+a(\psi,z)=(y(u_n;l,t)-f_0(t))z(l)+$$

$$+\int_{\Omega_0}\left(k\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}-f_1\right)k\frac{\partial z}{\partial x}dx \ \ \forall\, z\in V_0, \ t\in(0,T), \tag{59}$$

$$\psi|_{t=T}=0, \ x\in\Omega .$$

Выбирая $z=y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (57), (58) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=(\bar y(u_n)-\bar f, \ \bar y(u_{n+1})-\bar y(u_n))_{\mathcal{H}}=$$

$$=-\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial t}(y(u_{n+1})-y(u_n))\,dxdt+a(\psi, y(u_{n+1})-\bar y(u_n))=\int_0^T\int_\Omega \psi\Delta u_n\,dxdt. \tag{60}$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde\psi_n$, где $\tilde\psi_n=\psi(x,t)$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^T\int_\Omega\tilde\psi_n^2 dxdt.$

Замечание 10. Если мощности внутренних источников/стоков восстанавливаются в виде

$$u(x,t)=u_m(x,t)=\sum_{i=1}^m \alpha_i\varphi_i(x,t), \tag{61}$$

где $\{\varphi_i(x,t)\}_{i=1}^m$ — система известных линейно независимых функций, то на основании (60) имеем

$$J'_{u_n}=\tilde\psi_n, \text{ где } \tilde\psi_n=\{\tilde\psi_n^i\}_{i=1}^m, \ \tilde\psi_n^i=\int_0^T\int_\Omega\varphi_i\psi dxdt, \ \|J'_{u_n}\|^2=\sum_{i=1}^m(\tilde\psi_n^i)^2.$$

Замечание 11. Если искомая функция u находится в виде

$$u(x,t)=u_m(x,t)=\sum_{i=1}^m\alpha_i(t)\varphi_i(x), \tag{62}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых известных функций, то на основании (60) получаем $J'_{u_n}=\tilde\psi_n$, где $\tilde\psi_n=\{\tilde\psi_n^i\}_{i=1}^m$, $\tilde\psi_n^i=\int_\Omega\varphi_i\psi dx$, $\|J'_{u_n}\|^2=$ $=\sum_{i=1}^m\int_0^T(\tilde\psi_n^i(t))^2dt.$

На основе равенства (60) можно также получить явные выражения градиента функционала-невязки для других предположений относительно класса функций, которому принадлежит восстанавливаемая функция.

7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть на области Ω_T определено уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+f(x,t). \tag{63}$$

На концах отрезка $[0,l]$ заданы краевые условия (55), а при $t=0$ имеем

$$y(x,0)=u, \quad x\in\Omega=(0,l). \tag{64}$$

Функционал-невязка имеет вид (30). При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}=C(\Omega)$ вместо классического решения начально-краевой задачи (55), (63), (64) будем использовать ее обобщенное решение — функцию $y=y(u)=$ $=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega \frac{dy}{dt}v\,dx+a(y,v)=l(v), \quad t\in(0,T),$$

$$y(u;x,0)=u(x), \quad x\in\Omega, \tag{65}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена соответствующим выражением (58′), $l(v)=(f,v)+\beta v(0)+\beta_1 v(l)$. Полученную задачу (30), (65) будем решать приближенно с помощью градиентных методов (31). На каждом шаге этого итерационного процесса сопряженная задача имеет вид (59). Выбирая $z=y(u_{n+1})-y(u_n)$, на основании (59) с учетом (65) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=-\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial t}(y(u_{n+1})-y(u_n))dxdt+a(\psi,y(u_{n+1})-y(u_n))=$$

$$=\int_\Omega\psi(x,0)\Delta u_n\,dx. \tag{65′}$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n=\psi(x,0)$, $\|J'_{u_n}\|^2=\int_\Omega\tilde{\psi}_n^2\,dx.$

Замечание 12. Если восстанавливаемое начальное состояние системы находится в виде

$$u=u_m(x)=\sum_{i=1}^m\alpha_i\varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых известных функций, то на основании (65′) имеем $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$, $\tilde{\psi}_n^i=\int_\Omega\varphi_i(x)\psi(x,0)dx$, $\|J'_{u_n}\|^2=\sum_{i=1}^m(\tilde{\psi}_n^i)^2$.

Замечание 13. Если $\mathcal{U}=R=(-\infty,+\infty)$, то $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n=\int_\Omega\psi(x,0)dx$, $\|J'_{u_n}\|=|\tilde{\psi}_n|$.

8. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОБЪЕМНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ

Пусть на области Ω_T определено уравнение теплопроводности

$$u\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial y}{\partial x}\right)+f(x,t). \tag{66}$$

На концах отрезка $[0,l]$ краевые условия имеют вид (55), при $t=0$ задано начальное условие

$$y(u;x,0)=y_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{67}$$

Функционал-невязка определен выражением (30). Полученная задача (30), (55), (66), (67) состоит в определении функции $u = u(x) \in \mathcal{U} = C_+(\overline{\Omega}) = \{v(x) \in C(\overline{\Omega}) : v > 0\}$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x, t)$ начально-краевой задачи (55), (66), (67) удовлетворяет равенствам (29). При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (66), (67), (55) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_{\Omega} u \frac{dy}{dt} v dx + a(y, v) = l(v), \;\; t \in (0, T),$$

$$y(u; x, 0) = y_0(x), \;\; x \in \Omega, \tag{68}$$

(билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$, линейный функционал $l(\cdot)$ и пространства $W(0, T)$, V_0 определены в предыдущем разделе).

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (30), (68) на основании начально-краевой задачи (66), (67), (55) определим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{y}(u_{n+1}) = \widetilde{y}(u_{n+1}; x, t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи:

$$u_n \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} \right) + f(x, t) - \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial t}, \;\; (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = -\alpha \widetilde{y} + \beta, \;\; x = 0, \;\; t \in (0, T), \qquad k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = \beta_1, \;\; x = l, \;\; t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(x, 0) = y_0(x), \;\; x \in \Omega. \tag{69}$$

Определение 1. Обобщенным решением начально-краевой задачи (69) называется функция $\widetilde{y}(u_{n+1}; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(u_n \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}, v \right) + a(\widetilde{y}, v) = l(v) - \left(\Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial t}, v \right), \;\; t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(x, 0) = y_0(x), \;\; x \in \Omega. \tag{70}$$

При $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$ $\forall\, \lambda \in (0, 1)$ имеем $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$, $\overline{y}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \overline{y}(u_n) \approx \approx \overline{\overline{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \overline{y}(u_n) = \lambda(\overline{\overline{y}}(u_{n+1}) - \overline{y}(u_n))$, где

$$\overline{y}(u_n) = \left\{ y(u_n; l, t), k \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\Big|_{\Omega_0} \right\}, \;\; \overline{\overline{y}}(u_{n+1}) = \left\{ \widetilde{y}(u_{n+1}; l, t), k \frac{\partial \widetilde{y}(u_{n+1})}{\partial x}\Big|_{\Omega_0} \right\}.$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_n + \lambda \Delta u_n) - J(u_n)}{\lambda} \approx (\overline{y}(u_n) - \overline{f}, \overline{\overline{y}}(u_{n+1}) - \overline{y}(u_n))_{\mathcal{H}}$$

или

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\overline{y}(u_n) - \overline{f}, \overline{\overline{y}}(u_{n+1}) - \overline{y}(u_n))_{\mathcal{H}}.$$

На каждом шаге итерационного процесса (31) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (30), (68) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-\left(u_n \frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right) + a(\psi, z) = (y(u_n; l, t) - f_0(t)) z(l) +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \left(k \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1 \right) k \frac{\partial z}{\partial x} dx, \;\; t \in (0, T), \qquad \psi|_{t=T} = 0, \;\; x \in \Omega. \tag{71}$$

Выбирая в задаче (71) $z=\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, на основании (68), (70) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle \approx -\int_0^T \left(u_n \frac{\partial \psi}{\partial t}, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n) \right) dt + \int_0^T a(\psi, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))dt =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \Delta u_n \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dxdt. \qquad (72)$$

Учитывая зависимость восстанавливаемого параметра u лишь от переменной x, на основании (72) можем записать: $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = -\int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dt \Big|_\Omega$, $\| J'_{u_n} \| \approx \int_\Omega \widetilde{\psi}_n^2 dx$.

Замечание 14. Если $u \in \mathcal{U} = R_+$, то на основании (72) получаем $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dxdt, \ \| J'_{u_n} \| = |\widetilde{\psi}_n|.$$

Замечание 15. Если восстанавливаемый параметр находится в виде

$$u = u_m(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) > 0,$$

то $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m$, $\widetilde{\psi}_n^i = -\int_0^T \int_\Omega \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi\, dxdt$, $\| J'_{u_n} \|^2 \approx \sum_{i=1}^m (\widetilde{\psi}_n^i)^2$.

9. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОЕМКОСТИ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Пусть на области Ω_T определено дифференциальное уравнение

$$u_1 \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_2 \frac{\partial y}{\partial x} \right) + f(x,t). \qquad (73)$$

На концах отрезка $[0, l]$ при $t \in (0, T)$ заданы краевые условия

$$u_2 \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \quad x = 0,$$

$$u_2 \frac{\partial y}{\partial x} = u_3, \quad x = l. \qquad (74)$$

При $t = 0$ начальное условие имеет вид

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \qquad (75)$$

Функционал-невязка в соответствии с (37) задан выражением

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(\int_0^T (y(u;l,t) - f_0(t))^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(u_2 \frac{\partial y(u)}{\partial x} - f_1(x,t) \right)^2 dxdt \right). \qquad (75')$$

Полученная задача (73)–(75), (75′) состоит в определении вектор-функции $u=(u_1,u_2,u_3) \in \mathcal{U} = C_+(\overline{\Omega}) \times C^{1,0}(\overline{\Omega}_T) \times C(0,T)$, при которой решение $y = y(u) = y(u;x,t)$ начально-краевой задачи (73)–(75) удовлетворяет равенствам (37). При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (73)–(75) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y = y(u) = y(u;x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega u_1 \frac{dy}{dt} v dx + a(u; y, v) = l(u; v), \quad t \in (0, T),$$

$$y(u; x, 0) = y_0(x), \; x \in \Omega, \tag{76}$$

где
$$a(u; y, v) = \int_\Omega u_2 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx + \alpha y(u; 0, t) v(0), \quad l(u; v) = (f, v) + \beta v(0) + u_3 v(l).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (76), (75′) на основании начально-краевой задачи (73)–(75) определим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{y}(u_{n+1}) = \widetilde{y}(u_{n+1}; x, t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи:

$$u_{1n} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{2n} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} \right) + f(x, t) - \Delta u_{1n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right), \; (x, t) \in \Omega_T,$$

$$-u_{2n} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = -\alpha \widetilde{y} + \beta + \Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$u_{2n} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = u_{3n} + \Delta u_{3n} - \Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(u_{n+1}; x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{77}$$

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (77) называется функция $\widetilde{y}(u_{n+1}; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам
$$\left(u_{1n} \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}, v \right) + a(u_n; \widetilde{y}, v) = \widetilde{l}\,(u_n, \Delta u_n; v), \quad t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(u_{n+1}; x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{78}$$

где
$$\widetilde{l}\,(u_n, \Delta u_n; v) = l(u_n; v) - \int_\Omega \Delta u_{1n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right) v dx +$$

$$+ \Delta u_{2n} \left.\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right|_{x=0} v(0) + \left.\left(\Delta u_{3n} - \Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right)\right|_{x=l} v(l).$$

При $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$ $\forall\, \lambda \in (0, 1)$ имеем $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$, $\bar{y}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) \approx \bar{\widetilde{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) = \lambda(\bar{\widetilde{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))$, где

$$\bar{y}(u_n) = \left\{ y(u_n; l, t), u_{2n} \left.\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right|_{\Omega_0} \right\}, \;\; \bar{\widetilde{y}}(u_{n+1}) = \left\{ \widetilde{y}(u_{n+1}; l, t), u_{2n} \left.\frac{\partial \widetilde{y}(u_{n+1})}{\partial x}\right|_{\Omega_0} \right\}.$$

Следовательно,
$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{\widetilde{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}. \tag{79}$$

На каждом шаге итерационного процесса (31) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (76), (75′) сопряженную задачу определим так:

$$-\left(u_{1n} \frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right) + a(u_n; \psi, z) = (y(u_n; l, t) - f_0(t)) z(l) +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \left(u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1 \right) u_{2n} \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad t \in (0, T),$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{80}$$

Выбирая в задаче (80) $z=\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (76), (79) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle \approx (\bar{y}(u_n)-\bar{f}, \bar{\widetilde{y}}(u_{n+1})-\bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}} =$$

$$=-\int_0^T\left(u_{1n}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)\right)dt+\int_0^T a(u_n;\psi, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))dt=$$

$$=\int_0^T\left\{-\Delta u_{1n}\int_\Omega\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\psi dx+\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\psi dx+\right.$$

$$\left.+\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\bigg|_{x=0}-\Delta u_{2n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi|_{x=l}+\Delta u_{3n}\psi|_{x=l}\right\}dt. \qquad (81)$$

Замечание 16. Если $\mathcal{U}=R_+\times R_+\times C([0,T])$, то на основании (81) получаем

$$J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n, \qquad (82)$$

где

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3,\ \widetilde{\psi}_n^1=-\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\psi dxdt,\ \widetilde{\psi}_n^2=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial^2 y(u_n)}{\partial x^2}\psi dxdt+$$

$$+\int_0^T\left(\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\bigg|_{x=0}-\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\bigg|_{x=l}\right)dt,\ \widetilde{\psi}_n^3=\psi(l,t),\ ||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{i=1}^2(\widetilde{\psi}_n^i)^2+\int_0^T(\widetilde{\psi}_n^3)^2\,dt.$$

Замечание 17. Если составляющие вектора u находятся в виде

$$u_1=u_{1m_1}(x)=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_1^i\varphi_i^1(x)>0, \qquad u_2=u_{2m_2}(x)=\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_2^i\varphi_i^2(x)>0,$$

$$u_3=u_{3m_3}(t)=\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_3^i\varphi_i^3(t), \qquad (83)$$

где $\{\varphi_i^l\}_{i=1}^{m_l}$, $l=\overline{1,3}$, — системы известных линейно независимых функций, то $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$,

$$\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^l\},\ \widetilde{\psi}_n^l=\{\widetilde{\psi}_n^{li}\}_{i=1}^{m_l},\ \widetilde{\psi}_n^{1i}=-\int_0^T\int_\Omega\varphi_i^1(x)\frac{\partial y(u_n)}{\partial t}\psi dxdt,$$

$$\widetilde{\psi}_n^{2i}=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_2^i\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\psi dxdt+\int_0^T\left(\varphi_2^i\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\bigg|_{x=0}-\varphi_2^i\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\psi\bigg|_{x=l}\right)dt,$$

$$\widetilde{\psi}_n^{3i}=\int_0^T\varphi_3^i\psi\big|_{x=l}dt, \quad ||J'_{u_n}||^2\approx\sum_{l=1}^3\sum_{i=1}^{m_l}(\widetilde{\psi}_n^{li})^2.$$

Замечание 18. На основании выражения (81) при иных предположениях относительно вида восстанавливаемых параметров вектор-функции u можем получить иные приближения градиента J'_{u_n}.

10. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОЕМКОСТИ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу (73)–(75), (37), где состояние системы описывается слабой задачей (76), а функционал-невязка имеет вид (75′). Пренебрегая членами второго порядка малости, на основании слабой задачи (76) при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}=C_+(\Omega)\times C_+(\Omega)\times L_2((0,T))$ определим функцию $\widetilde{y}=\widetilde{y}(u_{n+1})=\widetilde{y}(u_{n+1};x,t)\in W(0,T)$, удовлетворяющую $\forall\, v(x)\in V_0$ равенствам

$$\left(u_{1n} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, v \right) + a(u_n; \tilde{y}, v) = \tilde{l}_1(u_n, \Delta u_n; v), \ t \in (0, T),$$

$$\tilde{y}(u_{n+1}; x, 0) = y_0(x), \tag{84}$$

где форма $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ определена в предыдущем разделе,

$$\tilde{l}_1(u_n, \Delta u_n; v) = (f, v) + \beta v(0) + u_{3n} v(l) - \left(\Delta u_{1n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t}, v \right) -$$

$$- \int_{\Omega} \Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \Delta u_{3n} v(l).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, с учетом выражения вида (79) на основании (76), (84) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \quad \bar{\tilde{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}} =$$

$$= -\int_0^T \left(\Delta u_{1n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t}, \psi \right) dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_{2n} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt + \int_0^T \Delta u_{3n} \psi(l, t) dt. \tag{85}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3, \quad \tilde{\psi}_n^1 = -\int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dt, \quad \tilde{\psi}_n^2 = -\int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dt,$$

$$\tilde{\psi}_n^3 = \psi(l, t), \ \| J'_{u_n} \|^2 \approx \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\tilde{\psi}_n^i)^2 dx + \int_0^T (\tilde{\psi}_n^3)^2 dt.$$

Замечание 19. Если $\mathcal{U} = R_+ \times R_+ \times C([0, T])$, то $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3$, $\tilde{\psi}_n^1 =$ $= -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dx dt,$

$$\tilde{\psi}_n^2 = -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt, \ \tilde{\psi}_n^3 = \psi(l, t), \ \| J'_{u_n} \|^2 \approx \sum_{i=1}^2 (\tilde{\psi}_n^i)^2 + \int_0^T (\tilde{\psi}_n^3)^2 dt.$$

Замечание 20. Если восстанавливаемые параметры находятся в виде (83), то на основании (85) получаем $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^l\}_{l=1}^3, \ \tilde{\psi}_n^l = \{\tilde{\psi}_n^{li}\}_{i=1}^{m_l}, \ l = \overline{1,3}, \ \tilde{\psi}_n^{1i} = -\int_0^T \int_{\Omega} \varphi_1^i \frac{\partial y(u_n)}{\partial t} \psi dx dt,$$

$$\tilde{\psi}_n^{2i} = -\int_0^T \int_{\Omega} \varphi_i^2 \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt, \ \tilde{\psi}_n^{3i} = \int_0^T \varphi_3^i \psi(l, t) dt, \ \| J'_{u_n} \|^2 \approx \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{m_l} (\tilde{\psi}_n^{li})^2 .$$

Также заметим, что при других предположениях относительно вида восстанавливаемых параметров на основании выражения (85) можем получить соответствующие явные выражения приближения градиента J'_{u_n} функционала-невязки (75′).

11. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (20)–(25), где функция $u = u(t) \in \mathcal{U} = L_2(0, T)$ является неизвестной. Предположим, что при $x = l$ известно решение этой задачи, а на $\Omega_0 \subset \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $(\Omega_1 = (0, \xi),$

$\Omega_2 = (\xi, l)$, $0 < \xi < l < \infty$) известна мощность теплового потока, заданные равенствами (29). Функционал-невязка имеет вид (30). Задачу (20)–(25), (30) будем решать с помощью градиентных методов (31). При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (20)–(25) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y = y(u) \in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам вида (26), (27) (пространства $W(0,T)$, V_0 определены в разд. 2). Имеет место выражение вида (32).

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения $u_{n+1} \in \mathcal{U}$ задачи (26), (27), (30) определим сопряженную задачу, состоящую в нахождении функции $\psi(x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall\, z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z\right) + a(\psi, z) = (y(u_n; l, t) - f_0) z(l) +$$

$$+\int_{\Omega_0} \left(k \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} - f_1\right) k \frac{\partial z}{\partial x}\, dx, \quad t \in (0,T), \tag{86}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Полагая $z = y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (26), (27), (32) на основании (86) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{y}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}} = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial t} (y(u_{n+1}) - y(u_n)) dx dt +$$

$$+\int_0^T a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) dt = \int_0^T (l(u_{n+1}; \psi) - l(u_n; \psi)) dt = \int_0^T \psi(0,t) \Delta u_n dt,$$

где $\psi(x,t)$ — решение задачи (86).

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n, \tag{87}$$

где $\tilde{\psi}_n = \psi(0,t)$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^T \tilde{\psi}_n^2 dt$.

Для этой задачи идентификации остаются в силе замечания 1, 2.

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРА ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть на области $\Omega_T = \bigcup_{i=1}^{2} \Omega_{iT}$ определено уравнение диффузии

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x}\right) + f(x,t) \tag{88}$$

(области Ω_{iT}, $i = 1, 2$, определены в разд. 2).

На концах отрезка $[0, l]$ при $t \in (0,T)$ заданы смешанные краевые условия

$$-k \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1, \ x = 0; \qquad k \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \ x = l. \tag{89}$$

В точке $x = \xi$ при $t \in (0,T)$ условия сопряжения неидеального контакта имеют вид

$$\left[k \frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0, \quad \left\{k \frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{\pm} = u[y]. \tag{90}$$

При $t = 0$ задано начальное условие

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{91}$$

Известные наблюдения заданы равенствами (29). Функционал-невязка имеет вид (30). При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения начально-краевой задачи (88)–(91) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y = y(u) = y(u; x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{dt} v dx + a(u; y, v) = l(v), \quad t \in (0, T), \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega \tag{92}$$

(гильбертовы пространства $W(0, T)$, V_0 определены в разд. 2),

$$a(u; y, v) = \int_{\Omega} k \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \alpha y\ (l, t) v(l) + u[y][v], \qquad l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \beta_1 v(0) + \beta v(l).$$

Следуя [5], при каждом $u \in \mathcal{U} = \{v(x) \in C([0, T]) : v \geq 0\}$ решение $y = y(u) \in W(0, T)$ задачи (92) существует и единственное. Задачу идентификации (30), (92) будем решать с помощью градиентных методов (31).

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (30), (92) на основании начально-краевой задачи (88)–(91) определим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{y}(u_{n+1}) = \widetilde{y}(u_{n+1}; x, t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = \beta_1, \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} = -\alpha\, \widetilde{y} + \beta, \quad x = l, \quad t \in (0, T),$$

$$\left[k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} \right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$\left\{ k \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} \right\}^{\pm} = u_n[\widetilde{y}] + \Delta u_n[y(u_n)], \quad x = \xi, \quad t \in (0, T),$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{93}$$

Определение 3. Обобщенным решением начально-краевой задачи (93) называется функция $\widetilde{y}(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, v(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t}, v \right) + a(u_n; \widetilde{y}, v) = \widetilde{l}\,(u_n, \Delta u_n; v), \quad t \in (0, T),$$

$$\widetilde{y}(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \tag{94}$$

где $\widetilde{l}\,(u_n, \Delta u_n; v) = l(v) - \Delta u_n[y(u_n)][v]$.

При $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$ $\forall\, \lambda \in (0,1)$ имеем $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$, $\bar{y}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) \approx$ $\approx \bar{\bar{y}}(u_n + \lambda \Delta u_n) - \bar{y}(u_n) = \lambda(\bar{\bar{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))$, где

$$\bar{y}(u_n) = \left\{ y(u_n; l, t), k \left. \frac{\partial y(u_n)}{\partial x} \right|_{\Omega_0} \right\}, \ \bar{\bar{y}}(u_{n+1}) = \left\{ \widetilde{y}(u_{n+1}; l, t), k \left. \frac{\partial \widetilde{y}(u_{n+1})}{\partial x} \right|_{\Omega_0} \right\}.$$

Следовательно,

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{\bar{y}}(u_{n+1}) - \bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}. \tag{95}$$

На каждом шаге итерационного процесса (31) определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (92), (30) сопряженная задача состоит в определении функции $\psi(x, t) \in W(0, T)$, которая $\forall\, z(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right) dt + \int_0^T a(u_n; \psi, z) dt = (\bar{y}(u_n) - \bar{f}, \bar{z})_{\mathcal{H}}, \tag{96}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Выбирая в задаче (96) $z = \widetilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, на основании (92), (94), (95) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx -\int_0^T \Delta u_n [y(u_n)][\psi] dt. \tag{97}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = -[y(u_n)][\psi]|_{x=\xi}$, $||J'_{u_n}||^2 = \int_0^T \widetilde{\psi}_n^2 dt.$

Замечание 21. Если восстанавливаемый параметр находится в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(t) \geq 0, \tag{98}$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, определенных на отрезке $[0, T]$, то на основании (97) получаем $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^m, \ \widetilde{\psi}_n^i = -\int_0^T \varphi_i [y(u_n)][\psi] dt, \ ||J'_{u_n}||^2 \approx \sum_{i=1}^m (\widetilde{\psi}_n^i)^2.$$

Замечание 22. Если $\mathcal{U} = R_+$, то $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}_n$, $\widetilde{\psi}_n = -\int_0^T [y(u_n)][\psi] dt, ||J'_{u_n}||^2 \approx |\widetilde{\psi}_n|$.

13. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ПАРАМЕТРА СЛАБОПРОНИЦАЕМОГО ПРОСЛОЯ И МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Пусть температурное состояние составной пластины описывается уравнениями

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \bar{f}_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_{1T},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \bar{f}_2(x, t), \ (x, t) \in \Omega_{2T}. \tag{99}$$

На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$-u_1 \frac{\partial y}{\partial x} = u_2(t), \quad x = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$k \frac{\partial y}{\partial x} = -\alpha y + \beta, \quad x = l, \quad t \in (0, T). \tag{100}$$

Условия сопряжения в точке $x = \xi \ \ \forall t \in (0, T)$ имеют вид

$$\left\{ k \frac{\partial y}{\partial x} \right\}^+ = \left\{ u_1 \frac{\partial y}{\partial x} \right\}^- = u_3[y]. \tag{101}$$

При $t = 0$ задано начальное условие

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2. \tag{102}$$

Известные наблюдения заданы равенствами

$$y(l, t) = f_0(t), \ u_2 \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{\Omega_0} = f_1(x, t)\Big|_{\Omega_0}, \ t \in (0, T).$$

Функционал-невязка имеет вид (75′). При каждом фиксированном $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{U}=C_+^1(\overline{\Omega})\times C([0,T])\times C_+([0,T])$ вместо классического решения начально-краевой задачи (99)–(102) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $y=y(u)=y(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{dy}{dt},v\right)+a(u;y,v)=l(u;v),\ \ t\in(0,T),$$

$$y|_{t=0}=y_0,\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{103}$$

где

$$a(u;y,v)=\int_{\Omega_1}u_1\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\int_{\Omega_2}k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx+u_3[y][v]+\alpha y(l)v(l),$$

$$l(u;v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\bar{f}_i v\,d\Omega_i+u_2v(0)+\beta v(l)\,.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (75′), (103) на основании начально-краевой задачи (99)–(102) определим функцию $\tilde{y}=\tilde{y}(u_{n+1})=\tilde{y}(u_{n+1};x,t)$, являющуюся решением начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{1n}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)+\bar{f}_1(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u_{1n}\frac{\partial y}{\partial x}\right),\quad (x,t)\in\Omega_{1T},$$

$$\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right)+\bar{f}_2(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_{2T},$$

$$-u_{1n}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}=u_{2n}(t)+\Delta u_{1n}\frac{\partial y}{\partial x}+\Delta u_{2n},\quad x=0,\quad t\in(0,T),$$

$$k\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}=-\alpha\tilde{y}+\beta,\ \ x=l,\ \ t\in(0,T),$$

$$\left\{k\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\right\}^+=\left\{u_{1n}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}+\Delta u_{1n}\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^-=u_{3n}[\tilde{y}]+\Delta u_{3n}[y],\quad x=\xi,\quad t\in(0,T),$$

$$\tilde{y}(x,0)=y_0(x),\quad x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{104}$$

где $y=y(u_n)=y(u_n;x,t)$.

Вместо классического решения начально-краевой задачи (104) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. функцию $\tilde{y}=\tilde{y}(u_{n+1})=\tilde{y}(u_{n+1};x,t)\in$ $\in W(0,T)$, которая $\forall\, v(x)\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_{\Omega}\frac{d\tilde{y}}{dt}v\,dx+a(u_n;\tilde{y},v)=l(u_n,\Delta u_n;v),\quad t\in(0,T)\,,$$

$$\tilde{y}|_{t=0}=y_0,\ \ x\in\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2, \tag{105}$$

где

$$a(u_n;y,v)=\int_{\Omega_1}u_{1n}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\int_{\Omega_2}k\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx+u_{3n}[y][v]\,,\ \ l(u_n,\Delta u_n;v)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\bar{f}_i v\,dx+\Delta u_{1n}\frac{\partial y}{\partial x}v\bigg|_{x=0}+\ \beta v(l)-\Delta u_{3n}[y][v]-\Delta u_{1n}\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^-v^-+\ \Delta u_{2n}v(0)\,.$$

Сопряженная задача состоит в определении функции $\psi(x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall z\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},z\right)+a(u_n;\psi,z)=(y(u_n;l,t)-f_0(t))z(l)+\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_0}\left(u_{1n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}-f_1\right)u_{1n}\frac{\partial z}{\partial x}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_2\cap\Omega_0}\left(k\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}-f_1\right)k\frac{\partial z}{\partial x}dx,\quad t\in(0,T),\ \psi|_{t=T}=0,\quad x\in\Omega. \qquad (106)$$

Выбирая в задаче (106) $z=\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, на основании (103), (105) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx(\bar{y}-\bar{f},\bar{\tilde{y}}(u_{n+1})-\bar{y}(u_n))_{\mathcal{H}}=$$

$$=\int\limits_0^T(y(u_n;l,t)-f_0(t))(\tilde{y}(u_{n+1};l,t)-y(u_n;l,t))dt+$$

$$+\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_0}\left(u_{1n}\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}-f_1\right)\left(u_{1n}\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}-\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_2\cap\Omega_0}\left(k\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}-f_1\right)\left(k\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}-\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\right)dx\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\Delta u_{1n}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\psi\bigg|_{x=0}-\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{-}v^{-}\right)+\Delta u_{2n}\psi(0,t)-\Delta u_{3n}[y][\psi]\right)dt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}^i_n\}^3_{i=1}$, $\tilde{\psi}^1_n=\dfrac{\partial y}{\partial x}\psi\bigg|_{x=0}-\left\{\dfrac{\partial y}{\partial x}\right\}^{-}v^{-}$, $\tilde{\psi}^2_n=\psi(0,t)$, $\tilde{\psi}^3_n=-[y][\psi]$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\sum\limits_{i=1}^3\int\limits_0^T(\tilde{\psi}^i_n)^2\,dt$.

Замечание 23. Если $u_i=\mathrm{const}$, то $\tilde{\psi}^i_n=-\int\limits_0^T\tilde{\psi}^i_n dt\ \ \forall i\in\{1,2,3\}$.

Замечание 24. Если при определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (99)–(102) функцию $\tilde{y}(u_{n+1})$ определим на основе слабой задачи (103), т.е. как функцию $\tilde{y}\in W(0,T)$, которая $\forall v\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t},v\right)+a(u_n;\tilde{y},v)=l(u_n,\Delta u_n;v),\ t\in(0,T),$$

$$\tilde{y}|_{t=0}=y_0,x\in\Omega,$$

то $J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n$, где $l(u_n,\Delta u_n;v)=-\int\limits_{\Omega_1}\Delta u_{1n}\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}dx-\Delta u_{3n}[y][v]+\Delta u_{2n}v(0)+$ $+\sum\limits_{i=1}^2\int\limits_{\Omega_i}\bar{f}_i v dx+u_{2n}v(0)+\beta v(l)$, $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}^i_n\}^3_{i=1}$, $\tilde{\psi}^1_n=-\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{\Omega_{1T}}$, $\tilde{\psi}^2_n=\psi(0,t)$, $\tilde{\psi}^3_n=$ $=-[y][\psi]|_{x=\xi}$, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_1}(\tilde{\psi}^1_n)^2dxdt+\sum\limits_{i=1}^2\int\limits_0^T(\tilde{\psi}^i_n)^2\,dt$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49–73.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — 2007. — № 5. — С. 48–71.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
5. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. — 400 p.
6. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для псевдопараболических многокомпонентных распределенных систем // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 4. — С. 33–58.
7, Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач для эллиптико-параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — 2008. — № 3. — С. 74–99.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
9. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
10. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.

Поступила 09.11.2012