КИБЕРНЕТИКА

Г.А. ДОНЕЦ, И.В. СЕРГИЕНКО

УДК 519.1

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И ПОДКЛАССЫ РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. На примере задачи о коммивояжере рассмотрен класс трудноpешаемых задач комбинаторной оптимизации, которые имеют полиномиальный алгоритм решения. Доказано, что этому классу принадлежат задачи, у которых специальным образом смоделирована структура исходных данных.

Ключевые слова: труднорешаемые задачи, полиномиальный алгоритм, NP-полные задачи, задача о коммивояжере, задача о назначениях, разрешимый подкласс задач, комбинаторная оптимизация, матрицы Супника, Кальмансона, Демиденко, Монжа.

ВВЕДЕНИЕ

При решении новых задач часто возникает вопрос, можно ли их решить полиномиальным алгоритмом. В случае отрицательного ответа необходим более детальный анализ этой задачи с использованием известной теории о труднорешаемых задачах [1].

Если задача NP-полная, то ее нельзя решить полиномиальным алгоритмом. В этом случае дальнейший анализ задачи можно провести двумя путями.

Первый путь состоит в том, чтобы детальнее проанализировать параметры задачи. Известны примеры NP-полных задач, которые при определенных значениях параметров становятся менее сложными и допускают решение за полиномиальное время. Некоторые NP-полные задачи с числовыми параметрами могут иметь естественные ограничения полиномиального характера на величины этих параметров. Тогда эту задачу можно решить с помощью псевдополиномиального алгоритма.

Второй путь возможен, если задача возникает в практической области. В процессе ее формализации часто абстрагируются от некоторых кажущихся несущественными деталей и особенностей. Однако если их учесть, то задача может измениться до такой степени, что станет разрешимой за полиномиальное время, либо у нее появятся некоторые важные частные подзадачи, которые можно решить за полиномиальное время. Бывает, что индивидуальные задачи, плохо поддающиеся решению, встречаются относительно редко и имеют такие легко обнаруживаемые особенности, позволяющие заблаговременно распознать эти задачи. Таким образом, второй путь сводится к анализу подзадач рассматриваемой задачи, которые возникают, когда на множество индивидуальных задач накладываются дополнительные ограничения в широком смысле слова — будь то упрощение исходных данных или изменение основных параметров задачи.

В настоящей статье рассмотрены подобные ограничения на исходные данные в предположении, что они представлены определенным способом, поэтому предлагаемый метод называвается методом моделирования структуры исходных данных.

Задачи комбинаторной оптимизации достаточно хорощо исследованы [2, 3]. Для некоторых из них существуют эффективные алгоритмы точного решения. Согласно [1] эффективным называется алгоритм, сложность которого оценивается полиномом от длины входных данных, как правило, с не очень высокой степенью. Подавляющее большинство комбинаторных задач оптимизации NP-полные, т.е. такие, для которых маловероятно существование полиномиальных алгоритмов решения. Наиболее известна задача о коммивояжере (ЗК), которая формулируется следующим образом.

Пусть R_n — пространство всех симметрических $n \times n$-матриц над полем вещественных чисел R, а $C = || c_{ij} ||$ — матрица расстояний из R_n. Необходимо найти циклическую перестановку π на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которая минимизирует функцию

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi(i)}. \tag{1}$$

Это означает, что коммивояжер должен объехать все города от 1 до n в произвольной последовательности и вернуться в исходный город, при этом выбрать кратчайший путь $\gamma = 1, \pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots., \pi(n) = 1$.

Задача о коммивояжере является одной из фундаментальных проблем комбинаторной оптимизации. Прежде всего она имеет важное практическое значение, так как примененяется в различных сферах человеческой деятельности и науки, таких как кристаллография, социология, приборостроение, планирование, теория расписаний и др. Она имеет также важное теоретическое значение, поскольку все новые методы, которые были предложены для решения трудных комбинаторных задач, проходили свою первую проверку на ЗК. Именно с нее начали изучать различные подклассы индивидуальных задач, налагая на входные данные дополнительные ограничения.

Определение 1. Подкласс $\{\pi, S\}$ NP-полной задачи П с дополнительными ограничениями S называется разрешимым, если при этих ограничениях существует полиномиальный алгоритм ее решения.

Известно, что проблема минимизации функции (1) на всех (не обязательно циклических) перестановках называется задачей о назначениях. Очевидно, что если решение этой задачи является циклической перестановкой, то оно также оптимально и для ЗК. Если бы имелась возможность так сформулировать дополнительные ограничения S, по которым оптимальное решение о назначениях являлось циклической перестановкой, то был бы найден подкласс разрешимости для ЗК, так как любая задача о назначениях решается полиномиальным венгерским алгоритмом.

В работе [4] приведен классический обзор публикаций о ЗК, из которого следует, что список разрешимых подклассов ЗК сравнительно небольшой [4, гл. 4].

Первые разрешимые ЗК были получены, когда они рассматривалась для городов, размещенных на одной плоскости. Следующий подкласс можно получить, если на элементы матрицы расстояний наложить ограничение, чтобы их значения подчинялись правилу треугольника. Однако наибольшее распространение получили различные способы ограничений на четыре элемента матрицы расстояний.

Пусть $1 \le i < j < k < l \le n$ — произвольные четверки целых чисел, а $C = || c_{ij} || \in R_n$ — произвольная матрица расстояний. Обозначим $\theta_1 = c_{ij} + c_{kl}$; $\theta_2 = c_{ik} + c_{jl}$; $\theta_3 = c_{il} + c_{jk}$.

Определение 2. Симметрическая матрица $C \in R_n$ называется матрицей Кальмансона, если выполняются условия

$$\theta_1 \le \theta_2, \; \theta_3 \le \theta_2. \tag{2}$$

Множество матриц Кальмансона обозначим $\mathcal{K}$. Условие (2) можно записать в виде $\theta_2 = \max \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Кальмансон доказал, что если $C \in \mathcal{K}$, то оптимальным маршрутом ЗК будет $\gamma = (1, 2, \ldots, n-1, n)$.

Определение 3. Симметрическая матрица $C \in R_n$ называется матрицей Супника, если выполняются следующие условия:

$$\theta_1 \le \theta_2,\ \theta_3 \ge \theta_2. \qquad (3)$$

Множество матриц Супника обозначим $\mathcal{S}$. Условие (3) можно записать в виде $\theta_1 = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Супник доказал, что для ЗК с матрицей Супника оптимальным маршрутом будет $\gamma = (1, 3, 5, 7, \dots, 8, 6, 4, 2)$.

Нетрудно заметить, что в (2) и (3) имеется общее первое условие. Если оно выполняется, а оба вторых условия не выполняются, то получим более мощное множество $\mathcal{D}$ симметрических матриц Демиденко, которые названы в честь автора статьи [5], где они впервые рассматривались. Таким образом, $(\mathcal{K} \cup \mathcal{S}) \in \mathcal{D}$.

Определение 4. Пирамидальным маршрутом ЗК называется такой маршрут $\gamma = (1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, n, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{n-2})$, в котором $i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1}$ и $i_{k+1} > > i_{k+2} > \dots > i_{n-2}$.

Число таких маршрутов достаточно большое и равно 2^{n-2}. Однако, как показано в [6], наилучший маршрут среди них можно найти полиномиальным алгоритмом порядка $O(n^2)$. В.М. Демиденко также доказал, что для матрицы $C \in \mathcal{D}$ всегда существует оптимальный маршрут, который является пирамидальным. Таким образом, установлено, что ЗК с матрицей расстояний Демиденко (Кальмансона и Супника) представляет подкласс разрешимых задач. Проверить выполнение условий (2) или (3) для произвольной матрицы C можно за полиномиальное время порядка $O(n^4)$. Известно, что множество оптимальных решений ЗК имеет следующие так называемые свойства устойчивости относительно воздействий на матрицы расстояний:

1) множество оптимальных решений для ЗК с матрицей $C = ||c_{ij}||$ то же, что и для матрицы $C' = ||c_{ij} + a_i + b_j||$, где (a_i) и (b_j) — произвольные векторы;

2) одновременная перестановка столбцов и строк матрицы $C = ||c_{ij}||$ в соответствии с перестановкой δ не изменяет длины оптимального маршрута ЗК. Оптимальный маршрут для матрицы $C' = ||c_{\delta(i)\delta(j)}||$ получается из оптимального маршрута для матрицы C вследствие действия перестановки δ на его составляющие элементы.

Однако те же воздействия не всегда сохраняют принадлежность матрицы расстояний к подклассу $\mathcal{D}$ ($\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$). Действительно, нетрудно проверить, что линейные преобразования (свойство 1) не влияют на комбинаторные свойства матриц Демиденко, Кальмансона и Супника. В то же время перестановки строк или столбцов матрицы могут привести к потере некоторых ее свойств, согласно которым она определяется как матрица, принадлежащая подклассам $\mathcal{D}(\mathcal{K}, \mathcal{S})$. В связи с этим как необходимость возникает следующая проблема.

Проблема распознавания. Задана матрица $C = ||c_{ij}|| \in R_n$. Найти перестановку δ такую, что матрица $C' = ||c_{\delta(i)\delta(j)}|| \in \mathcal{D}$.

Если такая перестановка существует, то матрица C называется переупорядоченной матрицей Демиденко (Кальмансона, Супника). Очевидно, что поиск перестановки δ в данном случае намного сложнее, чем распознавание условий (2) или (3). Обобщая понятие разрешимости, можно утверждать, что разрешимый случай есть действительно разрешимым, если его можно распознать за полиномиальное время. Отметим, что до сих пор не решен вопрос о существовании такой перестановки для конкретной матрицы расстояний.

При решении этого вопроса можно ослабить условие того, что перестановка должна быть одинаковой как для строк, так и для столбцов. С учетом этих обстоятельств усилия многих исследователей были направлены на то, чтобы найти такую перестановку δ для строк матрицы расстояний $C = ||c_{ij}|| \in R_n$, а также такую перестановку τ для ее столбцов, чтобы матрица расстояний $C' = ||c_{\delta(i)\tau(j)}||$ имела структуру, согласно которой соответствующая ЗК принадлежала бы к подклассу разрешимых задач. В результате были найдены матрицы со специальной комбинаторной структурой — матрицы Монжа.

Определение 5. Произвольная матрица $C = || c_{ij} || \in R_n$ называется матрицей Монжа, если $\theta_1 \le c_{il} + c_{kj}$ для всех $1 \le i < k \le n$, $1 \le j < l \le n$.

Отметим, что здесь в отличие от определений 2 и 3 матрица C не обязательно симметрическая, а четыре элемента имеют иную упорядоченность своих индексов. Задача о коммивояжере с переупорядоченной матрицей расстояний Монжа называется ЗК Монжа.

Матрицы Монжа интенсивно изучались, что способствовало обнаружению различных их свойств, которые не имели прямого отношения к ЗК. Благодаря этим свойствам найдены решения многих комбинаторных задач, о решении которых раньше и не подозревали. Задачи о коммивояжере Монжа появились вследствие усовершенствования ранее известных ЗК Гилмора и Гомори [7].

Значительный вклад в решение этой проблемы сделала группа ученых из Минска под руководством Д.А. Супруненко (В. Айзенштадт, В. Демиденко, Н. Метельский, Д. Кравчук), а также ученые из Днепропетровска (В. Бурдюк, В. Трофимов, В. Дейнеко).

ПОДКЛАССЫ РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ И ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Как известно, теория NP-полных задач базируется на теории решения задач распознавания. Это объясняется тем, что последние имеют естественный формальный эквивалент, удобный для изучения методами вычислений и называемый языком. Соотношение между задачами распознавания и языками устанавливаются с помощью схем кодирования, которые обычно применяются для представления индивидуальной задачи при ее решении на компьютере. Для любой разумной схемы кодирования вводится функция, которая полиномиально эквивалентна длине кода индивидуальной задачи. Поскольку две различные схемы кодирования одной и той же задачи полиномиально эквивалентны, диапазон для выбора схем кодирования широк и полученные результаты будут верны для обоих случаев. Множество объектов может представляться в виде произвольно упорядоченной последовательности элементов этого множества и соответственно кодироваться.

Граф $G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E, как правило, представляется набором неупорядоченных (или упорядоченных) пар (x, y), где $x, y \in V$ являются концами ребра. Этот же граф можно задать в виде квадратной $n \times n$-матрицы смежностей $A(G) = || a_{ij} ||$, где $a_{ij} = 1$, если вершины с номерами i и j смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Ввиду симметричности матрицы $A(G)$ для ее задания достаточно выписать в определенном порядке лишь те элементы, которые расположены над главной диагональю, т.е. задать кортеж длины C_n^2:

$$(a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

Число $\mu(G) = a_{12} + a_{13} 2^1 + a_{14} 2^2 + \ldots + a_{n-1,n} 2^{C_{n-1}^2}$ называется двоичным кодом матрицы $A(G)$. При различных нумерациях вершин получается $n!$ различных кодов матрицы смежности. Наименьший из этих кодов называется мини-кодом $\underline{\mu}(G)$, а наибольший — макси-кодом $\overline{\mu}(G)$. Существует еще один способ представления графов в виде числовых графов.

Определение 6. Числовым графом $G = (X, U, F, g)$ называется n-вершинный граф, представленный двумя множествами: $X \in \{1, 2, \ldots, n\} = N_n$ — множество вершин и $U \in N$ — множество образующих, а также функциями смежности $F(x_i, x_j)$ и исключения $g(x)$. В нем вершина $x_k \notin X$, если $g(x_k) = 0$, а вершины $x_i, x_j \in X$ смежны, если $F(x_i, x_j) \in U$.

Если $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$, то такой числовой граф называется арифметическим, если $F(x_i, x_j) = | x_i - x_j |$, то — модульным, если функция $g(x)$ отсутствует, что равносильно $X = N_n$, то, — натуральным числовым графом. Функция $g(x)$ никаких определенных свойств не имеет, она может перечислять подмножество вершин, не принадлежащих X.

В большинстве случаев, когда заданный граф имеет определенную структуру — несколько осей симметрии или периодически повторяющиеся части, задать функции $F(x_i, x_j)$ и $g(x)$ не сложно. Однако для произвольно взятых графов такое представление сопряжено с определенными трудностями. Основное свойство и преимущество числовых графов состоит в том, что их структура задается только их образующими, что в значительной степени экономит память при их размещении в компьютере. Кроме того, обычный поиск в массивах данных заменяется вычислительными операциями. Еще одно преимущество числовых графов по сравнению с обычными описано в [8] в виде гипотезы: все NP-полные задачи на числовых графах имеют полиномиальный алгоритм решения.

Аналогично по-разному представляются произвольные матрицы: в виде двумерного массива $A = || a_{ij} ||$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ и как одномерный массив длины mn, если считывать элементы по строкам или по столбцам. Для квадратных матриц можно считывать элементы даже по диагоналям.

Очевидно, что перечисленные схемы кодирования соответствуют неформальному понятию разумных схем кодирования, потому что они являются достаточно сжатыми и легко допускают декодирование за полиномиальное время. Таким образом, можно предположить, что для решения задач схема кодирования не играет особой роли.

Однако при поиске разрешимых подклассов NP-полных задач, как уже отмечалось, необходимо накладывать дополнительные ограничения на условия задачи. Очевидно, что если условия задачи закодированы очень сложной схемой, то поиск дополнительных ограничений будет связан с определенными трудностями. Если условия задачи закодированы с помощью объектов более простой структуры, то дополнительные ограничения также будут находиться и записываться проще. Это важно не только для вопросов кодирования, но и для распознавания разрешимых условий задачи.

Определение 7. Подкласс $\{\pi, e, S\}$ индивидуальных задач $\Pi(e, S)$ NP-полной задачи со схемой кодирования e и дополнительными ограничениями $S(e)$ на элементы этой схемы называется разрешимым, если при этих ограничениях существует полиномиальный алгоритм решения задачи.

Рассмотрим применение этого подхода к анализу подзадач ЗК. Пусть ее исходные данные представляются в виде симметрической $n \times n$-матрицы расстояний $C = || c_{ij} || \in R_n$. Запишем только ее наддиагональные элементы: сначала — первую строку, затем — вторую и так далее, т.е. представим эту структуру в более простом виде — одномерным массивом

$$c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1n}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}, c_{34}, \ldots, c_{n-1,n}.$$

Поставим в соответствие этой последовательности функцию натурального аргумента $\varphi(t) = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(m)\}$, где $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Лемма 1. Для $j > i$ имеет место соответствие $\varphi(t) = c_{ij}$, где

$$t = n(i-1) - \frac{i(i+1)}{2} + j. \tag{4}$$

Действительно, если бы учитывались все элементы каждой строки, то элемент c_{ij} имел бы номер $t = n(i-1) + j$. Из этого числа необходимо вычесть количество недиагональных элементов первых i строк, т.е. число $\sum_{k=1}^{i} k = \dfrac{i(i+1)}{2}$, что и приведет к формуле (4).

Введем обозначения:

$$\varphi(t_1) = c_{ij};\ \varphi(t_2) = c_{ik};\ \varphi(t_3) = c_{il};\ \varphi(t_4) = c_{jk};\ \varphi(t_5) = c_{jl};\ \varphi(t_6) = c_{kl}.$$

В дальнейшем будем считать, что матрица $c = || c_{ij} ||$ представлена матрицей натурального аргумента $\varphi(t)$.

Лемма 2. Для произвольных $1 \le i < j < k < l \le n$ имеем $t_1 < t_2 < t_5 < t_6$. Используя формулу (4), проверим последовательно три неравенства:

$$n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+j< n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+k \Rightarrow j< k,$$

$$n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+k< n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+l \Rightarrow 0< (j-i)\left(\frac{2n-i-j-1}{2}\right)+l-k,$$

$$n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+l< n(k-1)-\frac{k(k+1)}{2}+l \Rightarrow 0< n(k-j)\left(\frac{2n-j-k-1}{2}\right).$$

Учитывая, что максимальные значения параметров $i=n-3$, $j=n-2$, $k=n-1$ и $l=n$, в правых частях последних двух сравнений всегда будут положительные числа, что и подтверждает справедливость леммы 2.

Лемма 3. Для произвольных значений $1 \le i < j < k < l \le n$ справедливо

$$t_1 + t_6 \ge t_2 + t_5. \tag{5}$$

Подставляя соответствующие значения, получим

$$n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+j+n(k-1)-\frac{k(k+1)}{2}+l \ge n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+k+n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+l.$$

Отсюда следует $n(k-j) \ge \frac{(k-j)(k+j+1)}{2}$. Поскольку $k > j$, оно равносильно $n \ge \frac{k+j+1}{2}$. Максимальные значения $k=n-1$, $j=n-2$, поэтому неравенство справедливо для произвольных k и j. Это означает, что неравенство (5) справедливо, как и лемма 3.

Теорема 1. Если $\varphi(t)$ — линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом, то соответствующая подзадача ЗК принадлежит подклассу разрешимых задач.

Доказательство. Представим линейную функцию в виде $\varphi(t)=\lambda t + c$, где λ — угловой коэффициент прямой, а c — произвольная константа. Возьмем произвольные значения $1 \le i < j < k < l \le n$ и проверим для этой функции соотношение (2): $\theta_1 \le \theta_2$ или, что равносильно

$$\varphi(t_1)+\varphi(t_6) \le \varphi(t_2)+\varphi(t_5). \tag{6}$$

Подставляя сюда значения функции, получаем

$$\lambda\left[n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+j\right]+c+\lambda\left[n(k-1)-\frac{k(k+1)}{2}+l\right]+c \le$$

$$\le \lambda\left[n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+k\right]+c+\lambda\left[n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+l\right]+c.$$

После преобразований имеем соотношение

$$\lambda\left[\left(\frac{2n-k-j-3}{2}\right)(k-j)\right] \le 0.$$

Поскольку $k > j$, а даже максимальные значения k и j не изменят в первых скобках неотрицательного значения, это соотношение справедливо только для $\lambda \le 0$, что соответствует невозрастающей последовательности $\varphi(t)$.

Рассмотрим теперь второе соотношение из (2) для этой функции. Оно равносильно соотношению $\varphi(t_3)+\varphi(t_4) \le \varphi(t_2)+\varphi(t_5)$. Подставим сюда соответствующие значения:

$$\lambda\left[n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+l\right]+c+\lambda\left[n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+k\right]+c\le$$

$$\le\lambda\left[n(i-1)-\frac{i(i+1)}{2}+k\right]+c+\lambda\left[n(j-1)-\frac{j(j+1)}{2}+l\right]+c.$$

В результате упрощений получаем $0\le 0$. Аналогичный результат имеем и для случая, когда заменим в (6) знак неравенства на противоположный, т.е. справедливо второе условие для матрицы Супника.

Следствие. Матрица расстояний ЗК, представленная линейной функцией $\varphi(t)$, является одновременно матрицей Кальмансона и Супника.

Таким образом, данная подзадача ЗК принадлежит подклассу разрешимых задач, что и требовалось доказать. Н.К. Тимофеева в своей диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук впервые в качестве функции расстояний предложила линейную функцию.

Отметим, что для доказательства теоремы не было необходимости доказывать второе неравенство, так как после выполнения условия (6) было ясно, что данная матрица является матрицей Демиденко, что достаточно для справедливости теоремы 1.

Напомним, что выпуклой (вверх) функцией на отрезке $[c,d]$ называется функция $f(x)$, для которой справедливо

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

где $x_1,x_2\in[c,d]$.

Существует равносильное, более общее определение для аналогичных точек с таким неравенством:

$$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\ge\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\,.$$

Целочисленная функция с целыми аргументами $1,2,\dots,m$ будет выпуклой, если для произвольных трех значений $1\le p<q<r\le m$ справедливо

$$f(q)\ge\frac{q-p}{r-p}f(p)+\frac{r-q}{r-p}f(r)\,.$$

Теорема 2. Если $\varphi(t)$ выпуклая и невозрастающая функция, то соответствующая подзадача ЗК принадлежит подклассу разрешимых задач.

Доказательство. Выберем произвольные значения $1\le i<j<k<l\le n$ и соответствующие им значения s_1,s_2,s_3,s_4. Проверим неравенство $c_{ij}+c_{kl}\le$ $\le c_{ik}+c_{jl}$. Для этого построим график функции $\varphi(s)$ и зафиксируем значения функции $\varphi(s_1)$, $\varphi(s_2)$, $\varphi(s_3)$ и $\varphi(s_4)$ (рис. 1).

Соединим хордой концы функции и найдем ординаты точек пересечения хорды с абсциссами s_2 и s_3. Запишем

$$z_1=\frac{s_4-s_2}{s_4-s_1}\,d(s_1)+\frac{s_2-s_1}{s_4-s_1}\,d(s_1)\,,\qquad z_2=\frac{s_4-s_3}{s_4-s_1}\,d(s_1)+\frac{s_3-s_1}{s_4-s_1}\,d(s_4)\,.$$

В силу выпуклости функции справедливо $d(s_2)\ge z_1$; $d(s_3)\ge z_2$; $d(s_2)+d(s_3)\ge z_1+z_3$. Подставляя в неравенство $d(s_2)+d(s_3)\ge z_1+z_3$ значения z_1 и z_2, после несложных преобразований получаем

$$d(s_2)+d(s_3)\ge d(s_1)+d(s_4)+\left(\frac{s_4+s_1-s_2-s_3}{s_4-s_1}\right)[d(s_1)-d(s_4)]\,.$$

В силу леммы 3 выражение в скобках имеет положительный знак, поэтому $d(s_2)+d(s_3)\ge d(s_1)+d(s_4)$, что равносильно $a_{ij}+a_{kl}\le a_{ik}+a_{jl}$. Это означает, что заданная функция соответствует основному условию матриц разрешимых случаев.

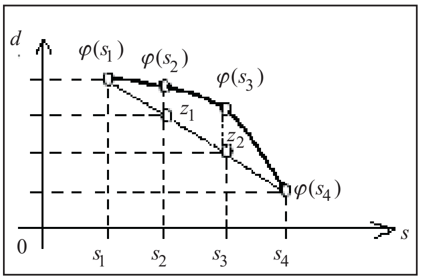

Рис. 1. График выпуклой вверх функции

Проверим второе условие. Обозначим $s(i,l)=r_1$, $s(j,k)=r_2$. Непосредственно можно убедиться, что

$$s_2 < v_1 < v_2 < s_3;\; r_1+r_2 = s_2+s_3. \quad (7)$$

Рассмотрим график функции $\varphi(s)$ на отрезке $[s_2, s_3]$ и проведем хорду, соединяющую значения функции $\varphi(s_2)$ и $\varphi(s_3)$. В результате имеем график, который соответствует рис. 1. Если в нем сделаем подстановку символов $P=\begin{pmatrix} s_1\, s_2\, s_3\, s_4 \\ s_2\, v_2\, v_3\, s_3 \end{pmatrix}$, то получим значения типа (7):

$$z_1 = \frac{s_3-v_1}{s_3-s_2}\varphi(s_2)+\frac{v_1-s_2}{s_3-s_2}\varphi(s_3), \qquad z_2 = \frac{s_3-v_2}{s_3-s_2}\varphi(s_2)+\frac{v_2-s_2}{s_3-s_2}\varphi(s_3).$$

При сложении двух неравенств: $d(v_1)\ge z_1$ и $d(v_2)\ge z_2$, которые следуют из выпуклости функции $\varphi(s)$, имеем

$$\varphi(v_1)+\varphi(v_2)\ge\varphi(s_2)\left(\frac{2s_3-v_1-v_2}{s_3-s_2}\right)+\varphi(s_3)\left(\frac{v_1+v_2-2s_2}{s_3-s_2}\right).$$

Подставим сюда значения v_1+v_2 (неравенство (7)) и получим $\varphi(v_1)+$ $+\varphi(v_2)\ge\varphi(s_2)+\varphi(s_3)$. Это равносильно $c_{il}+c_{jk}\ge c_{ik}+c_{jl}$, т.е. заданная функция $\varphi(s)$ соответствует таблице расстояний, которая является матрицей Супника. Итак, заданная подзадача разрешима, что и доказывает теорему 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, можно моделировать произвольную функцию расстояний, накладывая на нее определенные ограничения, что иногда приводит к разрешимым случаям. Так, например, В.М. Супруненко в [6] взял такую функцию расстояний, для которой элементы матрицы расстояний $A=||\alpha_{ij}||\in R_n$ удовлетворяли следующим условиям: $|j-i|<|l-k|\Rightarrow \alpha_{ij}<\alpha_{kl}$, $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$.

Было доказано, что оптимальный маршрут находится среди пирамидальных циклов.

Отметим, что проблема распознавания задач, где моделируются исходные данные, решается проще, чем задача распознавания матриц Демиденко (Кальмансона, Супника, Монжа), и имеет почти линейную сложность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 512 с.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 264 с.
4. The truvelling salesman problem / E.I. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys. — Chichester: Wiley, 1983. — 375 c.
5. Демиденко В.М. Специальный случай задачи о бродячем торговце // Весці акад. навук Беларус. ССР. — 1976. — № 5. — С. 28–32.
6. Супруненко Д.А. К задаче о бродячем торговце // Кибернетика и системный анализ. — 1975. — № 5. — С. 121–128.
7. Gilmory P.C., Gomory R.E. Seqnencing a one state variable machine a solvable case of the traveling salesman problem // Oper. Res. — 1964. — **12**. — P. 635–675.
8. Донец Г.А., Шулинок И.Э. Об общем представлении числових графов // Теорія оптимальних рішень. — 2004. — № 3. — С. 11–18.

Поступила 23.04.2013