

## Оцінка пружності та здатності до демпфування матеріалів резонансними акустичними методами

О. В. Вдовиченко, Н. Д. Ткачук

Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України,  
Київ, e-mail: vdovyche@gmail.com

*З метою встановлення можливості застосування нових акустичних методів для визначення характеристик пружності та внутрішнього тертя в матеріалах різних класів за допомогою розробленої програми резонансної ультразвукової спектроскопії в діапазоні частот 20—100 кГц досліджено монокристал KBr та зразки поліметилметакрилату (ПММА). Виявлено, що розраховані сталі пружності добре узгоджуються з відомими з літератури. Встановлено, що декремент коливань KBr становить 0,05—0,33% для різних мод коливань, а ПММА — 6,5—8,8%. На відміну від модуля Юнга ПММА, що не залежить від амплітуди деформації, його декремент зростає з амплітудою, проте залишається стабільним в часі.*

**Ключові слова:** KBr, поліметилметакрилат, резонансні акустичні методи, сталі пружності, внутрішнє тертя.

### Вступ

Резонансна ультразвукова спектроскопія (РУС) є точним і ефективним методом визначення характеристик пружності ізотропних та анізотропних матеріалів [1, 2]. Метод полягає у вимірюванні спектра частот механічних резонансних коливань зразка, що залежить від фізичної симетрії об'єкту, тензору пружності, густини та лінійних розмірів, і наступному розв'язуванні оберненої задачі визначення характеристик пружності матеріалу підгонкою модельно-передбачених частот до відповідних вимірюваних. Характеристики демпфування матеріалу розраховують з ширини резонансних кривих [3].

Точність РУС забезпечується мінімальним контактом зразка і апаратури та відсутністю похибок через неточне моделювання задачі вимірювання, а також тим, що замість припущення ідеалізованого стану напруження і деформації, як у класичних ультразвукових методах, в РУС розглядають складні коливання зразка певної форми. Перевагою РУС є можливість одержання повного тензору пружності анізотропного матеріалу за одним зразком та одним складом експериментального обладнання [4, 5], проте реалізація РУС вимагає проведення великого обсягу обчислень. Крім того, відшукування усіх резонансних піків зразків матеріалів з високим демпфуванням і, відповідно, ідентифікація частот у спектрі утруднені через маскування слабкозбурених резонансних мод широкими резонансними кривими сильнозбурених мод [6], що може спричинити грубі помилки під час розв'язку оберненої задачі.

Дана робота присвячена визначенню характеристик пружності та внутрішнього тертя матеріалів різних класів: монокристалу KBr та зразків поліметилметакрилату (ПММА) методом РУС з використанням програми опрацювання даних, розробленої в ПМ НАН України.

© О. В. Вдовиченко, Н. Д. Ткачук, 2015

**Т а б л и ц я 1. Вихідні дані для РУС досліджуваних зразків**

Матеріал	Лінійні розміри, $10^{-3}$ , мм			Густина, $\text{кг/м}^3$
	довжина $l$	ширина $b$	висота $h$	
КВr	18,32	12,67	6,19	2750
ПММА				
№ 1	60	5,90	5,90	1190
		діаметр $d$	висота $h$	
№ 2		12,00	20,20	1170
№ 3		11,40	11,96	1160

### Об'єкт досліджень

Досліджено зразок монокристалу КВr, відколотий по площинам спайності, та зразки, одержані механічною обробкою листа аморфного ізотропного ПММА (хімічна формула  $[-\text{CH}_2\text{C}(\text{CH}_3)(\text{COOCH}_3)-]_n$ ). Зразки мали форму правильних прямокутних паралелепіпедів (КВr та № 1 ПММА) або кругових циліндрів (№ 2, 3 ПММА), густина матеріалів розрахована за результатами зважування за допомогою електронних ваг з одиницею молодшого розряду (о. м. р.) 10 мг і вимірювання лінійних розмірів зразків цифровим мікрометром з о. м. р. 1 мкм (табл. 1).

### Фізичні основи реалізації методу дослідження

Ідея РУС полягає в використанні набору вимірних резонансних частот коливання зразків для відшукування значень характеристик пружності матеріалу. Для цього розв'язують пряму задачу визначення частот власних коливань в термінах сталих пружності зразків заданої форми і маси, вільних від напружень на поверхні та обернену задачу визначення сталих пружності, відповідних певним симетриям форми і пружності, шляхом зіставлення вимірних частот з розрахованими.

Для більшості мод коливань тривимірного тіла не існує аналітичних розв'язків прямої задачі, тому резонансні частоти розраховано методом Релея—Рітца шляхом відшукування мінімумів функції Лагранжа [7]:

$$L = \int_V (T - U) = \frac{1}{2} \int_V \left[ \sum_i \rho \omega^2 u_i^2 - \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] dV, \quad (1)$$

де першим і другим членами в квадратних дужках, відповідно, виражено кінетичну і потенціальну енергії;  $\rho$  — густина;  $u_i$  —  $i$ -й компонент вектора переміщення  $\mathbf{u}$ ;  $\omega$  — кутова частота;  $C_{ijkl}$  — тензор пружності четвертого рангу. Інтегрування проводять по об'єму  $V$ .

Для того щоб відшукати мінімум інтегралу (1), обчислено диференціал  $L$  як функцію  $u$ :

$$\delta L = \int_V \left[ \sum_i \left( \rho \omega^2 u_i - \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \right) \delta u_i \right] dV \quad (2)$$

Оскільки  $u_i$  є довільним в об'ємі  $V$ , значення  $u_i$ , що відповідають стаціонарним точкам функції Лагранжа  $L$ , тобто умові  $\delta L = 0$ , повинні

задовольняти умові рівності нулю обох членів рівняння (2), що містяться в квадратних дужках. Тоді набір  $u_i$ , що задовольняє згаданим умовам, відповідає дискретному набору власних частот вільних коливань системи.

Для того щоб обрахувати власні частоти чисельним методом, потрібно розкласти  $u_i$  по базису:

$$u_i = \sum_a a_{i,a} \Phi_a, \quad (3)$$

де  $\Phi_a$  — базисні функції і  $a_{i,\lambda}$  — коефіцієнти розкладання. Нижній індекс  $i$  означає  $i$ -й стовпчик матриці  $\mathbf{a}$ .

Після підстановки  $u_i$  (3) у вираз (1) одержимо функцію Лагранжа у матричній формі запису [2]

$$L = \frac{1}{2} \left( (\rho\omega^2) \mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{a} \right), \quad (4)$$

де верхній індекс  $T$  означає транспонування, а елементами матриць  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{\Gamma}$  є інтеграли кінетичної та потенціальної енергій відповідно, що залежать від елементів базисних функцій:

$$E_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} \int_V \rho \Phi_\alpha \Phi_{\alpha'} dV \quad (5)$$

та

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} = \sum_{j,j'} C_{jj'} \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_{\alpha'}}{\partial x_{j'}} dV \quad (6)$$

З урахуванням (4) у матричній формі запису вимога  $\delta L = 0$  веде до узагальненого рівняння власних значень

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{E} \mathbf{a}, \quad (7)$$

де власними значеннями є  $\omega^2$ , а власними векторами є коефіцієнти розкладання  $\mathbf{a}$ . Отже, для визначення набору резонансних частот тіла потрібно розрахувати  $\mathbf{\Gamma}$  і  $\mathbf{E}$  та відшукати власні значення (7).

За базисні функції обрано поліноми в декартових координатах у формі [8]

$$\Phi_\alpha = x^l y^m z^n, \quad (8)$$

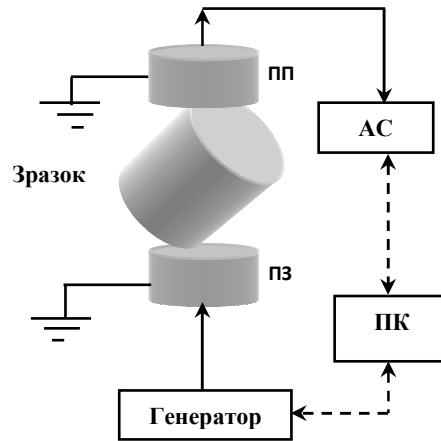
де  $l, m$  і  $n$  — цілі додатні числа. Ця форма зручна для обчислення частот зразків, що мають форму кругового циліндра, сфери та прямокутного паралелепіпеда.

Обернена задача визначення сталих пружності за вимірними резонансними частотами не має аналітичного розв'язку. Щоб віднайти крашу відповідність (у сенсі найменших квадратів) між спостереженими і розрахованими спектрами резонансних частот з характеристиками пружності у якості змінних, мінімізували цільову функцію

$$F = \sum_{i=1}^N w_i (f_i^{(p)} - f_i^{(m)})^2, \quad (9)$$

де  $f^{(p)}$  і  $f^{(m)}$  — вектори розрахованих і вимірних резонансних частот;  $w$  — ваговий коефіцієнт, якому присвоюється значення 0 або  $1/(f^{(m)})^2$  в залежності від нашої впевненості в результаті вимірювання. Зауважимо, що  $f^{(p)} = \omega/2\pi$ , де  $\omega$  одержано з рівняння (7). Мінімізацію проводили нелінійним методом Левнеберга—Марквардта (Levenberg—Marquardt).

Рис. 1. Схема вимірювань за методом резонансної ультразвукової спектроскопії. Позначення приладів наведені в тексті.



Алгоритми розв'язку прямої та оберненої задач за описаними схемами реалізовано з використанням бібліотеки Lapsack та стандартних бібліотек мови програмування JAVA. Дослідження методом РУС проводили за схемою, зображеною на рис. 1, за кімнатної температури в діапазоні частот  $2 \cdot 10^4$ — $1,5 \cdot 10^5$  Гц. Крок збільшення частоти вимірювання становив 1 Гц для зразка КВr і 10 — для ПММА.

Зразки встановлювали між п'єзоелектричними перетворювачами так, що контакт зразка з перетворювачами відбувався в двох точках (рис. 1). Таке закріплення мінімально впливало на форми і частоти власних коливань зразка, тому що вся його поверхня, за винятком точок контакту, залишалася вільною. Електричний синусоїдальний сигнал з цифрового генератора PCG10-8016 (Velleman) надходив на п'єзоелектричний акустичний перетворювач ПЗ, який збуджував в зразку механічні коливання. Внаслідок коливань зразка в приймальному перетворювачі (ПП) генерувався електричний сигнал тієї ж форми, що й механічні коливання зразка, який для подальшого аналізу надходив на керований комп'ютером (ПК) цифровий осцилоскоп PCS500 (Velleman), позначений на рис. 1 як АС. Відносні максимальні циклічні деформації, що виникали в зразку, мали амплітуди порядку  $10^{-8}$ — $10^{-6}$ . Розрахунки характеристик пружності проводили на комп'ютері з тактовою частотою процесора 2,5 ГГц. При використанні поліномів степеня 12 швидкість розрахунку становила 1,13 та 1,59 с на ітерацію для ПММА та КВr відповідно.

За характеристику здатності до демпфування (внутрішнього тертя) обрали декремент коливань  $\delta_k$ , який визначали за шириною резонансної кривої на рівні половини її амплітуди за формулою

$$\delta_k = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{f_{2k} - f_{1k}}{f_{0k}}, \quad (10)$$

де  $f_{1k}$  і  $f_{2k}$  — частоти до і після резонансу відповідно, за яких амплітуда коливань зразка набуває значення половини амплітуди коливань з резонансною частотою  $f_{0k}$  відповідної моди коливань  $k$ .

Додатково модуль Юнга і декремент коливань ПММА визначали за методикою, наведеною в роботі [9], за умов резонансних поперечних коливань зразка № 1, закріпленого консольно на вібраційному електродинамічному стенді, з частотою близько 750 Гц.

### Результати досліджень та їх обговорення

На рис. 2 показано резонансні спектри досліджуваних матеріалів в діапазоні частот 50—100 кГц, виміряні за наведеною методикою за амплітуди вихідного сигналу з генератора 10 В для обох матеріалів.

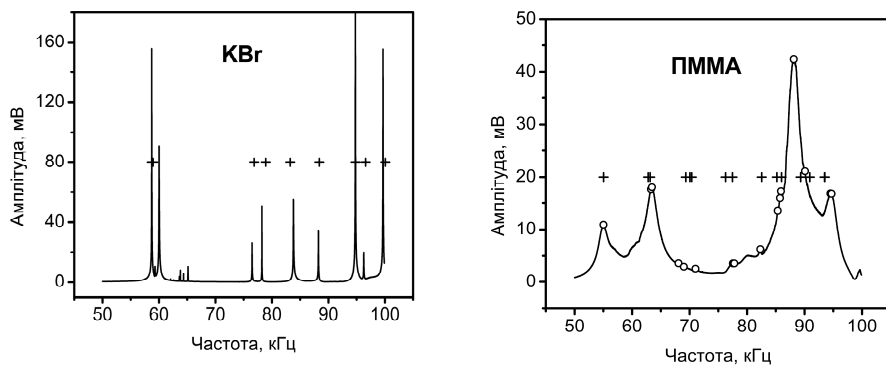


Рис. 2. Резонансні спектри коливань зразків монокристалу KBr та № 2 полімеру ПММА в діапазоні 50—100 кГц: + — розраховані резонансні частоти; o — експериментально виміряні піки ПММА.

У табл. 2 наведено виміряні резонансні частоти та розраховані у припущенні кубічної симетрії KBr. Результати порівняння вказують на добрий збіг виміряного і обчисленого резонансних спектрів, мінімум функції  $F$ , розрахованої за формулою (9), становить 0,07%. Також у табл. 2 наведено значення декременту коливань  $\delta_k$ , визначені для кожного з виміряних резонансних піків.

Для тестування методики за виміряним резонансним спектром розраховано сталі пружності KBr у припущенні кубічної симетрії  $C_{ij}^{(c)}$  та ізотропії властивостей пружності  $C_{ij}^{(i)}$  (табл. 3). З наведених у табл. 3 даних випливає, що припущення ізотропії пружності дає неприйнятні результати, про що свідчить велика похибка. Натомість похибка визначення сталей пружності у припущенні кубічної симетрії є малою, а значення самих сталей добре корелюють з даними, відомими з літератури.

У табл. 4 наведено середні характеристики пружності  $C_{11}$  і  $C_{44}$ , визначені за резонансними спектрами зразків № 2 і 3 ПММА, а також модуль Юнга  $E$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , що розраховані за відомими співвідношеннями між характеристиками пружності ізотропних матеріалів. Також у табл. 4 наведено результати визначення цих характеристик

**Т а б л и ц я 2.** Експериментальні резонансні  $f^{(m)}$  та розраховані резонансні частоти  $f^{(p)}$  KBr

$f^{(m)}$ , Гц	Декремент $\delta_k \cdot 10^2$	$f^{(p)}$ , Гц	$(f^{(m)} - f^{(p)})/f^{(m)} \cdot 100\%$
26 920	0,13	26 859	0,23
45 740	0,30	45 134	1,32
58 692	0,11	58 619	0,12
59 242	0,33	58 779	0,78
59 952	0,26	58 967	1,6
76 491	0,10	76 993	-0,58
78 233	0,05	78 797	-0,72
83 807	0,19	83 311	0,59
88 235	0,12	88 275	-0,05
94 782	0,11	94 843	-0,07
96 268	0,12	96 521	-0,26
99 673	0,11	100 060	-0,39

**Т а б л и ц я 3. Сталі пружності КВг, розраховані за резонансними спектрами**

Симетрія	$C_{11}$ , ГПа	$C_{12}$ , ГПа	$C_{44}$ , ГПа	Похибка, %	Джерело
$C_{ij}^{(i)}$	48,99		7,81	2,861	Наші дані
$C_{ij}^{(c)}$	36,36	7,27	5,25	0,025	"_"
$C_{ij}^{(c)}$	34,21	4,36	5,13		[10]
$C_{ij}^{(c)}$	38,00	6,00	5,40		[11]

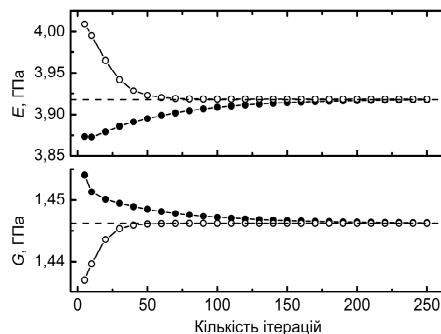
**Т а б л и ц я 4. Характеристики пружності ПММА, розраховані за резонансними спектрами**

Зразок, метод	$C_{11}$ , ГПа	$C_{44} = G$ , ГПа	Похибка, %	$E$ , ГПа	$\nu$	Джерело
№ 2, РУС	6,33	1,45	0,125	3,91	0,352	Наші дані
№ 3, РУС	6,03	1,46	0,099	3,92	0,340	"_"
РУС	8,65	2,21	—	5,89	0,325	[12]
НП		1,43	—	3,96	0,4	[13]

за методами [12] та наскрізного прозвучування (НП) на частоті 5 МГц [13]. Літературні дані про пружність ПММА, деякі з яких наведені в табл. 4, відрізняються, ймовірно, через вплив хімічного складу і технології виготовлення. Тому розрахунок оберненої задачі проводили підгонкою розрахункових частотних спектрів до 25 експериментально вимірних частот за початковими значеннями сталих пружності  $C_{11} = 8,65$  ГПа,  $C_{44} = 1,39$  ГПа та  $C_{11} = 5,78$  ГПа,  $C_{44} = 1,47$  ГПа. Результати розв'язку для поліномів степеня 12 (рис. 3) свідчать, що після 150 ітерацій вибір початкових значень практично не впливає на розраховані характеристики.

Результати визначення модуля Юнга ПММА за частотою резонансних коливань консольного зразка № 1, зображені на рис. 4, свідчать, що вони в цілому збігаються з результатами РУС (табл. 4) — модуль Юнга становить 3,88 ГПа, причому в даному діапазоні напруження він практично не змінюється і під час коливань з амплітудою максимальних циклічних напружень 1,32 МПа протягом 1800 с, тобто  $1,35 \cdot 10^6$  циклів, залишається стабільним. Натомість декремент  $\delta$  збільшується з напруженням, але з часом його можна вважати стабільним. Загалом, одержані результати узгоджуються з відомими даними про декремент ПММА, виміряний в умовах консольних коливань зразка з частотою 50 Гц, який становив  $\delta = 0,16$  за  $\sigma_{\max} = 1$  МПа і  $\delta = 0,20$  за  $\sigma_{\max} = 2$  МПа [14].

Рис. 3. Залежність модулів Юнга  $E$  та зсуву  $G$  ПММА, визначених за результатами розв'язку оберненої задачі, від кількості ітерацій за початкових значень сталих пружності  $C_{11} = 8,65$  ГПа,  $C_{44} = 1,39$  ГПа (○) та  $C_{11} = 5,78$  ГПа,  $C_{44} = 1,47$  ГПа (●).



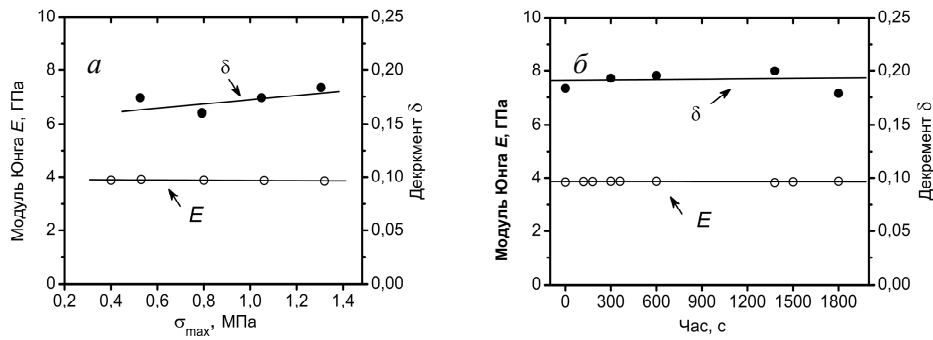


Рис. 4. Залежності модуля Юнга (○) та декременту коливань (●) ПММА, визначених під час коливань консольного зразка, від максимального циклічного напруження  $\sigma_{\max}$  (а) та від часу коливань за максимального циклічного напруження  $\sigma_{\max} = 1,32$  МПа (б).

Визначення декременту  $\delta$  для всіх мод резонансних коливань зразка методом РУС було ускладнене внаслідок перекриття резонансних піків (рис. 2, б), проте ті значення  $\delta$ , які вдалось отримати, становили 0,065—0,088 для різних мод коливань. З урахуванням амплітудної залежності декременту коливань ці значення узгоджуються з результатами, одержаними за умов поперечних коливань стрижневого зразка (рис. 4), а також зі значеннями  $\delta = 0,060$ —0,077, що були одержані в роботі [12].

### Висновки

Розроблена програма дозволяє з задовільною точністю розраховувати елементи тензору пружності як монокристалів, так і високодемпфувальних аморфних полімерів. Встановлено, що в діапазонах частот 20—100 кГц і амплітуд циклічних деформацій порядку  $10^{-8}$ — $10^{-6}$  декремент коливань монокристалу КВг становить 0,05—0,33% для різних мод коливань, а для ПММА  $\delta = 6,5$ —8,8%. На відміну від модуля Юнга, що не залежить від амплітуди деформації,  $\delta$  ПММА зростає з амплітудою.

1. Migliori A. Resonant ultrasound spectroscopic techniques for measurement of the elastic moduli of solids / [A. Migliori, J. L. Sarrao, W. M. Visscher et al.] // Phys. B. — 1993. — **183**. — P. 1—24.
2. Leisure R. G. Resonant ultrasound spectroscopy / R. G Leisure, F. A. Willis // J. Phys.: Condens. Matter. — 1997. — **9**. — P. 6001—6029.
3. Leisure R. Internal friction studies by resonant ultrasound spectroscopy / [R. Leisure, K. Foster, J. Hightower, D. Agosta] // Mater. Sci. Eng. A. — 2004. — **370**. — P. 34—40.
4. Wang Y. C. Resonant ultrasound spectroscopy in shear mode / Y. C. Wang, R. S. Lakes // Rev. Sci. Instrum. — 2003. — **74**. — P. 1371—1373.
5. Jaglinski T. Resonant ultrasound spectroscopy of cylinders over the full range of Poisson's ratio / T. Jaglinski, R. S. Lakes // Ibid. — 2011. — **82**. — P. 035105.
6. Лебедев А. В. Резонансная акустическая спектроскопия при низких добротностях / [А. В. Лебедев, Л. А. Островский, А. М. Сутин и др.] // Акустический журн. — 2003. — **49** (1). — С. 92—99.
7. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1988. — 216 с.
8. Visscher W. M. On the normal modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects / [W. M. Visscher, A. Migliori, T. Bell, R. Reinert] // J. Acoust. Soc. Amer. — 1991. — **90**. — P. 2154—2162.

9. Вдовиченко А. В. Исследование эволюции межчастичных границ в высокоплотных прессовках из железного порошка методом механической резонансной спектроскопии / А. В. Вдовиченко, Ю. Н. Подрезов, В. В. Скороход // Порошковая металлургия. — 2008. — № 5/6. — С. 128—137.
10. *Физическая акустика*. Т. 3Б: Динамика решетки / Под ред. У. Мэзона. — М. : Мир, 1968. — 391 с.
11. Францевич И. Н. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов / И. Н. Францевич, Ф. Ф. Воронов, С. А. Бакута. — К. : Наук. думка, 1982. — 286 с.
12. Bernard S. Resonant ultrasound spectroscopy for viscoelastic characterization of anisotropic attenuative solid materials / S. Bernard, Q. Grimal, P. Laugier // J. Acoust. Soc. Amer. — 2014. — **135**. — P. 2601—2613.
13. Безымянный Ю. Г. Сравнение динамических методов при определении упругих характеристик различных материалов / [Ю. Г. Безымянный, Е. А. Козирацкий, А. Н. Колесников, Л. О. Тесленко] // Вісник НТУ "ХПІ". — 2014. — **19**. — С. 15—22.
14. Писаренко Г. С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. — К. : Наук. думка, 1971. — 375 с.

### **Оценка упругости и демпфирующей способности материалов резонансными акустическими методами**

А. В. Вдовиченко, Н. Д. Ткачук

*С целью установления возможности применения новых акустических методов для изучения характеристик упругости и внутреннего трения в материалах различных классов при помощи разработанной программы резонансной ультразвуковой спектроскопии в диапазоне частот 20—100 кГц исследованы монокристалл KBr и образцы полиметилметакрилата (ПММА). Выявлено, что рассчитанные постоянные упругости хорошо согласуются с известными из литературы. Установлено, что декремент колебаний KBr составляет 0,05—0,33% для разных мод колебаний, а ПММА — 6,5—8,8%. В отличие от модуля Юнга ПММА, не зависящего от амплитуды деформации, его декремент увеличивается с амплитудой, однако остается стабильным во времени.*

**Ключевые слова:** KBr, полиметилметакрилат, резонансные акустические методы, постоянные упругости, внутреннее трение.

### **Estimation of elasticity and damping capacity of materials by resonant acoustic techniques**

O. V. Vdovychenko, N. D. Tkachuk

*For determine of possibility to use of new acoustic techniques with aim to study of characteristics of elasticity and internal friction in different classes of materials, single crystal of KBr and samples of polymethylmethacrylate (PMMA) were investigated using developed program of resonant ultrasound spectroscopy at frequency range of 20 to 100 kHz. It was found that the calculated elastic constants are consistent with literature data. It was observed that damping ratios of KBr are 0,05 to 0,33% for different modes of oscillations, and are 6,5 to 8,8% for PMMA. In contrast to Young modulus of PMMA that is independent on amplitude of strain, its damping ratio increase with amplitude, but remain stable in time.*

**Keywords:** KBr, polymethylmethacrylate, resonant acoustic techniques, elastic constants, internal friction.