

Математичне моделювання способу спільного визначення капілярного комплексу та кінематичної в'язкості рідини

К. І. Луданов

Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевіча НАН України,
Київ, e-mail: ludanov@ipms.kiev.ua

Проведено математичне моделювання способу спільного визначення капілярного комплексу (добутку квадрата капілярної сталої на косинус крайового кута змочування) і кінематичної в'язкості рідини на основі так званого методу капіляра, який раніше було застосовано для вимірів окремо поверхневого натягу рідини (по формулі Жюрена) та окремо її кінематичної в'язкості (у віскозиметрі Уббелодє). Визначення цих фізичних властивостей рідини в роботі проведено в рамках єдиного експерименту по всмоктуванню рідини в циліндричний капіляр проти сил ваги на основі точної апроксимації біномом Ньютона відомого рівняння Е. Уошберна, яке описує кінетику процесу всмоктування.

Ключові слова: математичне моделювання, капілярна стала, динамічний крайовий кут, кінематична вязкість, капілярне всмоктування, рівняння Уошберна.

Вступ

Знання фізичних властивостей речовин має дуже важливе значення для науки і техніки, без нього не можуть розроблятися нові технології. Тому розробка нових способів їх визначення є дуже актуальною. Тим більше якщо йдеться про розробку способів комплексного визначення фізичних властивостей, в результаті реалізації яких отримують не одну, а одразу декілька характеристик. Бо з теорії планування експерименту відомо, що статистична помилка його результатів (дисперсія) в цьому разі значно нижче, ніж у методах прямих вимірювань. Особливо це важливо, якщо методи окремих вимірювань, що застосовуються в способі спільного визначення, мають високу точність. Важлива також і простота використаних методів вимірювань та можливість використання способу в екстремальних умовах. Саме до комплексних способів визначення якраз і відноситься спосіб спільного визначення (точніше спосіб так званого непрямого вимірювання) фізичних властивостей рідини, який розробляється в даній роботі.

Обзор

На даний час вже відомо багато методів окремого визначення капілярних і окремо — транспортних властивостей рідини. Найбільш відомий метод визначення поверхневого натягу — метод капіляра, автором якого є Дж. Жюрен (J. Jurin, 1717 р.) [1, 2]. Широко відомий також метод пластинці Вільгельмі (L. Wilhelmu, 1863 р.) [3]. Використовується ще декілька статичних методів краплі (лежачої, висячої та ін.). Відомо також багато динамічних методів визначення поверхневого натягу рідини: метод Дю Нуй (відрива кільця), методи підрахунку крапель та максимального

тиску в бульбашці, метод осциляції струї, а також методи хвиль (стоячих та біжучих) та ін. Методів визначення транспортних властивостей рідини (динамічної та кінематичної в'язкості) відомо значно менше. Найбільш знаний метод визначення в'язкості рідини — метод капіляра, заснований на законі Гагена—Пуазейля (G. Hagen, 1839 p. & J. Poiseuille, 1840 p.). Широко відомий також метод, заснований на формулі Дж. Стокса (G. Stokes, 1852 p.), який описує вільне падіння у рідині сфери під дією сил ваги [1].

Розглянемо детальніше найбільш відомі методи визначення поверхневого натягу та кінематичної в'язкості рідини, тобто саме ті властивості рідини, які об'єднує так званий метод капіляра.

Давно відомо спосіб визначення поверхневого натягу рідини по висоті її максимального підйому в капілярі проти сил ваги (так званий метод капіляра), який заснований на формулі Жюрена $2\sigma\cos\theta/R = \rho gh_{\max}$. В рамках цього способу [1, 2] проводиться експеримент по всмоктуванню рідини в вертикальний капіляр радіусом R (м), потім витримується певна пауза і вимірюється максимальна висота підйому меніска h_{\max} (м), а поверхневий натяг рідини σ (Н/м) розраховується з формули $\sigma = \rho g \cdot a^2/2$, де ρ — густина рідини (кг/м³); g — прискорення сили маси (9,8 м/с²), a — капілярна стала рідини (м), квадрат якої визначається з даних проведеного експерименту: $a^2 = h_{\max}R/\cos\theta$, θ — крайовий кут (град) змочування рідиною поверхні капіляра (оскільки цей кут є властивістю не тільки рідини, а й характеристикою пари рідина—матеріал капіляра, він визначається в результаті додаткових досліджень).

Відомий також спосіб визначення кінематичної в'язкості рідини в процесі її протікання по капіляру (тобто метод капіляра) під дією тільки сил ваги рідини (у віскозиметрі Уббелодє, ГОСТ 33-66), який заснований на законі Гагена—Пуазейля: $8\mu VL/(\pi R^4) = \Delta P = \rho gH$. В рамках цього способу проводиться експеримент з протіканням рідини по капіляру радіусом R і довжиною L за рахунок її власної ваги (тобто стовпа рідини висотою H), вимірюється розхід рідини в капілярі V (м³/с), а кінематична в'язкість ν (м²/с) розраховується з формули $\nu = \pi R^4 gH/(8VL)$, де $\nu = \mu/\rho$ (μ — динамічна в'язкість рідини, ρ — густина рідини (кг/м³)).

Проведений аналіз спеціальної літератури та патентних джерел показав, що методів спільного визначення капілярних і транспортних властивостей рідини на даний час невідомо.

Постановка задачі

В роботі поставлено задачу розширення функціональних можливостей методу капіляра щодо вимірів поверхневого натягу по формулі Жюрена та кінематичної в'язкості у віскозиметрі Уббелодє спільним визначенням капілярних і транспортних властивостей рідини в єдиному експерименті. Тобто проводиться єдиний дослід по всмоктуванню рідини в капіляр проти сили ваги та шляхом математичного аналізу вимірів залежності переміщення меніска від часу з початку процесу отримують капілярний комплекс $a^2\cos\theta$ та кінематичну в'язкість ν рідини.

Крім того, застосування способу спільного визначення капілярних і транспортних властивостей рідини (метод капіляра) значно спростить експериментальну установку, наприклад, в порівнянні з віскозиметром Уббелодє (ГОСТ 33-66).

І насамкінець, зменшення числа експериментів, необхідних для реалізації цього способу, майже вдвічі знизить дисперсію отриманих результатів в процесі їх непрямого вимірювання [4].

Процес всмоктування рідини в нахилений капіляр проти сили ваги описує відоме рівняння Е. Уошбурна [5, 6]

$$\ln[1 - (x/x_0)]^{-1} - x/x_0 = t(gR^2 \sin \alpha)/(8vx_0), \quad (1)$$

де x — переміщення меніска в капілярі (м), $x = h/\sin \alpha$ (h — підйом меніска по вертикалі (м)); α — кут між віссю капіляра та горизонтом (град); x_0 — максимальне переміщення рідини в капілярі, $x_0 = h_{\max}/\sin \alpha$ (h_{\max} — максимальний підйом рідини по вертикалі, $h_{\max} = 2\sigma \cos \theta/(\rho g R) = a^2 \cdot \cos \theta/R$, θ — крайовий кут змочування (град)); t — час від початку процесу всмоктування рідини в капіляр (с); g — прискорення сили ваги (9,8 м/с²); v — кінематична в'язкість рідини (м²/с).

Оскільки координата x в рівнянні Е. Уошбурна представлена неявно (тобто виразити явно x з нього неможливо), оригінал рівняння не можна використати для визначення капілярної константи a рідини в процесі її капілярного всмоктування. Тому відомі спроби наближеного вирішення цього рівняння [6]. Наприклад, функцію натуральний логарифм у рівнянні Е. Уошбурна було розкладено А. Биховським в степеневий ряд \sum по змінній (x/x_0) та отримано наступний вираз [7]:

$$x^2 \left[1 + \frac{2}{3} (x/x_0) + \frac{2}{4} (x/x_0)^2 + \frac{2}{5} (x/x_0)^3 + \dots \right] = t(gR^2 x_0 \cdot \sin \alpha)/(4v). \quad (2)$$

Однак степеневий ряд в квадратних дужках “зходить” дуже повільно і використати його фрагменти для наближеного вирішення рівняння Е. Уошбурна відносно невідомої x/x_0 з прийнятною для способу визначення фізичних властивостей рідини точністю просто неможливо.

Метою даної роботи є математичне моделювання нового способу визначення, тобто розробка такої апроксимації рівняння Е. Уошбурна, яка б була достатньо точною для способу визначення фізичних властивостей рідини та дозволяла б в результаті вирішення зворотної задачі визначати спільно як капілярні ($a^2 \cdot \cos \theta$), так і транспортні (v) властивості, що містяться в цій функціональній залежності.

Результати досліджень

Для досягнення поставленої мети можна скористатись відомим методом апроксимації степеневих рядів, наприклад, раціональними функціями (метод Паде [8]). Але детальний аналіз методу Паде показав, що в даному разі доцільно використати не його, а розроблений автором метод апроксимації степеневих рядів [9], наприклад, у рамках такої досить простої функції, як біном Ньютона.

Апроксимуючи степеневий ряд \sum у дужках біномом Ньютона, отримуємо

$$x^2 [1 - x/(1,2x_0)]^{-0,8} = t(gR^2 x_0 \cdot \sin \alpha)/(4v). \quad (3)$$

Ця формула в діапазоні $0 \leq x/x_0 \leq 3/4$ дає досить точне наближення щодо рівняння Е. Уошбурна. В даному разі апроксимація біномом Ньютона дає завищений результат: відносна похибка наближення дорівнює нулю при $x = 0$, збільшується з ростом змінної і при $x/x_0 = 0,5$ вона буде лише 0,4%, далі при $x/x_0 = 2/3$ буде 1,5%, а при $x/x_0 = 3/4$ досягне 3% та тут треба враховувати, що верхня межа змінної x дуже обмежена: $x/x_{\max} = 1$.

Якщо вираз $x^2[1 - x/(1,2x_0)]^{-0,8} = t(gR^2x_0 \cdot \sin \alpha)/(4v)$ “перевернути”, відповідно праву і ліву частини, і перенести x^2 в праву частину рівняння, то отримаємо формулу $[1 - x/(1,2x_0)]^{0,8} = (x^2/t)[(4v)/(gR^2x_0 \cdot \sin \alpha)]$.

А в разі якщо обидві частини цього виразу підвести до ступеня 5/4 і домножити на $1,2x_0$ та перенести член $1,2x_0$ з лівої частини в праву частину рівняння, отримаємо наступне:

$$x = 1,2x_0 - 1,2x_0(x^2/t)^{1,25}[(4v)/(gR^2x_0 \cdot \sin \alpha)]^{1,25}. \quad (4)$$

Після проведення додаткових перетворень остаточно отримаємо

$$x = 1,2x_0 - 1,2(x^2/t)^{1,25}[(4v)/(x_0^{0,2} \cdot gR^2 \cdot \sin \alpha)]^{1,25}. \quad (5)$$

Введемо нове позначення для складної змінної, яка включає час: $z = (x^2/t)^{1,25}$. В цьому разі отримане співвідношення (5) запишеться у вигляді лінійного рівняння, яке дозволить відокремити капілярні і транспортні властивості рідини:

$$x = c_1 - c_2z, \quad (6)$$

де коефіцієнти рівняння $c_1 = 1,2x_0$, а $c_2 = 4,8\sqrt{2}[v/(x_0^{0,2}gR^2 \cdot \sin \alpha)]^{1,25}$.

Якщо експериментальні дані щодо кінетики всмоктування рідини в капіляр, тобто точки $x_i = f(z_i)$, представити в системі координат $x-z$, де функція x — вісь ординат, а змінна z — вісь абсцис, то вони повинні “лягти” на пряму, яка буде відсікати на осі ординат відрізок $1,2x_0$, а на осі абсцис відрізок $z_0 = c_1/c_2 = [(gR^2x_0 \cdot \sin \alpha)/(4v)]^{1,25}$.

Цей результат можна отримати і іншим способом. Відомо [7], що при малих значеннях x/x_0 та t має місце лінійна залежність $x^2 \sim t$. Дійсно, переписуючи і аналізуючи отриманий вираз (2) у вигляді

$$x^2/t = gR^2x_0 \cdot \sin \alpha / \{4v[1 + \frac{2}{3}(x/x_0) + \frac{2}{4}(x/x_0)^2 + \frac{2}{5}(x/x_0)^3 + \dots]\} \quad (7)$$

з використанням відомого правила Лопітала щодо лівої частини виразу, можна встановити ліміт відношення $x^2/t = (z_0)^{0,8}$ при умові $x \rightarrow 0$:

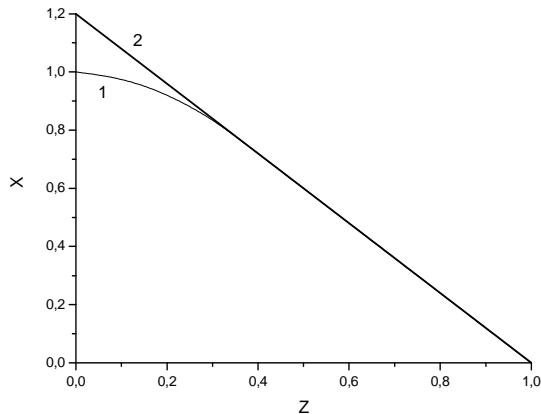
$$\lim(x^2/t) \Big|_{x \rightarrow 0} = gR^2x_0 \cdot \sin \alpha / (4v). \quad (8)$$

Кінематичну в'язкість v рідини можна визначити і на основі отриманого значення x_0 безпосередньо з точної формули Е. Уошбурна

$$v = t_i(gR^2 \cdot \sin \alpha) / \{8x_0 \cdot \ln[1 - (x_i/x_0)]^{-1} - x_i/x_0\}, \quad (9)$$

де x_i — переміщення меніска в капілярі, яке має відповідати умові $x_i/x_0 \leq 2/3$.

Крива, що описує рівняння Е. Уошбурна, та пряма, яка описує її апроксимацію біномом Ньютона, в системі координат $x-z$ наведені на рисунку.



Після визначення з графіка (рисунок) величини x_0 із співвідношення (6) можна вирахувати значення капілярного комплексу $K_C = a^2 \cdot \cos \theta$ з аналітичного виразу $x_0 = a^2 \cdot \cos \theta / (R \cdot \sin \alpha)$:

$$K_C = x_0 R \cdot \sin \alpha. \quad (10)$$

Крива, що описує рівняння Е. Уошбурна (1), та її апроксимація біномом Ньютона (2) в координатах $x-z$.

Оскільки крайовий кут змочування θ є властивістю не тільки рідини, а й характеристикою пари рідина—матеріал капіляра, для визначення з капілярного комплексу окремо капілярної константи рідини необхідно провести додаткові дослідження по розрахунку динамічного значення крайового кута змочування. І навпаки, якщо капілярна стала рідини відома апіорі, то в даному разі з виразу для K_C можна отримати невідоме значення динамічного крайового кута змочування θ .

Кінематичну в'язкість рідини ν , яка всмоктується в капіляр, можна розрахувати на основі одержаних з графіку (рисунок) значень відрізків x_0 і z_0 з формули

$$\nu = (gR^2x_0 \cdot \sin \alpha) / [4(z_0)^{0,8}]. \quad (11)$$

На подане раніше технічне рішення автором до Укрпатенту 26.06.2013 було подано заявку на винахід “Спосіб спільного визначення капілярних і транспортних властивостей рідини” (реєстраційний номер а 2013 08112). При цьому аналітичну апроксимацію рівняння Уошберна використано також для спільного визначення двох характеристик пористих матеріалів (гідралічної проникності та капілярного радіуса) на основі кінетики всмоктування ними рідини проти сили ваги. А на це технічне рішення до Укрпатенту 08.07.2013 було подано заявку на другий винахід “Спосіб спільного визначення капілярних та гідралічних характеристик пористої структури” (реєстраційний номер а 2013 08517).

Висновки

Проведено математичне моделювання нового способу спільного визначення одразу двох фізичних властивостей: капілярного комплексу $a^2 \cdot \cos \theta$ і кінематичної в'язкості ν рідини, за яким необхідно і достатньо провести лише один експеримент по всмоктуванню рідини в циліндричний капіляр проти сили ваги. Достатньо точна апроксимація рівняння Уошберна (яке описує кінетику процесу) біномом Ньютона дала можливість аналітичного вирішення задачі, і тому вона є математичною основою запропонованого способу визначення.

Розроблений спосіб встановлення капілярних і транспортних властивостей рідини забезпечує спільне визначення її капілярного комплексу (добуток квадрата капілярної сталої рідини на косинус крайового кута змочування) і кінематичної в'язкості на основі вимірів переміщення меніска в єдиному експерименті в залежності від часу з початку всмоктування.

Оскільки крайовий кут змочування θ є властивістю не тільки рідини, а й характеристикою пари рідина—матеріал, він повинен знаходитися додатково при розрахунку капілярної рідини з виразу її капілярного комплексу. І навпаки, це положення можна використовувати для визначення динамічного крайового кута змочування, якщо апіорі відома лише капілярна константа рідини.

Якщо прийняти до уваги високу точність методу капіляра та простоту його реалізації в експерименті, розроблений спосіб спільного визначення капілярного комплексу і кінематичної в'язкості рідини можна пропонувати для використання в екстремальних умовах досліду (наприклад, при експериментальному визначенні капілярних і транспортних властивостей тугоплавких речовин та їх сполук в рідкому стані).

1. *Физическая энциклопедия*. В 5-ти т. — М. : БСЭ, 1988.
2. *Найдич Ю. В.* Контактные явления в металлических расплавах. — К. : Наук. думка, 1972. — 196 с.
3. *Wilhelmy L.* A method fo determining the surface tension // *Ann. Phys.* — 1863. — **119**. — P. 177.
4. *Налимов В. В.* Логические основания планирования экспериментов / В. В. Налимов, Т. И. Голикова. — М. : Metallurgy, 1976. — 128 с.
5. *Washburn E. W.* The dynamics of capillary flow // *Phys. Rev.* — 1921. — **17**, No. 3. — P. 273—283.
6. *Hamraoui A.* Analytical approach for the lucas-washburn equation / A. Hamraoui & T. Nylandert // *J. of Colloid and Interface Science.* — 2002. — **250**. — P. 415—421.
7. *Быховский А. И.* Растекание. — К. : Наук. думка, 1983. — 192 с.
8. *Бейкер Дж.* Аппроксимации Паде: Пер. с англ. / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. — М. : Мир, 1986. — 502 с.
9. *Луданов К. И.* Метод аппроксимации суммы степенного ряда по его первым трем членам // *Деп. № 763 в УкрНИИТИ.* — К., 1984.

Математическое моделирование способа совместного определения капиллярного комплекса и кинематической вязкости жидкости

К. И. Луданов

Выполнено математическое моделирование способа совместного определения капиллярного комплекса (произведения квадрата капиллярной постоянной на косинус краевого угла смачивания) и кинематической вязкости жидкости на основе так называемого метода капилляра, который ранее был использован для измерения отдельно поверхностного натяжения жидкости (по формуле Жюрена) и отдельно ее кинематической вязкости (в вискозиметре Уббелюде). Определение этих физических свойств жидкости в работе проведено в рамках единственного эксперимента по впитыванию жидкости в цилиндрический капилляр против сил тяжести на основе точной аппроксимации биномом Ньютона известного уравнения Е. Уошберна, которое описывает кинетику процесса впитывания.

Ключевые слова: математическое моделирование, капиллярная постоянная, динамический краевой угол, кинематическая вязкость, капиллярное впитывание, уравнение Уошберна.

Mathematical design of method of joint determination of capillary complex and kinematics viscosity of liquid

K. I. Ludanov

Mathematical modeling is a method common definition of capillary complex (the product of a square capillary constant of the cosine of contact angle wetting) and the kinematic viscosity of the fluid based on the so-called capillary method that has previously been used to measure separately the surface tension of the liquid (in the Jurins formula) and separate it kinematic viscosity (Ubbelodyes viscometer). Determination of physical properties of liquids in the performed in a single experiment on the absorption of fluid in the capillary tsylindrichnyy against the forces of gravity on the basis of accurate approximation of the binomial theorem known E. Washburn equation that describes the kinetics of the process of absorption.

Keywords: mathematical modeling, capillary constant, dynamic contact angle, kinematic viscosity, capillary suction Woshburn equation.