# МОЛОДІ ВЧЕНІ

doi: https://doi.org/10.15407/visn2017.01.089

**ПОКУТНИЙ**
**Олександр Олексійович —**
кандидат фізико-математичних наук, докторант, старший науковий співробітник лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України

# ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## За матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 9 листопада 2016 року

*Доповідь присвячено дослідженню крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Розглянуто моделі квантової механіки для операторного рівняння Шредінгера в просторі Гільберта, які пов'язані з теорією необоротних процесів. Одним із застосувань розглянутої проблеми є нелінійна періодична крайова задача для рівняння Ван дер Поля в просторі Гільберта. Така модель широко використовується в біології, хімії, для побудови нейронних моделей тощо. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності відповідних крайових задач. Для лінійних та нелінійних задач знайдено множини розв'язків та запропоновано ітеративні алгоритми побудови відповідних розв'язків.*

***Ключові слова***: хаос, синергетика, проблеми Гільберта, біфуркації, рівняння Ван дер Поля, псевдообернені за Муром—Пенроузом оператори, нейронні моделі.

## Вступ

У 1900 р. на міжнародному конгресі математиків у Парижі Давід Гільберт сформулював свої 23 проблеми, які XIX століття залишило майбутнім поколінням математиків. На його погляд, ці проблеми повинні були зумовити основні напрями подальшого розвитку науки. Серед 23 проблем Гільберта чільне місце посідає двадцята проблема — загальна задача про граничні умови, яким і присвячено частину доповіді [1].

## Лінійні операторні рівняння

Одним із напрямів досліджень є питання про існування розв'язків операторно-диференціальних крайових задач з оператором у лінійній частині, що має не обов'язково замкнену множину значень та нетривіальні ядро і коядро.

Для лінійних рівнянь вигляду

$$Lx = y \tag{1}$$

з незамкненою множиною значень було запропоновано конструкцію розширення вихідного простору [2, 3] таким чином, щоб оператор, розширений на нього, був нормально розв'язним (тобто мав замкнену множину значень) з тим, щоб використати раніше відомі результати для нормально розв'язного оператора [4]. Конструкція узгоджується з існуючими класичними конструкціями й дозволяє визначити нові типи розв'язків рівняння (1). Розглядаючи такі задачі, необхідно було ввести означення сильного псевдооберненого оператора та встановити його властивості [2, 3].

Зауважимо, що, як правило, досліджуються некоректні (нерегулярні або резонансні) задачі [5]. Це клас задач, розв'язки яких нестійкі до малих змін вхідних даних. Вони характеризуються тим, що малі зміни вхідних даних можуть спричинювати великі зміни розв'язків. Такого типу задачі належать до класу некоректних задач [5]. Якщо вхідні дані відомі наближено, то така нестійкість призводить до неєдиності розв'язків. Виникнення резонансів ускладнює простоту динамічного руху і може призвести до «катастрофи Пуанкаре» [6]. Для представлення множини розв'язків таких задач зручним виявився апарат теорії узагальнено-оберенених та псевдообернених за Муром—Пенроузом операторів і матриць, які й використовуються в дослідженнях [2—4]. Для повноти викладення наведемо відповідні означення.

***Означення 1.*** Щільно визначений оператор $L$, що діє з одного банахового простору $B_1$ в інший $B_2$, називається *нормально розв'язним*, якщо його множина значень замкнена $R(L) = \overline{R(L)}$ [4].

***Означення 2.*** Оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ називається *узагальнено-оборотним (напівоберненим)*, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ такий, що $LXL = L$. Оператор $X$ називається узагальнено-оберненим до оператора $L$ і позначається $L^-$ [4].

***Означення 3.*** Якщо оператор $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ діє з простору Гільберта $H_1$ в простір Гільберта $H_2$, то з множини узагальнено-обернених операторів $L^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ можна обрати єдиний, що задовольняє властивостям:

1. $LL^-L = L$;  2. $L^-LL^- = L^-$;
3. $(LL^-)^* = LL^-$;  4. $(L^-L)^* = L^-L$.

Такий оператор називають *псевдооберненим за Муром—Пенроузом оператором* і позначають $L^+$ [4].

Нехай $n = n(L) = \dim N(L)$, $m = m(L) = \dim N(L^*)$. *Індекс оператора* визначається як число $\operatorname{ind} L = n(L) - m(L)$. Згідно з класифікацією Крейна [7], нормально розв'язний оператор, у якого $n(L)$ або $m(L)$ скінченне, називається *n-нормальним* або *d-нормальним* оператором відповідно. У випадку, коли обидва числа $n(L)$ та $m(L)$ є скінченними, оператор $L$ називається *нетеровим*. Якщо ж додатково оператор $L$ є оператором нульового індексу, то він називається *фредгольмовим*.

## Сильний псевдообернений оператор

Наведемо відповідну конструкцію побудови сильного псевдооберненого оператора і теорему відносно представлення розв'язків рівняння (1).

Нехай $L : H_1 \to H_2$ — лінійний обмежений оператор, що діє в просторах Гільберта. Розкладемо простори Гільберта $H_1$ та $H_2$ в ортогональні суми

$$H_1 = N(L) \oplus X, \; H_2 = clR(L) \oplus Y.$$

Тут $X = N(L)^{\perp}$, $Y = clR(L)^{\perp}$, $clR(L)$ означає замикання множини значень $R(L)$. В силу представлення, існують оператори ортогонального проектування $P_{N(L)}$, $P_X$ та $P_{clR(L)}$, $P_Y$ на відповідні підпростори. Позначимо через $H$ фактор-простір простору $H_1$ за ядром $N(L)$ ($H = H_1/N(L)$). Тоді існує неперервна бієкція $j : X \to H$ та проекція $p : H_1 \to H$.

Трійка $(H_1, H, j)$ є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $P_{N(L)}H$. Визначимо тепер оператор

$$L_X = P_{R(L)} L^{-1} p : X \to R(L) \subset clR(L).$$

Легко переконатися в тому, що визначений так оператор $L_X$ є лінійним, ін'єктивним та неперервним. Тепер, скориставшись процесом поповнення за нормою $\|x\|_X = \|L_X x\|_F$, де $F = R(L)$, отримаємо новий простір $clX$ та розширений оператор $clL_X$. Тоді цей оператор

$$clL_X : clX \to clR(L),\ X \subset clX$$

буде здійснювати гомеоморфізм між $clX$ та $clR(L)$. Розглянемо розширений оператор

$$clL = clL_X P_X : clH_1 \to H_2,$$

$$clH_1 = N(L) \oplus clX,\ H_2 = R(clL) \oplus Y.$$

Зрозуміло, що $clLx = Lx, x \in H_1$ і оператор $clL$ є нормально розв'язним.

***Означення 4.*** Оператор $clL^+ : H_2 \to clH_1$ будемо називати *сильним псевдооберненим* до оператора $L$.

***Зауваження.*** З цього означення випливає, що сильний псевдообернений оператор до оператора $L$ є псевдооберненим оператором до оператора $clL$.

Отже, до $L$ можна застосовувати результати, аналогічні результатам з нормально розв'язним оператором.

***Теорема* 1** [2, 3].

1.1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умові

$$(\phi, y) = 0, \Leftrightarrow P_{N(clL^*)} y = 0 \qquad (2)$$

для всіх $\phi$ таких, що $clL^*\phi = 0$; якщо $y \in R(L)$, отримані розв'язки будуть класичними.

1.2. Якщо умова (2) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1) буде мати вигляд

$$x = clL^+ y + P_{N(L)} c,\ c \in H_1.$$

2.1. Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (1) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умові

$$(\phi, y) \neq 0. \qquad (3)$$

2.2. Якщо умова (3) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = clL^+ y + P_{N(L)} c,\ c \in H_1.$$

***Зауваження.*** Узагальнений псевдорозв'язок мінімізує нев'язку рівняння (1) в розширеному просторі $clH_1$.

Зазначимо, що отримані результати узгоджуються з відомими класичними, які отримуються як наслідок й у тому випадку, коли оператор $L$ є оборотним і рівняння (1) має єдиний розв'язок.

## Нелінійні операторні рівняння

Використовуючи отримані вище конструкції і твердження для нелінійного операторного рівняння

$$Bx(\varepsilon) = \varepsilon R(x, \varepsilon), \qquad (4)$$

вдалося отримати необхідні та достатні умови розв'язності і запропонувати ітеративні алгоритми знаходження його розв'язків у просторах Фреше, Банаха і Гільберта [3]. Задача полягає у відшуканні такого розв'язку рівняння (4) $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків породжуючої задачі $Bx = 0$ і визначений та неперервний в околі цього розв'язку.

***Теорема 2 (необхідна умова)*** [2]. Нехай рівняння (1) має розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків породжуючого рівняння $Bx = 0 : x(0) = P_{N(B)}c$ з елементом $c = c_0$. Тоді $c_0$ повинен задовольняти рівняння для породжуючих елементів

$$F(c) = P_{N(B^*)} R(P_{N(B)} c, 0) = 0. \qquad (5)$$

Зауважимо, що у випадку періодичної крайової задачі константи мають фізичний зміст, а саме, вони збігаються з амплітудами коливань. У цьому випадку рівняння (5) збігається з рівнянням для породжуючих амплітуд Пуанкаре—Ляпунова [2—4].

Достатня умова отримується з допомогою оператора $B_0 = P_{N(B^*)} l P_{N(B)}$.

***Теорема 3 (достатня умова)*** [2]. Нехай виконуються умови:

1. $B_0$, $B$ — узагальнено-оборотні оператори;
2. $P_{N(Bo^*)} P_{N(B^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (5), існує неперервний розв'язок рівняння (4). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(B)} c_k(\varepsilon) + y_k(\varepsilon),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(B^*)} \{R(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l y_k(\varepsilon)\},$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)],$$

$$R(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(B)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - - R(P_{N(B)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(B)}c_0 + y_k(\varepsilon),$$

$$x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = B^{-}R(P_{N(B)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(B^*)}R(P_{N(B)}c_0, 0) = 0,$$

збіжного для довільних початкових значень $y_0(\varepsilon), c_0(\varepsilon), y_0(\varepsilon)$.

## Необоротні процеси

Іншим напрямом досліджень є теорія необоротних процесів. Після робіт фізико-хіміків, зокрема Л. Больцмана, І. Пригожина та інших [6], стало зрозумілим, що теорія необоротних процесів відіграє важливу роль у фізиці, хімії та біології. Необоротні процеси в природі настільки ж реальні, як і оборотні, а не є наслідком наближеного опису останніх. Вони визначають можливість самоорганізації у відкритих системах. Необоротність глибоко пов'язана з динамікою й виникає там, де основні поняття класичної та квантової механіки (поняття траєкторії і хвильової функції) припиняють відповідати даним, отриманим з дослідів. Якщо в класичній та квантовій механіці час є змінним параметром, то в теорії необоротних процесів — оператором. Необоротність приводить до суттєвих змін понять простору, часу, динаміки. Прикладами необоротних процесів можуть бути хімічні реакції (скажімо, коливальні реакції Бєлоусова — Жаботинського, або так званий «хімічний годинник»), в яких проявляється порушення часової симетрії, а також теплопровідність, дифузія. До таких процесів може бути застосована побудована доповідачем теорія, зокрема й у резонансних випадках.

У другій половині XX ст. було сформульовано припущення стосовно того, що для врахування необоротності виміру в рівняння Шредінгера необхідно включати нові члени, які описують динаміку квантових систем. Було зроблено спробу [8—10] змоделювати і вивчити крайові задачі для такого рівняння Шредінгера.

Наведемо відповідні постановки задач та основні результати. Розглянемо задачу про існування обмежених на всій осі розв'язків

$$d\phi(t)/dt = -iH(t)\phi(t) + f(t), \ t \in J \qquad (6)$$

в просторі Гільберта $H$, де для кожного $t \in J \subset \subset R$ необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0{}^*$ — необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset H$; відображення $t \to \to V(t)$ — сильно неперервне, $U(t, s)$ — еволюційний оператор відповідного однорідного рівняння. Умови розв'язності та представлення розв'язків рівняння дає така теорема.

***Теорема 4*** [10]. Нехай $\{U(t,s), t \geq s \in R\}$ сильно неперервний еволюційний оператор, асоційований з однорідним рівнянням. Припустимо, що виконано умови:

1. Оператор $U(t, s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $[0; \infty)$ *та* $(-\infty; 0]$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно.

2. Оператор $D = P_+(0)-(I - P_-(0))$ має псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор.

Тоді справедливі такі твердження:

1. Існують узагальнені розв'язки рівняння (7), обмежені на всій осі, тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(R, H)$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0\,, \qquad (8)$$

де $H(t) = P_{N(D^*)}P_-(0)U(0,t)$.

2. У разі виконання умови (8) узагальнені розв'язки рівняння (7), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$\phi_0(t,c) = = U(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + (G[f])(t,0), \qquad (9)$$

$c \in H$, де $(G[f])(t,s)$ — узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки [10].

Наступна частина присвячена розробленню асимптотичних методів побудови розв'язків крайової задачі

$$d\phi(t)/dt = -iH(t)\phi(t) + \\ + \varepsilon H_1(t)\phi(t) + f(t), \quad (10)$$

$$l\phi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\phi(\cdot), \quad (11)$$

$t \in J$ у просторі Гільберта $H$ із сингулярністю [4] в точці $\varepsilon = 0$. Умови на $H(t)$ такі, як і вище. $H_1(t)$ — лінійний та обмежений для всіх $t \in J$ оператор, $l$, $l_1$ — лінійні та обмежені оператори, що діють з $H$ в $H_1$. Шукається сильний розв'язок крайової задачі (10), (11). Для тих правих частин $f(t)$ рівняння (10), для яких незбурена крайова задача ($\varepsilon = 0$), таких розв'язків немає. Основний результат отримано за допомогою оператора

$$B_0 = P_{N(clQ^*)}l(U(\cdot,s) - \\ - \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)U(\tau,s)\,d\tau)P_{N(Q)},$$

$$Q = lU(\cdot,s).$$

***Теорема 5.*** Припустимо, що виконується умова $P_{N(B_0{}^*)}P_{N(Q^*)} = 0$. Якщо незбурена операторна крайова задача не має сильних узагальнених розв'язків, то операторна крайова задача (10), (11) має $\rho$ — параметричну множину сильних узагальнених розв'язків у вигляді частини ряду з сингулярністю в точці $\varepsilon = 0$:

$$\phi(t,s,\varepsilon,c_\rho) = \\ = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i [\phi_i(t,s,c_i) + X_i(t,s)P_{N(B_0)}c_\rho],$$

для довільного $c_\rho \in H$, абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$; тут

$$\phi_{-1}(t,s,c_{-1}) = U(t,s)P_{N(Q)}c_{-1},$$

$$\phi_0(t,s,c_0) = U(t,s)P_{N(Q)}c_0 + \\ + U(t,s)clQ^+\{\alpha + l_1\phi_{-1}(\cdot,s,c_{-1})\} + \\ + clG[H_1(\cdot)\phi_{-1}(\cdot,s,c_{-1}) + f(\cdot)](t,s),$$

$$\phi_i(t,s,c_i) = U(t,s)P_{N(Q)}c_i + \\ + U(t,s)clQ^+l_1\phi_{i-1}(\cdot,s,c_{i-1}) + \\ + clG[H_1(\cdot)\phi_{i-1}(\cdot,s,c_{i-1})](t,s);\ i \in N.$$

У наступній частині досліджується нелінійна операторно-диференціальна крайова задача для рівняння Шредінгера

$$d\phi(t,\varepsilon)/dt = -iH(t)\phi(t,\varepsilon) + \\ + \varepsilon Z(\phi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \quad (12)$$

$t \in J$, з операторною крайовою умовою вигляду

$$l\phi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(\phi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (13)$$

де $J \subset R$ — скінченний відрізок.

Основними результатами є такі теореми.

***Теорема 6 (необхідна умова)*** [10]. Нехай крайова задача (12), (13) має сильний узагальнений розв'язок $\phi(t,s,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із породжуючих розв'язків $\phi_0(t,s,c_0)$ з елементом $c = c_0$. Тоді елемент $c_0 \in H$ повинен задовольняти операторне рівняння для породжуючих елементів

$$F(c) = P_{N(Q^*)}\{J(\phi_0(\cdot,s,c),0) - \\ - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\phi_0(\tau,s,c),\tau,0)\,d\tau\} = 0. \quad (14)$$

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t,0)P_+(0)P_{N(D)}dt : H \to H,$$

де $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|v = \phi_0, \varepsilon = 0$ (похідна в сенсі Фреше).

***Теорема 7 (достатня умова)*** [10]. Нехай для оператора $B_0$ виконується умова $P_{N(B_0{}^*)}P_{N(Q^*)} = 0$. Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in H$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (14), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (12), (13). Цей розв'язок може бути знайдений з використанням ітераційного процесу

$$\psi_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)clQ^+J(\phi_0(\cdot,s,c_0) + \\ + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon clG[Z(\phi_0(\cdot,s,c_0) + \\ + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)](t,s),$$

$$c_k = clB_0{}^+\{P_{N(Q^*)}l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\psi_k(\tau,s,\varepsilon) + \\ + R(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau - P_{N(Q^*)}\{l\psi_k(\cdot,s,\varepsilon) + \\ + R_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\},$$

$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)P_{N(Q)}c_k + \psi_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$

$$\phi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\phi_k(t,s,\varepsilon),$$

$$\phi_k(t,s,\varepsilon) = \phi_0(t,s,c_0) + \psi_k(t,s,\varepsilon),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \psi_0(t,s,\varepsilon) = 0.$$

Дослідження з цього напряму мають зв'язок із задачами небесної механіки та космічними дослідженнями.

## Хаотичні моделі

Дослідження нелінійних моделей пов'язане з популярною нині теорією хаосу. Хаотичність є показником складності динамічної системи. Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах — одна з фундаментальних проблем сучасного природознавства. Поняття хаосу та порядку тісно пов'язані з напрямом нелінійного мислення — синергетикою. Слово *синергія* означає *спільна узгоджена дія*. Засновником цього напряму, що виник в останній третині XX ст., вважається німецький фізик-теоретик Герман Хакен, який вивчав, як спільна дія елементів нелінійного середовища породжує нові структури, тобто як відбувається самоорганізація.

Уперше теорію хаосу (саме в математичному розумінні) застосував Лоренц у відповідній моделі при прогнозуванні погоди, потім її, крім метеорології, використовували в астрономії та космології, лазерній оптиці, акустиці, фізиці плазми, фізиці прискорювачів, кінетиці хімічних реакцій, дослідженнях турбулентності тощо. Відомо, що ця модель дуже чутлива до початкових даних, прикладом чого є всім відомий «ефект метелика» [11].

Далі буде продемонстровано складність поведінки систем на прикладі нелінійної періодичної задачі для рівняння Ван дер Поля та різницевого рівняння.

Для того щоб зрозуміти, як у системах виникає самоорганізація, потрібно ввести поняття *біфуркації*, яке тісно пов'язане зі стійкістю та нестійкістю систем.

Наші уявлення про стійкість того чи іншого режиму функціонування динамічної системи формуються в процесі пізнання природи. Спостерігаючи за еволюцією живої і неживої природи, ми завжди помічаємо, що розвиток складної системи супроводжується втратою стійкості деяких режимів функціонування і народженням нових, стійких. Основи математичної теорії стійкості було закладено в роботах математика О.М. Ляпунова. Розвиток якісної теорії і теорії біфуркацій динамічних систем пов'язаний з іменами таких вчених, як О.О. Андронов, В.І. Арнольд та їхніх учнів. Про теорію біфуркацій уперше йшлося в лекціях великого А. Пуанкаре в Сорбонні в 1900 р. в курсі, присвяченому опису руху циліндричних стовпців рідини. На той час він використовував вираз echange des stabilites для того, що сьогодні називають біфуркаціями. Слід зауважити, що необоротні процеси (на відміну від оборотних) роблять внесок у збільшення ентропії. Другий закон термодинаміки пов'язує додатний напрям часу зі зростанням ентропії. В математичному розумінні ентропії може відповідати функція Ляпунова, з використанням якої визначається стійкість динамічних систем. Макс Планк підкреслював [12], що другий закон термодинаміки дозволяє виділити різні типи станів у природі, з яких одні є атракторами інших. Атрактори — це множини, до яких притягуються траєкторії динамічних систем. Необоротність є проявом атрактивності.

## Осцилятор Ван дер Поля

Осцилятор було названо ім'ям голландського інженера і фізика Бальтазара Ван дер Поля. Працюючи в компанії Philips, йому разом з колегою одними з перших вдалося спостерігати детермінований хаос. Рівняння Ван дер Поля застосовується у фізиці, механіці, в сейсмології для моделювання геологічних розломів, у фізіології для моделювання нервової системи (моделі Ходжкіна—Хакслі, Фітц Хью—Нагумо, або нейронна модель), в медицині для моделювання роботи серця. Подальший розвиток цих результатів привів до появи асимптотичної теорії, яка розвивалася в київській математичній школі М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка і породила теорію багаточастотних коливань.

У роботі [8] як приклад моделі Шредінгера було розглянуто крайову задачу для рівняння Ван дер Поля в сепарабельному просторі

Гільберта

$$d^2y(t)/dt^2 + Ty(t) = \varepsilon(1 - \|y(t)\|^2)dy(t)/dt, \quad (15)$$

$$y(0) = y(w),\ dy(0)/dt = dy(w)/dt, \quad (16)$$

де $T$ — необмежений оператор з компактним оберненим $T^{-1}$. Задачу можна переписати у вигляді зліченної системи диференціальних рівнянь

$$dx_k(t)/dt = \sqrt{\lambda_k}\, y_k(t), \quad (17)$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = -\sqrt{\lambda_k}\, x_k(t) + \varepsilon\sqrt{\lambda_k}\left(1 - \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} x_j^2(t)\right) y_k(t),$$

$$x_k(0) = x_k(w),\ y_k(0) = y_k(w),\ k = 1, 2, \ldots \quad (18)$$

Якщо $\varepsilon = 0$ і розглядається резонансний випадок $\lambda_i = 4\pi^2 i^2/w^2$ $(w = 2\pi)$, то породжуюча система рівнянь має розв'язки вигляду

$$x_k(t) = \cos(kt)\, c_1^k + \sin(kt)\, c_2^k,$$

$$y_k(t) = -\sin(kt)\, c_1^k + \cos(kt)\, c_2^k,$$

і необхідна умова розв'язності крайової задачі (17), (18) набуває такого вигляду.

***Теорема 8 (необхідна умова розв'язності рівняння Ван дер Поля)*** [8]. Нехай крайова задача (17), (18) має розв'язок $y(\cdot, \varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків породжуючого рівняння з набором пар констант $(c_1^k,\ c_2^k)$, $k \in N$. Тоді серед них може бути не більше скінченної кількості ненульових. Більше того, якщо

$$(c_1^k,\ c_2^k) \neq (0, 0),\ k = 1, N,$$

то ці константи знаходяться на $N$-вимірному торі (рис. 1) скінченновимірного підпростору констант

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = 4/(2N - 1),$$
$$i = 1, N.$$

На прикладі періодичної крайової задачі

$$x_{n+1} = \lambda A_{n+1} x_n + h_{n+1},\ n \geq 0 \quad (19)$$

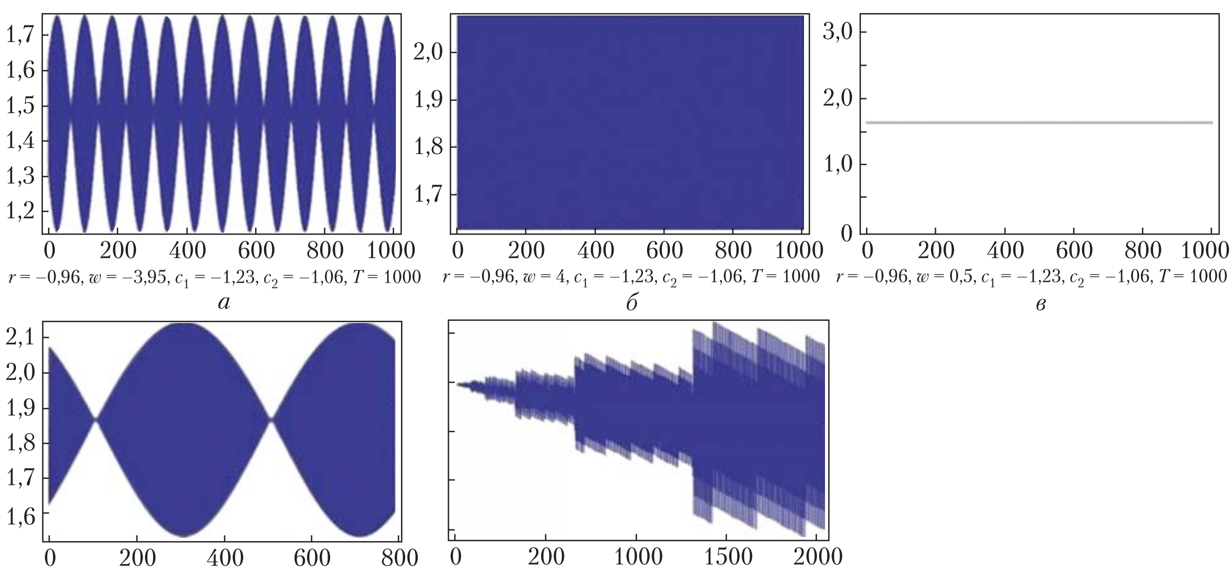
з умовою періодичності

$$x_0 = x_m, \quad (20)$$

***Рис. 1.*** Тор

де $A_n$ — лінійні обмежені оператори, що діють у банаховому просторі $B$, $A_{n+m} = A_n$, $h_n$ — обмежена послідовність у просторі Банаха $B$, продемонстровано чисельне моделювання знайдених в аналітичному вигляді розв'язків у двовимірному випадку залежно від зміни параметрів.

Результат моделювання для окремих значень параметрів зображено на рис. 2. Можна бачити, як замикання траєкторії довжини вектора щільно заповнює прямокутник (рис. 2*б*)



$r = -0{,}96$, $w = -3{,}95$, $c_1 = -1{,}23$, $c_2 = -1{,}06$, $T = 1000$

*а*

$r = -0{,}96$, $w = 4$, $c_1 = -1{,}23$, $c_2 = -1{,}06$, $T = 1000$

*б*

$r = -0{,}96$, $w = 0{,}5$, $c_1 = -1{,}23$, $c_2 = -1{,}06$, $T = 1000$

*в*

$r = -0{,}96$, $w = 3{,}99$, $c_1 = -1{,}23$, $c_2 = -1{,}06$, $T = 790$

*г*

$r = -0{,}96$, $w = -0{,}25$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $T = 2000$

*д*

***Рис. 2.*** Фазовий портрет системи

або вироджується в лінію (рис. 2*в*). Різні варіанти того, як траєкторія може заповнювати структуровані множини, показано на рис. 2*а г, д*. Одна з них, наведена на рис. 2*д*, є фрактальною множиною. Це дає можливість зробити висновок про те, що поведінка системи досить складна, можуть відбутися непередбачувані зміни навіть при невеликій зміні одного параметра.

## Висновки

Побудовано теорію розв'язності операторно-диференціальних крайових задач у просторах Фреше, Банаха та Гільберта.

Для лінійних операторних рівнянь за умов розв'язності представлено множину розв'язків з використанням побудованого узагальненого оператора Гріна.

Для нелінійних операторних рівнянь запропоновано ітеративні алгоритми побудови розв'язків.

Розглянуто лінійні та нелінійні моделі крайових задач для операторно-диференціального рівняння Шредінгера в просторі Гільберта. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності крайових задач для операторно-диференціального рівняння Шредінгера в просторі Гільберта, як на скінченному відрізку, так і на нескінченному. Досліджувалися лінійні і нелінійні задачі зі змінним та постійним оператором у лінійній частині. Знайдено аналітичні розв'язки та запропоновано збіжні ітеративні алгоритми їх побудови.

Як приклад розглянуто й досліджено рівняння Ван дер Поля в просторі Гільберта, яке має практичні застосування.

Проілюстровано чисельне моделювання побудованих розв'язків крайових задач.

*Доповідач висловлює глибоку подяку завідувачу лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору, науковому консультанту Олександру Андрійовичу Бойчуку та директору Інституту математики НАН України, академіку НАН України Анатолію Михайловичу Самойленку за допомогу в роботі та численні обговорення матеріалу.*

REFERENCES

1. Hilbert D. Mathematical Problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1902. **8**(10): 437.
[Александров П.С. *Проблемы Гильберта*. М.: Наука, 1969].
2. Boichuk O.A., Pokutnyi O.O. Bifurcation theory of operator equations in the Frechet and Hilbert spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2015. **67**(9): 1181.
[Бойчук О.А, Покутний О.О. Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта. *Укр. мат. журн.* 2015. Т. 67, № 9. С. 1181—1188].
3. Pokutnyi O.O. Generalised invertible operator in the Frechet, Banach and Hilbert spaces. *Visnyk of Kiev University*. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2013. (4): 158.
[Покутний О.О. Узагальнено-обернений оператор у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісник Київського університету*. Серія фізико-математичні науки. 2013. № 4. С. 158—161].
4. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems*. (Berlin: De Gruyter, 2016).
5. Arsenin V.Ya., Tikhonov A.N. *The methods of solving of irregular problems*. (Moscow: Nauka, 1986).
[Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986].
6. Prigogine I. *From Being to Becoming*. (San Francisco: Freeman, 1980).
[Пригожин И. *От существующего к возникающему*. М.: Наука, 1985].
7. Krein S.G. *Linear equations in the Banach space*. (Moscow: Nauka, 1972).
[Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1972].
8. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space. *Boundary Value Problems*. 2014. **2014**: 4. http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2014/1/4.

9. Pokutnyi O.O. Representation of the Solutions of Boundary-value Problems for the Schrödinger Equation in a Hilbert Space. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. **205**(6): 821.
[Покутний О.О. Представлення розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера у просторі Гільберта. *Нелінійні коливання*. 2014. Т. 17, № 1. С. 102—111].
10. Pokutnyi O.O. Exponential dichotomy and bounded solutions of the Schrodinger equation. *Chaotic modeling and simulation (CMSIM)*. 2013. (4): 625.
11. Devaney R.L. *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. (Westview Press, 2003).
12. Planck M. *Vorlesungen uber Thermodynamik*. (Leipzig, 1930).
[Планк М. *Термодинамика*. М.-Л.: Гостехиздат, 1925].
13. Biletskyi B.A., Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Periodic problems of difference equations and ergodic theory. *Abstract and Applied Analysis*. 2011. **2011**: 928587.

*O.O. Pokutnyi*

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kyiv)

THE THEORY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS
OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

According to the materials of scientific report at the meeting
of the Presidium of NAS of Ukraine, November 9, 2016

The report is devoted to investigation of boundary value problems and its applications. Proposed new models of quantuum mechanics in the Hilbert space which connect with the theory of irreversible process. One of applications of the considered problem is Van der Pol equation in the Hilbert space. Such model is widely used in the biology, neural system and others applications.

***Keywords*:** chaos, Hilbert's problem, Van der Pol equation, Moore—Penrose pseudoinvertible operators, neural models.