УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В НЕПРОГНОЗИРУЕМО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Встановлено, що при суттєвих порушеннях статистичної стійкості використання класичної детерміновано-випадкової моделі вимірювання та заснованих на ній методиках вимірювання призводить до недопустимо великих похибок. Розроблено методику вимірювання фізичних величин у статистичних умовах, що непрогнозовано змінюються. Продемонстровано ефективність нової методики.*
Ключові слова: *статистична стійкість, параметр статистичної нестійкості, теорія гіпервипадкових явищ, похибка вимірювання, модель вимірювання.*

Аннотация. *Установлено, что при существенных нарушениях статистической устойчивости использование классической детерминированно-случайной модели измерения и основанных на ней методиках измерения приводит к недопустимо большим погрешностям. Разработана методика измерения физических величин в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях. Продемонстрирована эффективность новой методики.*
Ключевые слова: *статистическая устойчивость, параметр статистической неустойчивости, теория гиперслучайных явлений, погрешность измерения, модель измерения.*

Abstract. *It has been found that under essential violations of statistical stability, using of the classic determinately-random measurement model and based on it measurement techniques lead to unacceptable large errors. A technique for measuring of physical quantities under unpredictable changing statistical conditions is developed. The effectiveness of the new technique is demonstrated.*
Keywords: *statistical stability, parameter of statistical instability, theory of hyper-random phenomena, measurement error, measurement model.*

1. Введение

Одним из наиболее распространенных видов измерений является прямое статистическое измерение, представляющее собой непосредственное многократное измерение физической величины и статистическую обработку полученных данных. Физической основой таких измерений служит феномен статистической устойчивости, проявляющийся в стабильности статистик.

Существует множество методик прямых статистических измерений, учитывающих разную специфику условий их проведения. Разнообразие методик обусловлено тем, что любая методика базируется на множестве предположений и моделей, приближенно описывающих реальные условия. От степени адекватности используемых моделей зависит как сам результат измерения, так и оценка его точности.

В классической модели измерения, которую можно назвать детерминированно-случайной [1, 2], и разработанных на ее основе методиках измерения измеряемая величина (параметр) θ полагается неизменной и однозначной, а результаты одиночных ее измерений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ и конечный результат измерения (оценка) Θ^* – случайными величинами.

Эта модель базируется на гипотезе идеальной статистической устойчивости реальных физических процессов, предполагающей, что при неограниченном увеличении объема выборки N оценка Θ^* имеет некоторый предел.

В реальном мире все изменяется. Изменяются и статистические условия. Пренебрежимо малые на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости на больших интервалах наблюдения проявляются сильно.

Исследования реальных процессов разной физической природы показывают [1–3], что феномен статистической устойчивости не идеален. При длительном наблюдении процессы теряют статистическую устойчивость.

Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении измерений.

В настоящее время вопрос учета нарушений статистической устойчивости достаточно глубоко проработан в теоретическом плане в рамках физико-математической теории гиперслучайных явлений (ТГСЯ) [1, 2], однако он все еще не доведен до практических методик измерения физических величин.

Цель настоящей статьи – разработка практической методики измерения физических величин, учитывающей нарушения статистической устойчивости.

Рассмотрим вначале классическую модель измерения.

2. Детерминированно-случайная модель измерения

Согласно [1, 2], детерминированную измеряемую величину θ можно рассматривать как вырожденную случайную величину, у которой функция распределения имеет вид единичного скачка в точке θ: $F_\theta(x) = \text{sign}[x-\theta] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le \theta, \\ 1 & \text{при} \quad x > \theta. \end{cases}$

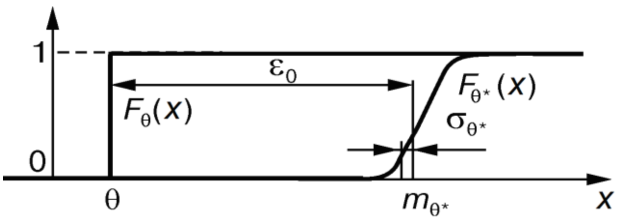

Рис. 1. Классическая (детерминированно-случайная) модель измерения

Тогда детерминированно-случайную модель измерения схематично можно представить в виде рис. 1, где $F_{\theta^*}(x)$ – функция распределения оценки Θ^*, m_{θ^*} и σ_{θ^*} – соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) этой оценки, а ε_0 – систематическая погрешность измерения.

Используя результаты конкретных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_N$, можно рассчитать интервал, в котором предположительно находится параметр θ (доверительный интервал). Границы этого интервала описываются выражениями

$$\theta_i = \theta^* - \varepsilon_0 - k\sigma^*_{\theta^*}, \quad \theta_s = \theta^* - \varepsilon_0 + k\sigma^*_{\theta^*}, \tag{1}$$

где θ^* и $\sigma^*_{\theta^*}$ – соответственно оценка измеряемой величины и оценка среднеквадратического отклонения оценки, сформированные по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_N$, k – коэффициент, определяющий степень доверия.

Соответствующие этим границам доверительного интервала границы погрешности $z = \theta^* - \theta$ описываются выражениями

$$z_i = \varepsilon_0 - k\sigma^*_{\theta^*}, \quad z_s = \varepsilon_0 + k\sigma^*_{\theta^*}. \tag{2}$$

3. Методика прямых статистических измерений на основе детерминированно-случайной модели

Наиболее простой и широко распространенной методикой прямых статистических измерений, основанной на детерминированно-случайной модели, является методика, изложенная в стандарте [1]. Не вдаваясь в подробности, изложим ее суть.

Согласно этой методике в качестве случайной оценки Θ^* измеряемой физической величины θ выступает среднее множества результатов измерений: $\Theta^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$. Тогда детерминированная оценка θ^*, сформированная на основе множества конкретных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_N$, описывается выражением $\theta^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$.

Предполагается, что результаты измерений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ независимы, имеют один и тот же неизвестный закон распределения, неизвестное математическое ожидание и неизвестную дисперсию D_x. Тогда СКО σ_{θ^*} оценки Θ^* связано с дисперсией отсчетов D_x соотношением $\sigma_{\theta^*} = \sqrt{D_x / N}$.

Вместо неизвестной дисперсии D_x используется ее оценка $D_x^* = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \theta_N^*)^2$, а вместо неизвестного СКО σ_{θ^*} – оценка $\sigma_{\theta^*}^* = \sqrt{D_x^* / N}$.

Отсюда следует, что методика измерения включает:

1) проведение N измерений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ измеряемой физической величины θ;

2) расчет оценки $\theta^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$ измеряемой физической величины θ;

3) расчет оценки $\sigma_{\theta^*}^* = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \theta^*)^2}$ СКО оценки θ^*;

4) определение по формулам (1) и (2) границ θ_i , θ_s интервала, в котором находится измеряемый параметр θ, и границ z_i, z_s интервала погрешности измерения z [1].

При нарушениях статистической устойчивости классическая детерминированно-случайная модель измерения неадекватно представляет действительность и описанная методика измерения дает большую погрешность измерения.

4. Нарушение статистической устойчивости

Факт существенного нарушения статистической устойчивости процесса может быть зафиксирован на основе анализа динамики изменения различных параметров статистической неустойчивости. Статистическая устойчивость зависит не только от специфики самого процесса, но также и от статистики, по отношению к которой рассматривается устойчивость. Простейшим параметром, характеризующим статистическую неустойчивость процесса по отношению к среднему, является параметр

---

[1] При практических расчетах константа k задается исследователем (обычно в диапазоне от 1 до 3), а в качестве систематической погрешности ε_0 берется величина, указанная в паспорте измерительного прибора.

$$\gamma_N = \frac{\mathrm{M}[\bar{D}_{Y_N}]}{\mathrm{M}[\bar{D}_{X_N}]}, \tag{3}$$

где $\mathrm{M}[\cdot]$ – оператор математического ожидания,

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2 \tag{4}$$

– выборочная дисперсия флуктуации выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = \overline{1, N}), \tag{5}$$

$\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ – выборочное среднее флуктуации среднего,

$$\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_i - Y_N)^2 \tag{6}$$

– выборочная дисперсия процесса.

Теоретически статистически устойчивым по отношению к среднему считается случайный процесс, у которого параметр статистической неустойчивости γ_N стремится к нулю при $N \to \infty$.

Обратим внимание, что если реальный процесс носит неслучайный характер, для оценки нарушений статистической устойчивости также может быть использован параметр статистической неустойчивости (3). Для корректного его применения в этом случае под оператором $\mathrm{M}[\cdot]$ следует понимать усреднение по ансамблю, конечному или бесконечному. В вырожденном случае усреднение по ансамблю может отсутствовать.

На практике объем данных всегда ограничен, а потому объем выборки N и ансамбль реализаций конечны. Тогда принятие решения о наличии или отсутствии нарушений статистической устойчивости возможно на основе анализа тенденции изменения оценки параметра γ_N^* при больших значениях N или, что более корректно, на основе сопоставления значения этой оценки со значением γ_{0N} параметра γ_N, рассчитанного для эталонного статистически устойчивого процесса.

В качестве эталона удобно использовать белый гауссовский шум[2]. Для него рассчитаны [1] параметр γ_{0N} и СКО $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ величины $\tilde{\gamma}_{0N} = \bar{D}_{Y_N} / \mathrm{M}[\bar{D}_{X_N}]$. По этим параметрам нетрудно рассчитать верхнюю границу $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + k\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ коридора параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему (k – параметр, определяющий ширину коридора). Выход оценки параметра статистической неустойчивости γ_N^* за верхнюю границу коридора свидетельствует о нарушении статистической устойчивости по отношению к среднему.

Экспериментальные исследования показывают [1–3], что все реальные физические процессы статистически неустойчивы, однако интервал, на котором нарушения статистической устойчивости остаются еще пренебрежимо малыми (интервал статистической устойчивости), разный.

[2] Для корректного использования этого эталона период дискретизации исследуемого процесса должен быть равен интервалу его корреляции.

5. Методика оценки интервала статистической устойчивости по отношению к среднему

На основании п. 4 методика оценки интервала статистической устойчивости по отношению к среднему процесса, представленного выборкой $x_1, x_2, \ldots$, сводится к:

1) расчету для разных объемов выборки n $(n = \overline{1, N})$ выборочных средних $y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$;

2) расчету для разных объемов выборки N выборочной дисперсии $\bar{D}_{x_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_i - y_N)^2$;

3) расчету для разных объемов выборки N выборочного среднего флуктуации среднего $\bar{m}_{y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$;

4) расчету для разных объемов выборки N выборочной дисперсии флуктуации выборочного среднего $\bar{D}_{y_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \bar{m}_{y_N})^2$;

5) расчету для разных объемов выборки N оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему $\gamma_N^* = \frac{\bar{D}_{y_N}}{\bar{D}_{x_N}}$;

6) построению зависимости оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N^* от объема выборки N;

7) сравнению полученной зависимости с зависимостью верхней границы коридора параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_{0N}^+ (для заданной величины k).

Интервалом статистической устойчивости N_s (в терминах объема выборки N) считается объем N, при котором происходит выход оценки параметра γ_N^* за верхнюю границу коридора γ_{0N}^+.

В монографиях [1, 2] рассмотрен ряд различных моделей измерения, учитывающих нарушения статистической устойчивости. Одна из них – детерминированно-гиперслучайная модель. На ней и остановимся, но прежде, чем переходить к ее описанию, кратко охарактеризуем используемое в ней понятие гиперслучайной величины.

6. Гиперслучайная величина

Под гиперслучайной величиной X подразумевается множество G случайных величин X_g ($X = \{X_g,\ g \in G\}$), каждая из которых описывается определенной функцией распределения $F_{x/g}(x)$.

Гиперслучайная величина представляется многозначной функцией распределения $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x),\ g \in G\}$, а также рядом параметров и характеристик, характеризующих ее.

Наряду с множеством функцией распределения $F_{x/g}(x)$ характеристиками, дающими представление о гиперслучайной величине, являются верхняя $F_{Sx}(x)=\sup\limits_{g\in G} F_{x/g}(x)$ и нижняя $F_{Ix}(x)=\inf\limits_{g\in G} F_{x/g}(x)$ границы функции распределения.

К числу параметров, характеризующих гиперслучайную величину, относятся условные моменты: математические ожидания $m_{x/g}$, СКО $\sigma_{x/g}$ и пр., моменты границ $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ – математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, СКО границ σ_{Sx}, σ_{Ix} и пр., а также границы моментов – нижняя и верхняя границы математического ожидания $m_{ix}=\inf\limits_{g\in G} m_{x/g}$, $m_{sx}=\sup\limits_{g\in G} m_{x/g}$, нижняя и верхняя границы СКО $\sigma_{ix}=\inf\limits_{g\in G}\sigma_{x/g}$, $\sigma_{sx}=\sup\limits_{g\in G}\sigma_{x/g}$ и др.

Обратим внимание, что частным случаем гиперслучайной величины является случайная величина.

7. Детерминированно-гиперслучайная модель измерения

В детерминированно-гиперслучайной модели измерения измеряемая величина θ представляется детерминированной, а результаты одиночных измерений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ и конечный результат измерения Θ^* – гиперслучайными величинами.

Как и в детерминированно-случайной модели, измеряемую величину θ будем рассматривать как вырожденную случайную величину, описываемую функцией распределения $F_\theta(x)$. Под оценкой Θ^* будем понимать некоторую статистику – функцию выборки $\vec{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ объемом N из гиперслучайной генеральной совокупности (рис. 2).

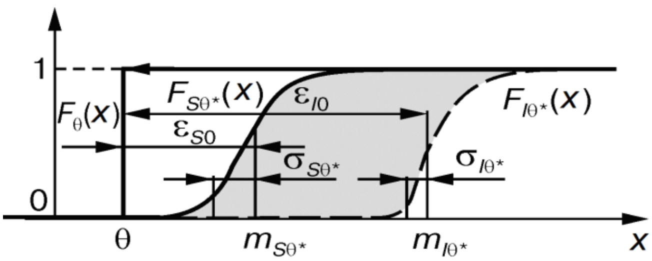

Рис. 2. Детерминированно-гиперслучайная модель измерения

Оценку Θ^* можно представить множеством случайных оценок $\Theta_g^*=\Theta^*/g$, соответствующих различным условиям $g\in G$: $\Theta^*=\left\{\Theta_g^*,\ g\in G\right\}$, где Θ_g^* является функцией случайной выборки $\vec{X}_g=\vec{X}/g$.

Конкретную величину θ^* гиперслучайной оценки Θ^* можно представить множеством детерминированных величин $\theta_g^*=\theta^*/g$, соответствующих различным условиям $g\in G$: $\theta^*=\left\{\theta_g^*,\ g\in G\right\}$.

В зависимости от постановки задачи точность точечной оценки можно характеризовать по-разному. В общем случае точность характеризует гиперслучайная погрешность $Z=\Theta^*-\theta$. В фиксированных условиях g параметром, характеризующим точность случайной оценки Θ_g^*, является величина $\Delta_{z_g}^2$ – математическое ожидание квадрата случайной погрешности $Z_g=\Theta_g^*-\theta$, а именно: $\Delta_{z_g}^2=\mathrm{M}\left[\left|\Theta_g^*-\theta\right|^2\right]$.

Точность конкретной оценки θ_g^*, полученной в фиксированных условиях g, характеризует детерминированная погрешность $z_g=\theta_g^*-\theta$.

Точность оценки в изменяющихся условиях характеризует интервал, в котором находятся величины $\Delta^2_{z_g}$, $g \in G$. Погрешность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому верхняя граница рассматриваемого интервала описывается выражением

$$\Delta_z^2 = \max[\Delta_{Sz}^2, \Delta_{Iz}^2],$$

где $\Delta_{Sz}^2 = \mathrm{M}_S[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$, $\Delta_{Iz}^2 = \mathrm{M}_I[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$ – средние квадраты погрешности Z, рассчитанные с использованием соответственно верхней $F_{S\theta^*}(\theta)$ и нижней $F_{I\theta^*}(\theta)$ границ функции распределения оценки.

Точность оценки характеризуют также границы среднего квадрата погрешности Z:

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[\left|\Theta_g^* - \theta\right|^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[\left|\Theta_g^* - \theta\right|^2]$$

и корни из этих величин Δ_{iz}, Δ_{sz}, которые для простоты изложения будем называть границами погрешности.

В условиях $g \in G$ смещение гиперслучайной оценки Θ^* (систематическая погрешность) описывается выражением $\varepsilon_{0/g} = m_{z/g} = m_{\theta^*/g} - \theta$, где $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\Theta_g^*]$ и $m_{z/g}$ – математические ожидания соответственно случайных величин Θ_g^* и Z_g.

Границы Δ_{Sz}^2, Δ_{Iz}^2 и Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 можно представить следующим образом:

$$\Delta_{Sz}^2 = m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2, \quad \Delta_{Iz}^2 = m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2,$$

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2],$$

где $m_{Sz} = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$, $m_{Iz} = m_{I\theta^*} - \theta = \varepsilon_{I0}$ – математические ожидания границ погрешности, представляющие собой смещения оценки относительно соответственно верхней и нижней границ функции распределения:

$$\sigma_{Sz}^2 = \mathrm{M}_S\left[\left(Z - m_{Sz}\right)^2\right] = \sigma_{S\theta^*}^2, \quad \sigma_{Iz}^2 = \mathrm{M}_I\left[\left(Z - m_{Iz}\right)^2\right] = \sigma_{I\theta^*}^2$$

– дисперсии границ погрешности, совпадающие с дисперсиями границ оценки; $\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 = \mathrm{M}\left[\left(\Theta_g^* - m_{\theta^*/g}\right)^2\right]$ – условная дисперсия погрешности, совпадающая с условной дисперсией оценки (рис. 3).

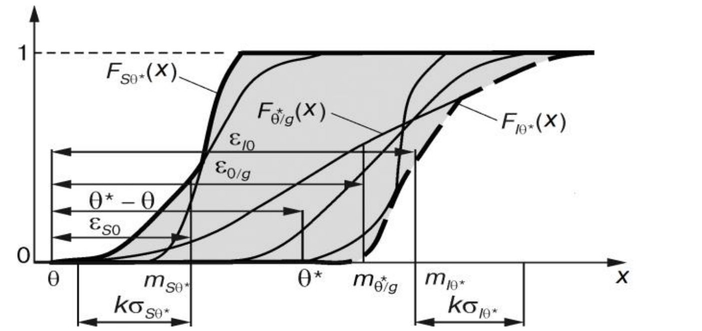

Рис. 3. Веер условных функций распределения $F_{\theta^*/g}(x)$ (тонкие линии) для различных условий g, верхняя $F_{S\theta^*}(x)$ (полужирная сплошная линия) и нижняя $F_{I\theta^*}(x)$ (полужирная пунктирная линия) границы функции распределения

В изменяющихся условиях погрешность z описывается неравенством

$$\varepsilon_{S0} - k\sigma_{S\theta^*} < z < \varepsilon_{I0} + k\sigma_{I\theta^*},$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ (доверительный интервал) – неравенством

$$\theta^* - \varepsilon_{I0} - k\sigma_{I\theta^*} < \theta < \theta^* - \varepsilon_{S0} + k\sigma_{S\theta^*},$$

где k – константа, определяющая степень доверия.

8. Формализация условий проведения измерений

Уточним условия проведения измерений. Будем исходить из того, что в результате предварительного анализа статистической устойчивости выборки $x_1,...,x_N$ большого объема N обнаружены нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему, а в результате измерения интервала статистической устойчивости N_s (см. пп. 4, 5) оценена величина N_s и выяснено, что $N \gg N_s$.

Предполагается, что измеряется скалярная детерминированная однозначная величина θ, не меняющая значения в процессе измерения, а результаты измерения носят гиперслучайный характер и адекватно описываются гиперслучайной выборкой $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

В процессе измерения статистические условия непрогнозируемо изменяются. При этом изменяются они медленно, что позволяет разделить интервал наблюдения на G одинаковых по длительности фрагментов, соответствующих практически постоянным статистическим условиям. Элементы выборки берутся с равномерным шагом. Количество отсчетов, соответствующих одному фрагменту, равно N_s.

В фиксированных статистических условиях g ($g = \overline{1,G}$) элементы случайной выборки $X_{1g},...,X_{N_s g}$ некоррелированные и имеют один и тот же неизвестный закон распределения $F_g(x)$ и неизвестную дисперсию $D_{x/g}$.

Результаты конкретных N измерений $x_1,...,x_N$ представляют собой реализацию гиперслучайной выборки, а результаты конкретных N_s измерений $x_{1g},...,x_{N_s g}$ в условиях g – реализацию случайной выборки $X_{1g},...,X_{N_s g}$.

На интервалах $m_{x/g} \pm 3\sigma_{x/g}$ функции распределения $F_g(x)$ ($g = \overline{1,G}$) не пересекаются, где $m_{x/g}$ и $\sigma_{x/g} = \sqrt{D_{x/g}}$ – соответственно математическое ожидание и СКО элементов случайной выборки $X_{1g},...,X_{N_s g}$. Это предположение позволяет упростить расчет границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ гиперслучайной величины X: представить их функциями распределения случайных величин X_g с минимальным и максимальным математическим ожиданием $m_{x/g}$ ($m_{Sx} = m_{ix}$, $m_{Ix} = m_{sx}$).

В качестве оценки измеряемой величины θ^* используется среднее оценок математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, сформированных по результатам наблюдения $x_1,...,x_N$:

$$\theta^* = (m^*_{Sx} + m^*_{Ix}) / 2, \qquad (7)$$

а в роли систематической погрешности рассматривается величина $\varepsilon_0 = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$.

9. Методика измерения физической величины в непрогнозируемо изменяющихся условиях

Принимая во внимание п. 8, методика измерения величины θ сводится к следующему:

1) проведение N измерений $x_1,...,x_N$ искомой величины θ;

2) разбивка выборки на фрагменты по N_s отсчетов в каждой;

3) для каждого g-го фрагмента ($g = \overline{1,G}$) расчет оценки математического ожидания $m^*_{x/g} = \frac{1}{N_s}\sum_{n=1}^{N_s} x_{ng}$;

4) определение оценок, m^*_{Sx}, m^*_{Ix} математических ожиданий границ ($m^*_{Sx} = m^*_{ix} = \inf\limits_g m^*_{x/g}$, $m^*_{Ix} = m^*_{sx} = \sup\limits_g m^*_{x/g}$) и номеров фрагментов g_S, g_I, соответствующих математическим ожиданиям верхней и нижней границ;

5) расчет по фрагментам g_S, g_I оценок среднеквадратических отклонений σ^*_{Sx}, σ^*_{Ix} верхней и нижней границ;

6) расчет по формуле (7) оценки θ^*;

7) расчет границ доверительного интервала θ_i, θ_s с учетом уменьшения СКО границ распределения в $\sqrt{N_s}$ раз за счет усреднения данных:

$$\theta_i = \theta^* - \varepsilon_0 - (m^*_{Ix} - m^*_{Sx}) - k\sigma^*_{Ix} / \sqrt{N_s}, \quad \theta_s = \theta^* - \varepsilon_0 + k\sigma^*_{Sx} / \sqrt{N_s}; \tag{8}$$

8) расчет границ интервала погрешности измерения

$$z_i = \varepsilon_0 - k\sigma^*_{Sx} / \sqrt{N_s}, \quad z_s = \varepsilon_0 + (m^*_{Ix} - m^*_{Sx}) + k\sigma^*_{Ix} / \sqrt{N_s}.$$

Заметим, что в случае наличия корреляции между отсчетами, величина N_s должна быть уменьшена в τ_c / T_s раз, где τ_c – интервал корреляции, а T_s – длительность фрагмента, содержащего N_s отсчетов.

10. Пример

Для получения представления о величине возможных отличий результатов измерений с использованием разных методик рассмотрим конкретный пример оценки напряжения городской электросети.

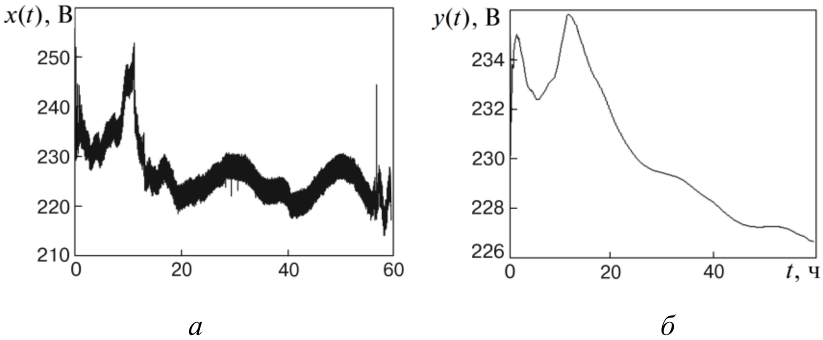

Рис. 4. Результаты измерения напряжения городской электросети на протяжении 60 ч наблюдения (а) и соответствующее им выборочное среднее (б)

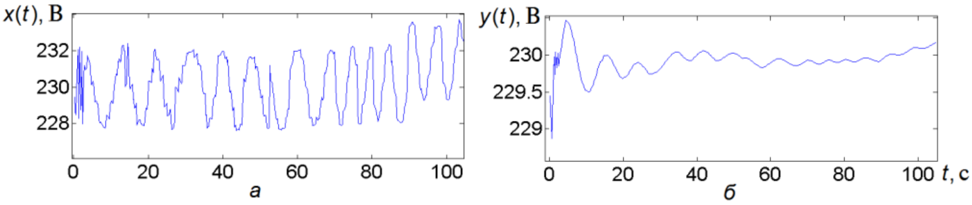

Рис. 5. Результаты измерения напряжения городской электросети на протяжении 100 с наблюдения (а) и соответствующее им выборочное среднее (б)

На рис. 4 *а* приведены результаты записи колебания напряжения в сети на протяжении 60 ч наблюдения [1], а на рис. 5 *а* – начальный 100 с фрагмент этого 60-часового интервала. На рис. 4 *б* и 5 *б* изображена динамика изменения соответствующих выборочных средних рассматриваемых процессов.

Анализ приведенной на рис. 4 *а* зависимости напряжения сети от времени в соответствии с методикой, описанной в п.5, показывает, что рассматриваемый процесс $x(t)$ явно статистически неустойчивый, а интервал его статистической устойчивости τ_s составляет примерно 1 ч.

Представление об изменениях закона распределения на протяжении рассматриваемых 60 ч наблюдения дает рис. 6 *а*, а об изменениях оценки функции распределения выборочного среднего $m^*_{xN} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ – рис. 6 *б*.

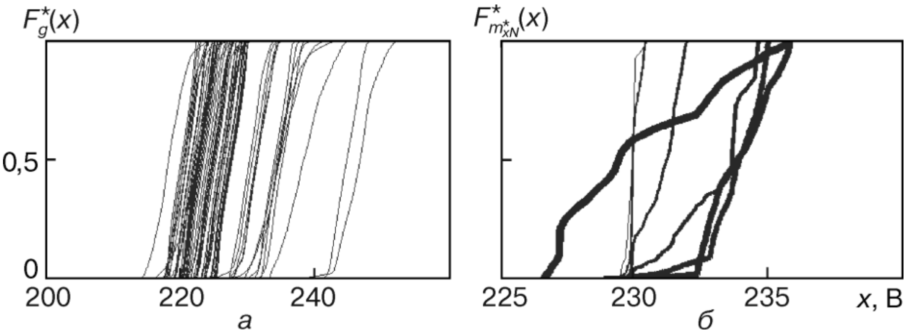

Рис. 6. Оценки функции распределения напряжения электросети $F^*_g(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (а) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ при различных объемах выборки $N = 2^r$ $(r = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)$ (б) (толщина линий возрастает с увеличением параметра r)

Результаты расчета различных параметров, характеризующих колебания напряжения сети, с использованием рассмотренных методик измерения представлены на рис. 7.

Левая часть рис. 7, соответствующая 100-секундному интервалу наблюдения, представляет параметры, полученные с использованием детерминированно-случайной модели измерения и описанной в п. 3 методики, основанной на положениях теории вероятностей.

Правая часть рис. 7, соответствующая 60-часовому интервалу наблюдения, представляет параметры, полученные с использованием детерминированно-гиперслучайной модели измерения (за исключением параметра, отмеченного тонкой стрелкой) и описанной в п. 9 методики, основанной на положениях теории гиперслучайных явлений.

Для 60-часового интервала наблюдения размах выборки и размах выборочного среднего вычислены по данным рис. 4 *а*, 4 *б*, а доверительный интервал (ТГСЯ), отмеченный жирной стрелкой, и оценка (ТГСЯ) рассчитаны по методике, описанной в п. 9. Доверительный интервал (ТВ), отмеченный тонкой стрелкой, рассчитан по методике, изложенной в п. 3.

Как видно из рисунка, результаты существенно отличаются.

Параметры в левой части рисунка отражают состояние электрической сети в конкретных статистических условиях, которые имели место на рассматриваемом 100-секундном интервале наблюдения. Параметры в правой части рисунка (за исключением отмеченного тонкой стрелкой) представляют состояние сети во множестве различных статистических условий, которые непрогнозируемо сменяли друг друга на протяжении рассматриваемого 60-часового интервала наблюдения. Параметр, отмеченный тонкой стрелкой, характеризует состояние сети во множестве различных, но вполне конкретных, статистических условиях, которые сменяли друг друга на протяжении того же 60-часового интервала наблюдения.

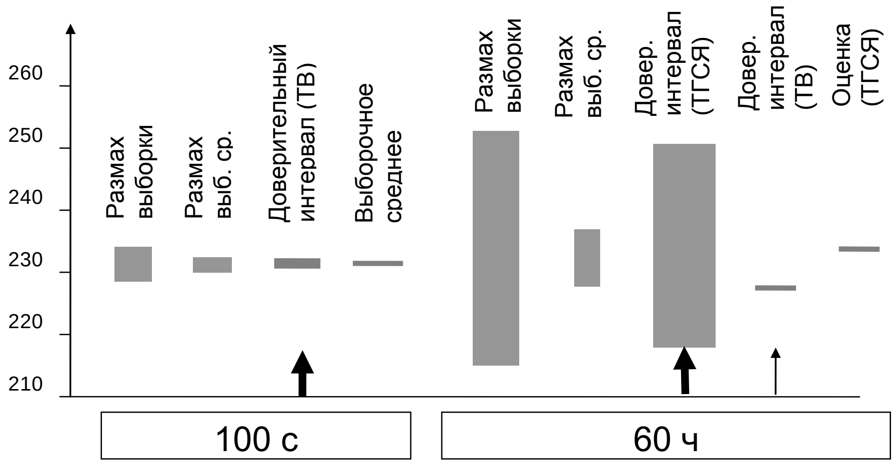

Рис. 7. Результаты расчета параметров, характеризующих напряжение сети по данным рис. 4–6 с использованием методик измерения, основанных на положениях теории вероятностей (ТВ) и теории гиперслучайных явлений (ТГСЯ)

Для 100-секундного интервала наблюдения наиболее информативным параметром является доверительный интервал, рассчитанный по методике теории вероятностей, а для 60-часового интервала – по методике теории гиперслучайных явлений (на рис. 7 эти параметры отмечены двумя жирными стрелками).

Для 60-часового интервала наблюдения доверительный интервал шириной 50 мВ и со средним значением 229,4 В, рассчитанный в соответствии с теорией вероятностей (отмеченный на рисунке тонкой стрелкой), совершенно не информативен, т.к. учитывает конкретную последовательность смены условий, которая на следующих 60-часовых интервалах наблюдения, скорее всего, не повторится, а доверительный интервал шириной 33 В и со средним значением 233,5 В, рассчитанный в соответствии с теорией гиперслучайных явлений (отмеченный жирной стрелкой), содержит полезную для практики информацию об усредненной динамике изменения напряжения сети.

Потеря полезной информации в первом случае и сохранение ее во втором связаны с тем, что при нарушениях статистической устойчивости классическая детерминированно-случайная модель измерения искаженно отражает реальную ситуацию, а детерминированно-гиперслучайная модель – представляет ее адекватно.

Как следует из приведенного примера, игнорирование факта нарушений статистической устойчивости может приводить к абсурдным результатам, в частности, к необоснованному завышению оценок точности измерений.

11. Выводы

1. Установлено, что при существенных нарушениях статистической устойчивости нельзя использовать классическую детерминированно-случайную модель измерения и основанные на ней методики измерения.
2. Показано, что игнорирование факта нарушения статистической устойчивости может приводить к абсурдным результатам, в частности, к необоснованному завышению оценок точности измерений в сотни и более раз.
3. На основе детерминированно-гиперслучайной модели измерения разработана методика измерения физических величин, учитывающая непрогнозируемые изменения статистических условий.

4. Описанная в статье методика – лишь одна из множества возможных методик, основанных на детерминированно-гиперслучайной модели измерения. На базе этой модели могут быть разработаны другие методики, учитывающие специфические особенности конкретных условий проведения измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

3. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.

4. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. – 8 с.

Стаття надійшла до редакції 02.11.2015