УДК 519.863:001.8

С.Г. РАДЧЕНКО[*]

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

[*]Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

Анотація. *Викладено метод оптимізації складних систем і процесів у вигляді випадкового пошуку накидного типу з ЛП$_\tau$ рівномірно розподіленими послідовностями. Приведені переваги методу. Наведено приклади успішного використання методу в рішеннях реальних прикладних задач. Розглянута оптимізація з використанням принципу компромісу за Парето.*
Ключові слова: *оптимізація, випадковий пошук, ЛП$_\tau$ рівномірно розподілені послідовності, компроміс за Парето.*

Аннотация. *Изложен метод оптимизации сложных систем и процессов в виде случайного поиска набросового типа с ЛП$_\tau$ равномерно распределенными последовательностями. Приведены преимущества метода. Даны примеры успешного использования метода в решениях реальных прикладных задач. Рассмотрена оптимизация с использованием принципа компромисса по Парето.*
Ключевые слова: *оптимизация, случайный поиск, ЛП$_\tau$ равномерно распределенные последовательности, компромисс по Парето.*

Abstract. *The method of optimization of complex systems and processes in a form of random search of the surge type with ЛП$_\tau$ uniformly distributed sequences is stated. The advantages of the method are presented. Examples of successful use of the method in solutions of real applied problems are given. Optimization with the use of trade-off principle according to Pareto is considered.*
Keywords: *optimization, random search, ЛП$_\tau$ uniformly distributed sequences, trade-off according to Pareto.*

1. Вступление. Постановка проблемы

При создании и совершенствовании сложных систем и процессов – наукоемких изделий, высоких технологий, интеллектуальных средств измерений, новых материалов – в большинстве исследований решаются два класса задач: оптимизация критериев качества и получение их математических моделей.

Оптимизация систем и процессов представляет системный ресурс создания систем и процессов, она необходима для получения конкурентоспособной продукции. Известны несколько десятков наиболее распространенных методов оптимизации. Наиболее часто используются метод крутого восхождения по поверхности отклика, метод последовательного симплекс планирования, различные методы программирования. Эффективность применения указанных методов зависит от выполнения предпосылок и сложности оптимизируемых объектов. При решении реальных прикладных задач в системной постановке они не всегда дают хорошие результаты.

Цель статьи

Анализ применения методов оптимизации по публикациям показывает, что метод случайного поиска набросового типа с использованием ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей применяется сравнительно редко и преимущественно определенной группой исследователей. Представляется целесообразным исследовать свойства и особенности метода и привести источники, позволяющие методологически обеспечить решение реальных прикладных задач.

2. Изложение решения задачи

Предложил и разработал различные методы случайного поиска д.т.н., проф. Л.А. Растрыгин. Идея метода случайного поиска набросового типа заключается в размещении (набросе) в факторном пространстве случайных пробных точек, которые являются значениями факторов и позволяют рассчитать критерии качества оптимизируемой системы. По полученным результатам делают выводы о решении поставленной задачи: поиск экстремума, достижение поставленных условий.

Эффективность решения задачи в значительной степени зависит от равномерности расположения пробных точек в исследуемом факторном пространстве и их количества. Наиболее равномерными точками, расположенными в многомерном пространстве, являются ЛП$_\tau$ последовательности [1, с. 10, 14, 83]. Теория их построения, алгоритмы получения и свойства приведены в многочисленных работах д.ф.-м.н. И.М. Соболя [1, с. 102–106].

Последовательность точек $P_1,...,P_i,...$ называется равномерно распределенной (р.р.п.) [1, с. 10] в n-мерном кубе K^n, если для любого параллелепипеда П

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\Pi)/N = V_\Pi,$$

где $S_N(\Pi)$ – количество точек P_i с номерами $1 \le i \le N$, принадлежащими П;

V_Π – объем (n-мерный) параллелепипеда П.

Последовательность точек $P_0, P_1, ..., P_i, ...$ n-мерного куба K^n называется ЛП$_\tau$ последовательностью, если любой ее двоичный участок, содержащий не менее чем $2^{\tau+1}$ точек, представляет собой П$_\tau$-сетку [1, с. 83]. Название «ЛП$_\tau$ последовательность» образовано как сокращение фразы «последовательность, любой двоичный участок которой представляет собой П$_\tau$-сетку» [1, с. 83].

ЛП$_\tau$ равномерно распределенные последовательности характеризуются следующими замечательными свойствами: проекции N точек в k-мерном пространстве на любую $(k-j)$-мерную грань $(1 \le j \le k-1)$ многомерного единичного куба образуют также равномерно распределенные последовательности и, следовательно, содержат N проекций точек.

Оптимальность расположения точек в многомерном пространстве заключается в их равномерности в пространстве R^k. Пример такого расположения точек приведен на рис. 1 *а, б, в, г*.

Проекции точек на координатные оси обозначены метками, повернутыми в сторону точек. Анализируя расположение совокупностей точек $N_1 = 1\ldots16$, $N_2 = 17\ldots32$ и $N_3 = 33\ldots64$, можно установить, что положения их координат по каждой из осей перемежаются между указанными тремя совокупностями и равномерно расположены в каждой из совокупностей и по каждому фактору X_i.

Анализ расположения точек $N = 1\ldots64$ на всех двухмерных проекциях (рис. 1 *а, б, в*) показал, что в каждом из подынтервалов факторов X_i, равном 0,125, по каждому фактору равномерно расположены 8 точек. В каждом из квадратов размером 0,125×0,125 (или на его границе) расположена одна точка (эта закономерность нарушается только в шести квадратах). Численные значения координат указанных точек приведены в табл. 1.

Малый каталог ЛП$_\tau$ последовательностей для числа факторов $k=12$ и числа точек $N_{ЛП\tau}=128$ приведен в [2, с. 306–312].

3. Алгоритм оптимизации

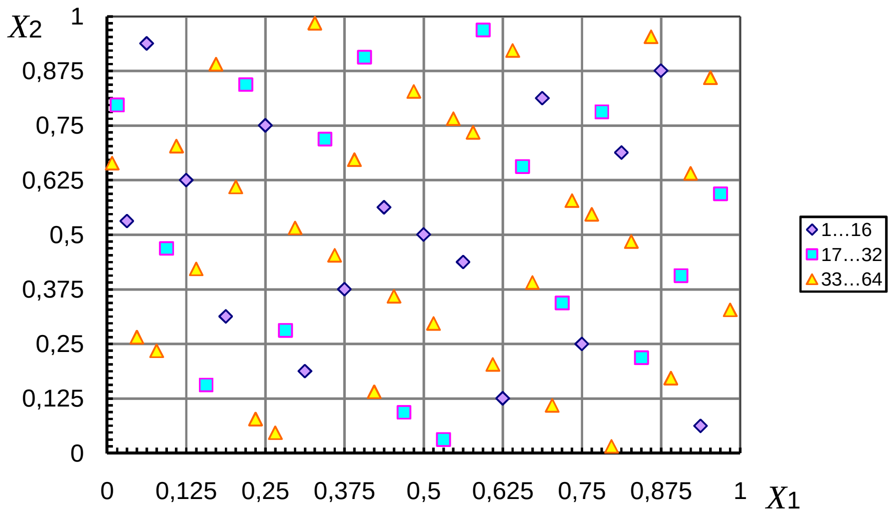
Рассмотрим прикладной алгоритм случайного поиска с использованием ЛП$_\tau$ р.р.п.

Шаг 1. Определяем интервалы, в которых меняются непрерывные факторы.

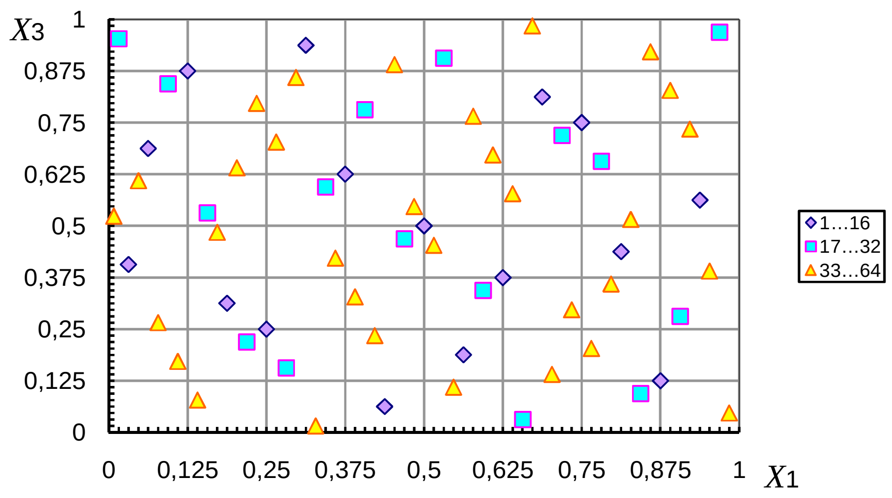
$$X_{1\min} \le X_1 \le X_{1\max}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$
$$X_{k\min} \le X_k \le X_{k\max}$$

Установление минимального и максимального значений факторов производится специалистом по предметной области.

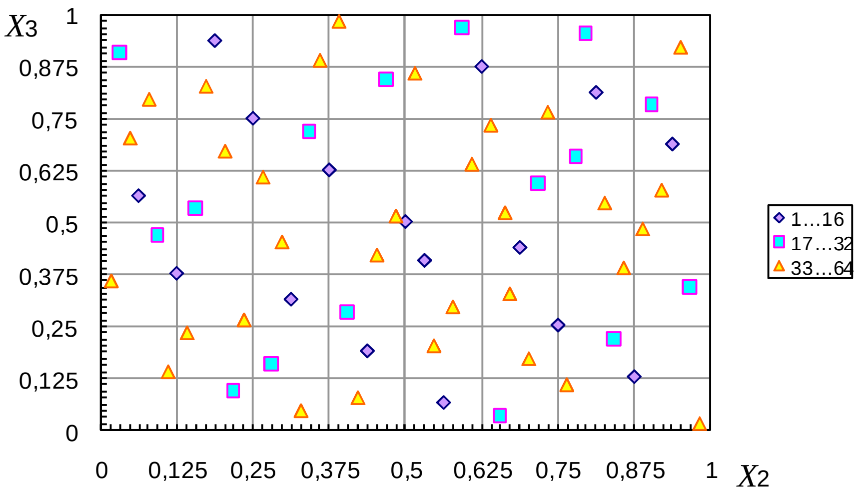
Для каждого из непрерывных факторов определяют центр плана эксперимента:



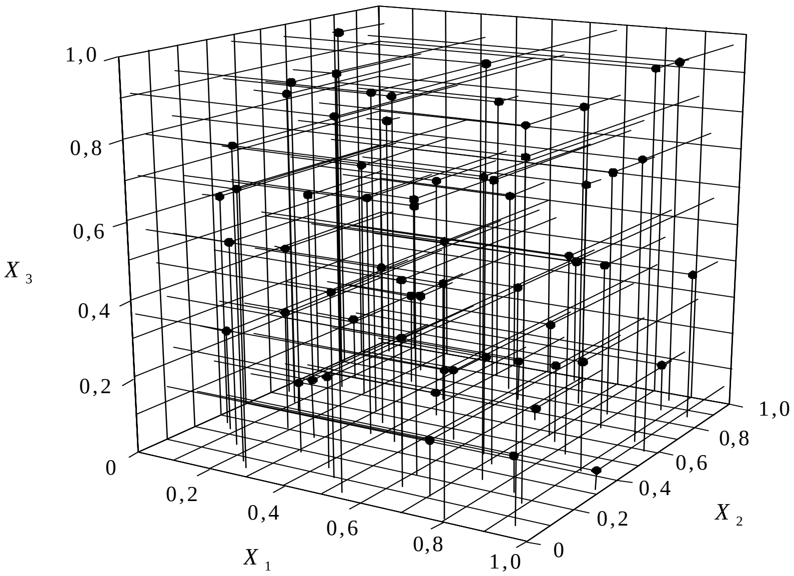
а



б



в



г

Рис. 1. Расположение точек ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей в факторных пространствах: *а* – X_1, X_2; *б* – X_1, X_3; *в* – X_2, X_3; *г* – X_1, X_2, X_3

Таблица 1. ЛП$_\tau$ равномерно распределенные последовательности для $0 \le X_1,..., X_3 \le 1$

Номер пробной точки	Значения факторов		
	$\xi_1 = X_1$	$\xi_2 = X_2$	$\xi_3 = X_3$
1	0,5	0,5	0,5
2	0,25	0,75	0,25
3	0,75	0,25	0,75
4	0,125	0,625	0,875
5	0,625	0,125	0,375
6	0,375	0,375	0,625
7	0,875	0,875	0,125
8	0,0625	0,9375	0,6875

Номер пробной точки	Значения факторов		
	$\xi_1 = X_1$	$\xi_2 = X_2$	$\xi_3 = X_3$
33	0,515625	0,296875	0,453125
34	0,265625	0,046875	0,703125
35	0,765625	0,546875	0,203125
36	0,140625	0,421875	0,078125
37	0,640625	0,921875	0,578125
38	0,390625	0,671875	0,328125
39	0,890625	0,171875	0,828125
40	0,078125	0,234375	0,265625

Продолж. табл. 1

9	0,5625	0,4375	0,1875	41	0,578125	0,734375	0,765625
10	0,3125	0,1875	0,9375	42	0,328125	0,984375	0,015625
11	0,8125	0,6875	0,4375	43	0,828125	0,484375	0,515625
12	0,1875	0,3125	0,3125	44	0,203125	0,609375	0,640625
13	0,6875	0,8125	0,8125	45	0,703125	0,109375	0,140625
14	0,4375	0,5625	0,0625	46	0,453125	0,359375	0,890625
15	0,9375	0,0625	0,5625	47	0,953125	0,859375	0,390625
16	0,03125	0,53125	0,40625	48	0,046875	0,265625	0,609375
17	0,53125	0,03125	0,90625	49	0,546875	0,765625	0,109375
18	0,28125	0,28125	0,15625	50	0,296875	0,515625	0,859375
19	0,78125	0,78125	0,65625	51	0,796875	0,015625	0,359375
20	0,15625	0,15625	0,53125	52	0,171875	0,890625	0,484375
21	0,65625	0,65625	0,03125	53	0,671875	0,390625	0,984375
22	0,40625	0,90625	0,78125	54	0,421875	0,140625	0,234375
23	0,90625	0,40625	0,28125	55	0,921875	0,640625	0,734375
24	0,09375	0,46875	0,84375	56	0,109375	0,703125	0,171875
25	0,59375	0,96875	0,34375	57	0,609375	0,203125	0,671875
26	0,34375	0,71875	0,59375	58	0,359375	0,453125	0,421875
27	0,84375	0,21875	0,09375	59	0,859375	0,953125	0,921875
28	0,21875	0,84375	0,21875	60	0,234375	0,078125	0,796875
29	0,71875	0,34375	0,71875	61	0,734375	0,578125	0,296875
30	0,46875	0,09375	0,46875	62	0,484375	0,828125	0,546875
31	0,96875	0,59375	0,96875	63	0,984375	0,328125	0,046875
32	0,015625	0,796875	0,953125	64	0,007812	0,664063	0,523438

$$X_{i0} = \frac{X_{imin} + X_{imax}}{2}; \quad 1 \le i \le k \cdot$$

Если факторы дискретные или качественные, то для них центр эксперимента не определяется.

Шаг 2. С использованием алгоритма ЛП$_\tau$ р.р.п. генерируем в единичном кубе на отрезке [0, 1] пробные точки $\xi_{iu}; \quad 1 \le i \le k; \quad 1 \le u < N_{ЛП_\tau}$. Такие последовательности являются псевдослучайными числами.

Эти числа в реальности получаем по алгоритму. Для экспериментальных исследований число $N_{ЛП_\tau}$ составляет от 8 до 32 чисел. Для вычислений исходных данных на ЭВМ $N_{ЛП_\tau}$ составляет примерно от 128 до 1024.

Шаг 3. Производят вычисления натуральных значений уровней непрерывных факторов.

$$X_{iu} = X_{i\min} + \xi_{iu}\left(X_{i\max} - X_{i\min}\right),$$

где X_{iu} – натуральное значение i-го фактора в u-том опыте матрицы плана оптимизации;

$X_{i\min}, X_{i\max}$ – минимальное и максимальное значения i-го фактора;

ξ_{iu} – значение ЛП$_\tau$ р.р.п. для i-го фактора и u-го опыта.

ЛП$_\tau$ равномерно распределенные последовательности построены для k факторов и N опытов.

Если фактор дискретный или качественный, то выбор каждого уровня для фактора представляется точками, которые попали в следующие подынтервалы:

$$\underbrace{0,\ 1/s_i}_{1};\ \underbrace{1/s_i,\ 2/s_i}_{2};\ \underbrace{...}_{...};\ \underbrace{s_i-1/s_i,\ 1}_{s_i},$$

где s_i – число уровней для i-го фактора (дискретного либо качественного).

Мы получим приближенное равномерное распределение дискретных уровней относительно остальных уровней.

Полученные результаты заносим в рабочую матрицу, где приводятся только натуральные значения уровней варьирования факторов.

Шаг 4. По рабочей матрице проводим $N_{\text{ЛП}_\tau}$ опытов.

Из всех результатов опытов выбираем 1…5 наилучших результатов. Если у нас имеется информация, что экстремум только один, то можно выбрать один результат.

Проводим анализ полученных результатов и принимаем решение об окончании или продолжении оптимизации.

Шаг 5. Если принято решение продолжать оптимизацию, то наилучший результат принимается за центр нового плана эксперимента. Выбирают новые (более узкие) интервалы варьирования факторов и проводят новую (вторую) серию оптимизации, то есть переходят на шаг 1.

Шаг 6. Анализируют результаты второй серии оптимизации и делают вывод об окончании процедуры поиска экстремума.

Конец алгоритма.

Этот метод позволяет найти глобальный экстремум.

Практика использования ЛП$_\tau$ р.р.п. показала их высокую эффективность по сравнению со случайными числами.

Пример успешной оптимизации сложной системы описан в [3, с. 28–38]. Была проведена минимизация установочной массы бортовых воздушных распределительных сетей системы охлаждения оборудования самолета АН-71. С целью оптимизации для каждого участка системы были составлены граничные условия и матрица с варьируемыми параметрами. В граничные условия в общем случае должны входить функциональные (гидравлические) и прочностные параметры. Для участка с большим гидравлическим сопротивлением оптимизация проводилась с использованием 10 факторов. Было проведено 32 гидравлических расчета, то есть $N_{\text{ЛП}_\tau}$=32. После оптимизации было получено сочетание параметров (диаметров труб), удовлетворяющих граничным условиям и имеющим вес на 8 % ниже веса данного участка при его предварительной компоновке. Для остальных участков снижение веса составило от 3 до 10 % [3, с. 37].

Преимущества, обеспечиваемые методом случайного поиска

Под эффективностью метода оптимизации будем понимать вероятность успешного решения задачи $P = 0{,}85\ldots0{,}99$ для случая получения исходных данных в экспериментах и $P = 0{,}95\ldots0{,}999$ для получения исходных данных на ЭВМ при допустимых числах исходных ЛП$_\tau$ р.р.п.

Метод случайного поиска с использованием ЛП$_\tau$ равномерно распределенных последовательностей имеет следующие преимущества.

1. При увеличении числа факторов k необходимые затраты на исследование растут пропорционально $\sqrt{k}$, тогда как для метода крутого восхождения по поверхности отклика и последовательного симплексного метода они растут пропорционально $k+1$.

2. Эффективность метода не снижается, если нельзя провести некоторые опыты вследствие ограничений по факторам и критериям качества.

3. Плохая обусловленность поверхности отклика не снижает эффективность поиска экстремума.

4. По одной серии экспериментов можно найти глобальные и локальные экстремумы как минимальные, так и максимальные.

5. По полученным результатам можно построить математическую модель с хорошими критериями качества, если выбрать ЛП$_\tau$ план эксперимента с ортогональными или слабо коррелированными между собой $\left(\left|r\left(x_i, x_j\right|<0,3\right)\right.$ факторами [4, с. 232–234].

Анализ приведенных преимуществ указывает на необходимость использования метода случайного поиска с ЛП$_\tau$ равномерно распределенными последовательностями при проведении сложных, ответственных исследований по оптимизации процессов и систем.

Изложенный метод следует также применять для поиска экстремума по математическим моделям и решения специальных вычислительных задач с моделями, содержащими несколько факторов.

Приведенный метод был применен в математическом моделировании шестикомпонентных тензометрических измерительных систем для измерения трех сил P_x, P_y, P_z и трех крутящих моментов M_x, M_y, M_z при продувке моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах [5, с. 192–197]. Предложенный метод оптимизации был использован в специальном математическом моделировании и позволил информационно исключить физические несовершенства измерительных систем, проявляющиеся в виде взаимодействий между каналами, влияния других каналов на рассматриваемый канал, нелинейностей.

Устойчивое получение многофакторных статистических моделей для нестандартных областей факторного пространства можно осуществить путем отображения прообраза факторного пространства, в котором эксперимент можно планировать наилучшим образом в образ факторного пространства, в котором факторы коррелированы между собой, а получить модели с необходимыми хорошими свойствами нельзя [2, с. 156–186; 6]. При отображении образа факторного пространства в прообраз [2, с. 163, (6.1)] используют систему нелинейных моделей:

$$\begin{cases} X_{1\text{о}} = f_{1\text{пр}}(x_{1\text{пр}}, \ldots, x_{k\text{пр}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{k\text{о}} = f_{k\text{пр}}(x_{1\text{пр}}, \ldots, x_{k\text{пр}}), \end{cases}$$

где $x_{1\text{пр}}, \ldots, x_{k\text{пр}}$ – значения координат определенной u-той точки $M_{uпр}$ в прообразе;

$X_{1o}, \ldots, X_{k\text{о}}$ – значения координат точки u-той точки M_{uo} в образе, отображенной точкой $M_{uпр}$ из прообраза;

k – число факторов.

Предполагается, что отображение точек из прообраза в образ и обратно взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Из $N_{\text{ЛП}\tau}$ пробных точек выбирают такую, для которой

$$\sum_{i=1}^{k} (X_{i\text{о}} - \hat{X}_{i\text{о}})^2 = \min \to 0,$$

где $X_{i\text{о}}$ – i-тая заданная координата точки M_{uo} в образе, отображенной точкой $M_{uпр}$ из прообраза; $1 \le i \le k$;

$\hat{X}_{io}$ – i-тая координата точки M_{uo} в образе, посчитанная для значения координат точки $M_{u\text{ЛП}\tau}$ в прообразе; $1 \le u \le N_{\text{ЛП}\tau}$.

Значения координат $M_{u(\cdot)}$ точки в образе и прообразе не содержат систематических и случайных погрешностей.

Найденные координаты в первой серии поиска при необходимости уточняются во второй серии, приняв найденное в первой серии лучшее значение за центр нового плана эксперимента.

Оптимизация сложных систем с использованием принципа компромисса по Парето

Будем предполагать, что сложные системы характеризуются следующими основными критериями качества: $y_1(C)$ – себестоимость единицы производимой работы, $y_2(\Pi)$ – производительность процесса работы, $y_3(K)$ – качество производимой работы, $\Delta Y = f(\Delta C, \Delta\Pi, \Delta K)$ (рис. 2, 3).

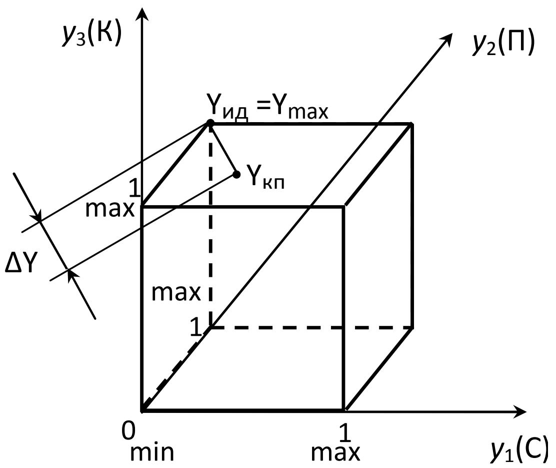


Рис. 2. Пространство критериев качества системы

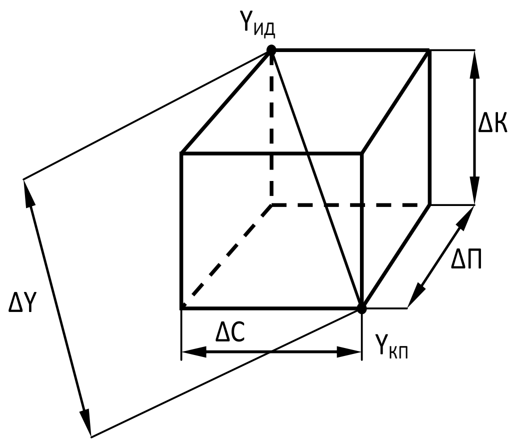


Рис. 3. Пространство потерь критериев качества системы

В пространстве сравниваемых критериев качества будем изображать значения y_1, y_2, y_3 для различных сравниваемых объектов одного класса (режимов).

Критерии качества будем нормировать.

$$y_{j\text{н}} = \frac{y_j - y_{j\min}}{y_{j\max} - y_{j\min}},$$

$$0 \le y_{j\text{н}} \le 1,$$

$$1 \le j \le m,$$

где m – общее число критериев качества.

К критериям качества предъявляются требования:

$$y_1(\text{С}) = \min,$$
$$y_2(\text{П}) = \max,$$
$$y_3(\text{К}) \to \max.$$
$$y_{3\min} \le y_3 \le y_{3\max},$$
$$\left(y_{3\text{ср}} - y_3\right)^2 \to \min.$$

Любые другие требования к y можно свести к экстремальным (рис. 3).

$$\Delta\text{Y} = \text{Y}_{\text{ИД}} - \text{Y}_{\text{КП}} = \sqrt{\Delta\text{С}^2 + \Delta\text{П}^2 + \Delta\text{К}^2} \to \min,$$

где ΔY – значение потери критериев качества системы при компромиссном подходе;
$\text{Y}_{\text{ИД}}$ – идеальное значение критериев качества;
$\text{Y}_{\text{КП}}$ – критерий качества по компромиссу по Парето.

Для определения оптимальных компромиссных условий по многим критериям качества получаем исходную информацию для определенных точек факторного пространства. Ищем точку, близкую к идеальной, то есть недостижимой. Каждую точку просчитываем в нормированной системе координат. Выбираем $\Delta\text{Y}_{\min}$ по потерям, тогда наша точка будет как можно ближе к компромиссу по Парето. Поэтому получаем устойчивую схему решения задачи.

4. Выводы

1. Приведенный метод оптимизации является максимально устойчивым, так как не требует выполнения каких-либо условий относительно свойств поверхностей оптимизируемых критериев качества и свойств факторов.
2. Метод позволяет определять корни уравнений для нескольких факторов без проведения специальных преобразований уравнений, что затруднительно и не всегда возможно.
3. Изложенный метод случайного поиска набросового типа с использованием ЛПτ равномерно распределенных последовательностей позволяет эффективно решать многофакторные задачи многокритериальной оптимизации и в случае необходимости получать статистические модели

С разработанными методами решения задач и полученными результатами можно ознакомиться в [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М.: Наука, 1981. – 111 с.
2. Радченко С.Г. Методология регрессионного анализа / Радченко С.Г. – К.: «Корнійчук», 2011. – 376 с.
3. Шмырев В.Ф. Метод оптимизации массовых характеристик воздушных распределительных сетей бортовых энергетических систем / В.Ф. Шмырев, В.Я. Кондращенко, С.Г. Радченко // Зб. наук. праць ін-ту проблем моделювання в енергетиці. – К.: ПМЕ НАН України, 1998. – Вип. 4. – С. 28 – 38.
4. Радченко С.Г. Планы экспериментов многоцелевого назначения / С.Г. Радченко // Дев'ята міжнар. наук.-практ. конф. «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2014»: тези доп., (Київ-Жукин, 23–27 черв. 2014 р.). – Чернігів: ЧДІЕУ, 2014. – С. 232 – 234.
5. Радченко С.Г. Математическое моделирование технологических процессов в машиностроении / Радченко С.Г. – К.: ЗАО «Укрспецмонтажпроект», 1998. – 274 с.

6. Радченко С.Г. Устойчивые методы оценивания статистических моделей / Радченко С.Г. – К.: ПП «Санспарель», 2005. – 504 с.
7. Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.n-t.org/sp/lesmi.
8. Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publications/.

Стаття надійшла до редакції 03.09.2014