

УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ\*

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

\*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

**Анотація.** Досліджені порушення статистичної стійкості випадкових процесів по відношенню до середнього і середньоквадратичного відхилення (СКВ). Отримані залежності, що зв'язують параметри статистичної нестійкості по відношенню до середнього та СКВ з кореляційним моментом випадкового процесу. Для випадкового процесу, спектральна щільність міцності якого описується степеневою функцією, з'ясовані умови порушення статистичної стійкості.

**Ключові слова:** статистична стійкість, параметр статистичної нестійкості, теорія гіпервипадкових явищ.

**Аннотация.** Исследованы нарушения статистической устойчивости случайных процессов по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению (СКО). Получены зависимости, связывающие параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему и СКО с корреляционным моментом случайного процесса. Для случайного процесса, спектральная плотность мощности которого описывается степенной функцией, выяснены условия нарушения статистической устойчивости.

**Ключевые слова:** статистическая устойчивость, параметр статистической неустойчивости, теория гиперслучайных явлений.

**Abstract.** The violations of statistical stability of random processes with respect to the average and standard deviation (SD) are investigated. The dependencies between the parameters of the statistical instability with respect to the average and SD with the correlation moment of the random process are obtained. For a random process, power spectral density of which is described by a power function, the conditions of violation of statistical stability are clarified.

**Keywords:** statistical stability, parameter of statistical instability, theory of hyper-random phenomena.

## 1. Введение

Удивительным свойством реальных массовых явлений (событий, величин и процессов) является их статистическая устойчивость, проявляющаяся в стабильности статистик.

На заре зарождения теории вероятностей феномен статистической устойчивости воспринимался с недоверием, многократно проверялся и перепроверялся. Однако множество экспериментальных исследований, проведенных на протяжении столетий, убедили ученых в объективном существовании этого физического феномена и привели к построению разветвленной теории вероятностей, широко используемой в настоящее время на практике.

Современная теория вероятностей (включающая в широком понимании и математическую статистику) описывает массовые явления с помощью случайных (стохастических) математических моделей, характеризующихся вероятностной мерой. В основе построения таких моделей лежит физическая гипотеза идеальной статистической устойчивости, предполагающая наличие сходимости частоты реальных событий и средних значений физических величин.

Вопрос существования феномена статистической устойчивости уже не вызывает дискуссий, однако гипотеза идеальной статистической устойчивости реальных явлений представляется спорной.

Последние исследования различных физических величин и процессов на больших интервалах наблюдения показали, что сомнения не беспочвенны: гипотеза идеальной статистической устойчивости не находит экспериментального подтверждения [1, 2].

На относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема данных приводит к уменьшению уровня флуктуаций статистик. Однако при больших объемах эта тенденция не прослеживается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не меняется или возрастает. Это указывает на отсутствие сходимости реальных статистик (их несостоятельность).

Под статистической устойчивостью обычно подразумевают статистическую устойчивость определенной статистики или определенного класса статистик [3]. В физико-математической теории гиперслучайных явлений [1, 4], разработанной в интересах учета нарушений статистической устойчивости, под статистической устойчивостью в узком смысле понимается сходимость эмпирической функции распределения, а под статистической устойчивостью в широком смысле – сходимость выборочного среднего и выборочного среднеквадратического отклонения (СКО).

При решении практических задач обычно не важен характер поведения явления на бесконечно большом интервале наблюдения, хотя именно этот показатель заложен в основу формального определения понятия статистической устойчивости. Более существенен характер поведения явления на рассматриваемых интервалах наблюдения: наличие определенной тенденции, указывающей на нарушение или отсутствие нарушения статистической устойчивости. Если на интервале наблюдения тенденция нарушения статистической устойчивости не обнаруживается, явление можно считать статистически устойчивым, в противном же случае – статистически неустойчивым.

Разные статистики и разные явления, как правило, имеют разные интервалы статистической устойчивости.

Если интервал наблюдения не превышает интервалы статистической устойчивости используемых статистик, возможно корректное использование классических вероятностно-статистических методов обработки; если же интервал наблюдения превышает интервалы статистической устойчивости, приходится использовать другие методы, в частности, методы упомянутой теории гиперслучайных явлений.

Феномен статистической устойчивости формально не связан с существованием вероятностной меры [1]. Поэтому не только случайные явления, имеющие вероятностную меру, могут быть статистически неустойчивыми. Исследования показали, что некоторые детерминированные процессы оказываются статистически неустойчивыми. Среди нестационарных процессов встречаются как статистически устойчивые, так и неустойчивые процессы. Статистически неустойчивые случайные процессы не обязательно нестационарные. Существуют случайные процессы, стационарные в узком смысле и статистически неустойчивые в широком смысле.

В настоящее время для ряда реальных процессов экспериментально и для различных случайных моделей теоретически выяснены условия нарушения статистической устойчивости. Установлено [1, 2, 5], что статистическая устойчивость случайного процесса по отношению к среднему определяется зависимостью его спектральной плотности мощности (СПМ)  $S(f)$  от частоты  $f$ . В указанных работах получены асимптотические формулы, связывающие параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему с СПМ процесса.

Показано, что в частном случае, когда СПМ описывается степенной зависимостью  $S(f) = 1/f^\beta$  (где  $\beta$  – параметр формы спектра), случайный процесс статистически устой-

чивый по отношению к среднему, если параметр  $\beta < 1$ , и статистически неустойчивый, если  $\beta \geq 1$ .

К сожалению, упомянутые формулы, полученные на основе спектрального подхода, не всегда обеспечивают на ограниченном интервале наблюдения высокую точность оценивания статистической устойчивости по отношению к среднему. Кроме того, до сих пор не установлена связь между статистической устойчивостью случайного процесса по отношению к СКО с параметрами и характеристиками процесса.

Целью настоящей статьи является повышение точности описания на ограниченном интервале наблюдения статистической устойчивости случайных процессов по отношению к среднему, а также получение формул, связывающих параметр статистической неустойчивости случайного процесса по отношению к СКО с характеристиками процесса.

При выборе пути решения задачи обращено внимание, что для стационарного (в широком смысле) случайного процесса СПМ однозначно определяет корреляционную функцию процесса, а для нестационарного случайного процесса – среднюю корреляционную функцию [1]. Поэтому очевидно, что существует связь между статистической устойчивостью процесса по отношению к среднему и его корреляционными характеристиками. Менее очевидным, но вполне возможным, представляется наличие связи между статистической устойчивостью процесса по отношению к СКО и его корреляционными характеристиками. Эти соображения послужили отправной точкой для решения поставленной задачи.

## 2. Исходные положения

Рассмотрим случайный процесс  $X(t)$ , представляемый последовательностью случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Согласно [1], процесс считается статистически устойчивым по отношению к среднему, если при устремлении объема выборки  $N$  к бесконечности параметр статистической неустойчивости

$$\gamma_N = \frac{M[\bar{D}_{Y_N}]}{M[\bar{D}_{X_N}]} \quad (1)$$

стремится к нулю.

Аналогично, случайный процесс считается статистически устойчивым по отношению к СКО, если при  $N \rightarrow \infty$  стремится к нулю параметр статистической неустойчивости

$$\Gamma_N = \frac{M[\bar{D}_{Z_N}]}{M[\bar{D}_{X_N}]} \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2)  $M[\cdot]$  – оператор математического ожидания,

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2 \quad (3)$$

– выборочная дисперсия флуктуации выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = \overline{1, N}), \quad (4)$$

$\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$  – выборочное среднее флуктуации среднего,

$$\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_i - Y_N)^2 \quad (5)$$

– выборочная дисперсия процесса,

$$\bar{D}_{Z_N} = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N (Z_n - \bar{m}_{Z_N})^2 \quad (6)$$

– выборочная дисперсия флуктуации выборочного СКО

$$Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}), \quad (7)$$

$$\bar{m}_{Z_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N Z_n \text{ – среднее флуктуации выборочного СКО.}$$

Процессы, у которых параметры статистической неустойчивости  $\gamma_N$  и  $\Gamma_N$  не стремятся к нулю, считаются статистически неустойчивыми соответственно по отношению к среднему и СКО.

Процессы, у которых оба параметра статистической неустойчивости  $\gamma_N$  и  $\Gamma_N$  стремятся к нулю, называются статистически устойчивыми в широком смысле, а у которых хотя бы один из этих параметров не стремится к нулю, – статистически неустойчивыми в широком смысле.

Заметим, что если реальный процесс носит неслучайный характер, для оценки нарушений статистической устойчивости также могут быть использованы параметры статистической неустойчивости, описываемые формулами (1) и (2). Для корректного их применения в этом случае под оператором  $M[\cdot]$  следует понимать усреднение по ансамблю, конечному или бесконечному. В вырожденном случае усреднение по ансамблю может отсутствовать.

На практике объем данных всегда ограничен, а потому объем выборки  $N$  и ансамбль реализаций конечны. Тогда принятие решения о наличии или отсутствии нарушений статистической устойчивости возможно на основе анализа тенденции изменения оценок параметров  $\gamma_N^*$  и  $\Gamma_N^*$  при больших значениях  $N$  или на основе сопоставления значений этих оценок со значением  $\gamma_{0N}$  параметра  $\gamma_N$ , рассчитанного для эталонного статистически устойчивого процесса.

В качестве эталона удобно использовать белый гауссовский шум<sup>1</sup>. Для него рассчитаны [1] параметр  $\gamma_{0N}$  и СКО  $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$  величины  $\tilde{\gamma}_{0N} = \bar{D}_{Y_N} / M[\bar{D}_{X_N}]$ . По этим параметрам нетрудно рассчитать верхнюю границу  $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + k\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$  коридора параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему ( $k$  – параметр, определяющий ширину коридора). Выход оценок параметров статистической неустойчивости  $\gamma_N^*$  и  $\Gamma_N^*$  за верхнюю границу коридора указывает на нарушение статистической устойчивости соответственно по отношению к среднему и СКО.

По величине оценок параметров статистической неустойчивости (разных процессов или разных параметров) при одинаковом объеме выборки  $N$  можно судить, какой из параметров более, а какой – менее устойчив.

<sup>1</sup> Для корректного использования этого эталона период дискретизации исследуемого процесса должен быть равен интервалу его корреляции.

### 3. Параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему

Докажем следующую теорему.

*Теорема 1.* Пусть случайный процесс, представляемый последовательностью  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , имеет нулевое математическое ожидание и конечные моменты второго порядка. Тогда при  $N \rightarrow \infty$  параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему

$$\gamma_N = \frac{1}{N(q_N - Q_N)} \sum_{n=1}^N Q_n, \quad (8)$$

где

$$q_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M[X_i^2] \quad (9)$$

– средняя дисперсия элементов последовательности, равная нормированному на объем выборки  $N$  следу корреляционного момента  $K_N(i, j) = M[X_i X_j]$ ,

$$Q_n = M[Y_n^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[X_i X_j] \quad (10)$$

– математическое ожидание квадрата среднего начального фрагмента последовательности, равное среднему корреляционных моментов  $K_n(i, j) = M[X_i X_j]$  этого фрагмента.

Доказательство базируется на анализе числителя и знаменателя дроби выражения (1). Знаменатель можно записать следующим образом:

$$M[\bar{D}_{X_N}] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N M[X_n^2] - \frac{N}{N-1} M[Y_N^2].$$

Подставляя формулу, описывающую среднее, получим

$$M[\bar{D}_{X_N}] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N M[X_n^2] - \frac{N}{N-1} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M[X_i X_j].$$

Принимая во внимание соотношения (9), (10), найдем

$$M[\bar{D}_{X_N}] = \frac{N}{N-1} (q_N - Q_N). \quad (11)$$

Числитель выражения (1) можно записать в виде

$$M[\bar{D}_{Y_N}] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - \frac{N}{N-1} M[\bar{m}_{Y_N}^2]. \quad (12)$$

Известно, что даже в том случае, когда не существует предела выборочного среднего и не существует предела среднего математических ожиданий, действует закон больших чисел [1]: разность между выборочным средним и средним математических ожиданий стремится к нулю. На этом основании при  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N M[Y_n] \text{ и } M[\bar{m}_{Y_N}^2] = M\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n\right)^2\right] = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N M[Y_n]\right)^2 = 0.$$

Тогда, раскрывая круглые скобки в выражении (12), получим неравенство

$$M[\bar{D}_{Y_N}] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[X_i X_j].$$

Учитывая равенство (10), найдем

$$M[\bar{D}_{Y_N}] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N Q_n. \quad (13)$$

С учетом выражений (1), (11), (13) приходим к равенству (8).

#### 4. Нижняя граница параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО

Получить в компактном виде полезное для анализа выражение, аналогичное выражению (8) для параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО, оказывается затруднительным. Однако можно получить выражение, описывающее нижнюю границу указанного параметра. Оно определяется следующей теоремой.

*Теорема 2.* Пусть случайный процесс, представляемый последовательностью  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , имеет нулевое математическое ожидание и конечные моменты второго порядка. Тогда при  $N \rightarrow \infty$  параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N$  удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Gamma_N \geq \frac{1}{N(N-2)(q_N - Q_N)} \left[ (N-1) \sum_{n=2}^N \frac{n}{n-1} (q_n - Q_n) - \left( \sum_{k=2}^N \sqrt{\frac{k}{k-1}} (q_k - Q_k) \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Поскольку при  $N \rightarrow \infty$  разность между выборочным средним и средним математических ожиданий стремится к нулю, то при  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N Z_n = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N M[Z_n].$$

$$\text{Тогда } M[\bar{m}_{Z_N}^2] = M \left[ \left( \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N Z_n \right)^2 \right] = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N M[Z_n] \right)^2.$$

При  $N \rightarrow \infty$  с учетом выражения (6) числитель выражения (2) можно представить следующим образом:

$$M[\bar{D}_{Z_N}] = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N M[Z_n^2] - \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( \sum_{k=2}^N M[Z_k] \right)^2.$$

Принимая во внимание соотношение (7), получим

$$M[\bar{D}_{Z_N}] = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - \frac{n}{n-1} M[Y_n^2] \right) - \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( \sum_{k=2}^N M \left[ \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - Y_k)^2} \right] \right)^2. \quad (15)$$

Функция извлечения квадратного корня – выпуклая вверх функция и поэтому в соответствии с неравенством Йенсена  $M \left[ \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - Y_k)^2} \right] \leq \sqrt{\frac{1}{k-1} M \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - Y_k)^2 \right]}$ . Тогда

$$M[\bar{D}_{Z_N}] \geq \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - \frac{n}{n-1} M[Y_n^2] \right) - \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( \sum_{k=2}^N \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k M[X_i^2] - \frac{k}{k-1} M[Y_k^2]} \right)^2.$$

Учитывая соотношения (9), (10), перепишем полученное неравенство в виде

$$M[\bar{D}_{Z_N}] \geq \frac{1}{N-2} \left[ \sum_{n=2}^N \frac{n}{n-1} (q_n - Q_n) - \frac{1}{(N-1)} \left( \sum_{k=2}^N \sqrt{\frac{k}{k-1} (q_k - Q_k)} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

С учетом равенств (2), (11), (16) получаем неравенство (14).

## 5. Моделирование

Для проверки корректности формул (8), (14) проведены компьютерное моделирование и расчеты по полученным формулам (рис. 1–2). Результаты моделирования и вычислений сопоставлены с известными результатами.

Для моделирования и расчетов использовался шумовой гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности, описываемой степенной функцией  $S(f) = 1/f^\beta$  при различных значениях параметра формы спектра  $\beta$ .

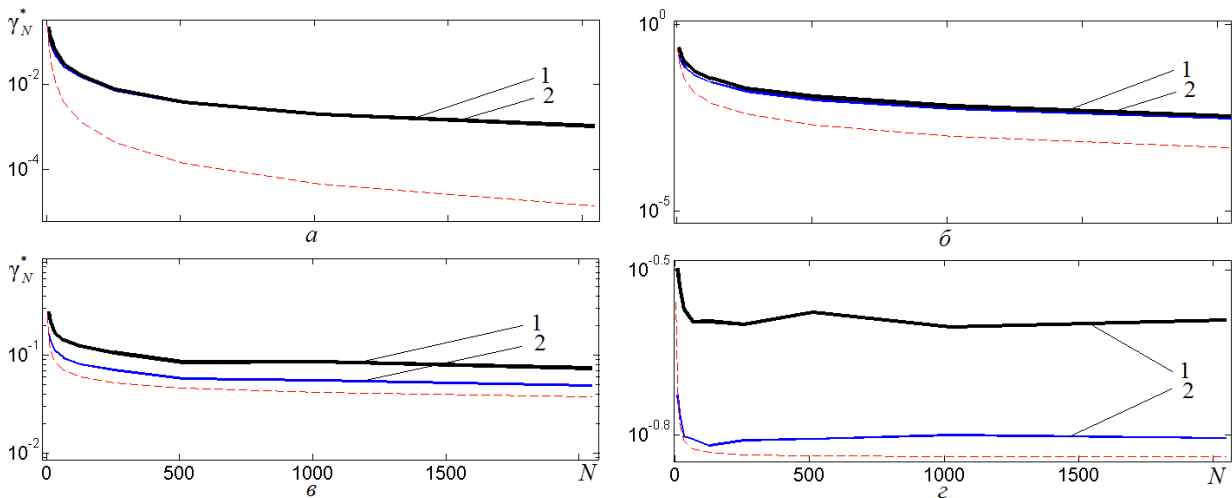


Рис. 1. Оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N^*$  для случайного процесса, описываемого степенной СПМ с параметром формы спектра  $\beta = -1, 0, 1, 2$  (соответственно  $a-z$ ). Количество реализаций, использованных при моделировании, равно 512

Результаты, рассчитанные по формуле (8) и с использованием правой части формулы (14), изображены соответственно на рис. 1–2 полужирными сплошными линиями 1, а полученные путем моделирования – полужирными сплошными линиями 2. Для сравнения тонкими пунктирными линиями на рис. 1–2 приведены результаты расчета параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему, полученные с использованием асимптотической формулы [1]:

$$\gamma_N \approx \frac{\sum_{nk=2}^{N/2} (k-1)^{-(\beta+2)} \left[ \frac{\pi^2}{4} + C + \ln(2\pi(k-1))^2 \right]}{4\pi^2 \sum_{k=2}^{N/2} (k-1)^{-\beta}}, \quad (17)$$

где  $C$  – постоянная Эйлера – Маскерони ( $C \approx 0,577216$ ).

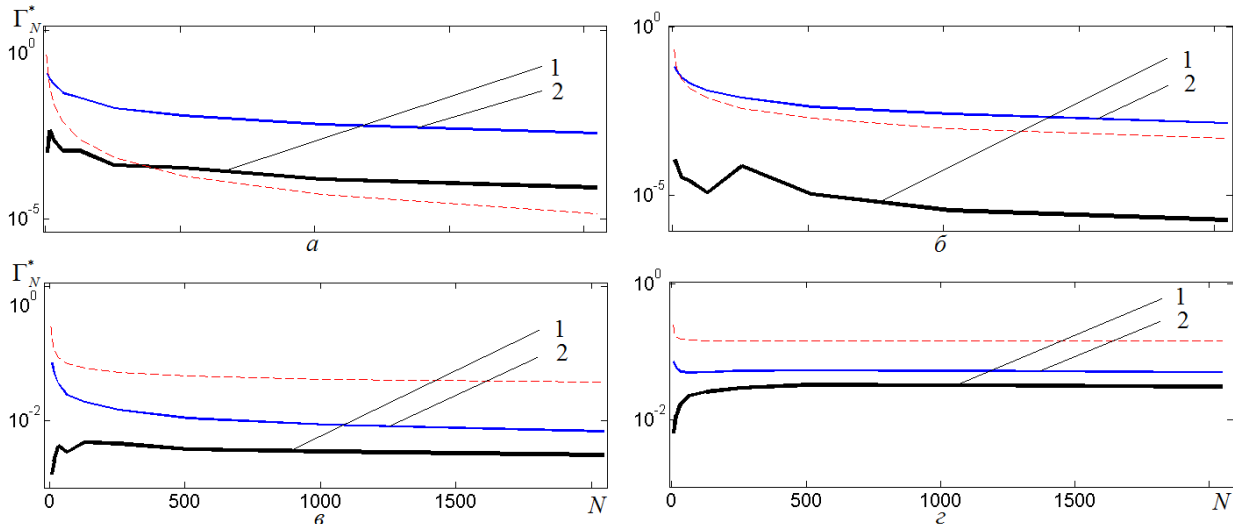


Рис. 2. Оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N^*$  для случайного процесса, описываемого степенной СПМ с параметром формы спектра  $\beta = -1, 0, 1, 2$  (соответственно  $a-z$ ). Количество реализаций, использованных при моделировании, равно 512

Оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N^*$ , полученные путем моделирования и расчетов по формуле (8) (рис. 1), подтверждают, что случайный процесс, СПМ которого описывается степенной функцией, статистически устойчив по отношению к среднему при  $\beta < 1$  и статистически неустойчив при  $\beta \geq 1$ .

Более детальный анализ полученных графиков показывает, что для параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему при значениях параметра формы  $\beta \leq 0$  кривая моделирования и кривая, рассчитанная по формуле (8), практически совпадают между собой и заметно отличаются от кривой, полученной по формуле (17) (рис. 1а, б). При других же значениях этого параметра ( $\beta > 0$ ) наблюдается (рис. 1в, г) отличие между всеми тремя кривыми: кривая, рассчитанная по формуле (8), проходит над кривой моделирования, а последняя – над кривой, полученной по формуле (17). При этом кривая моделирования находится вблизи кривой, рассчитанной по формуле (17).

Эти результаты указывают на то, что при  $\beta \leq 0$  более точной оказывается оценка параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему, рассчитанная по формуле (8), а при  $\beta > 0$  – по формуле (17).

Оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N^*$ , полученные путем моделирования и расчетов нижней границы с использованием правой части неравенства (14) (рис. 2), указывают на то, что случайный процесс, СПМ которого описывается степенной функцией, статистически устойчив по отношению к СКО при  $\beta < 1$  и статистически неустойчив при  $\beta \geq 1$ .

Кривая моделирования для параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО, кривая, полученная с использованием правой части неравенства (14), и кривая,



рассчитанная по формуле (17) для параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему, отличаются друг от друга при любом значении параметра  $\beta$  (рис. 2). При  $\beta \leq 0$  кривая, соответствующая параметру статистической неустойчивости по отношению к среднему, проходит под кривой моделирования для параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО ( $\gamma_N^* < \Gamma_N^*$ ), а при  $\beta > 0$  располагается выше нее ( $\gamma_N^* > \Gamma_N^*$ ). Это обстоятельство указывает на то, что при  $\beta \leq 0$  процесс менее устойчив по отношению к СКО, чем по отношению к среднему, а при  $\beta > 0$ , наоборот.

Моделирование показывает (рис. 3), что этот эффект вызван качественной сменой в точке  $\beta = 0$  характера корреляционных связей между элементами выборки: при  $\beta \leq 0$  элементы выборки практически некоррелированные или отрицательно коррелированные, а при  $\beta > 0$  – положительно коррелированные.

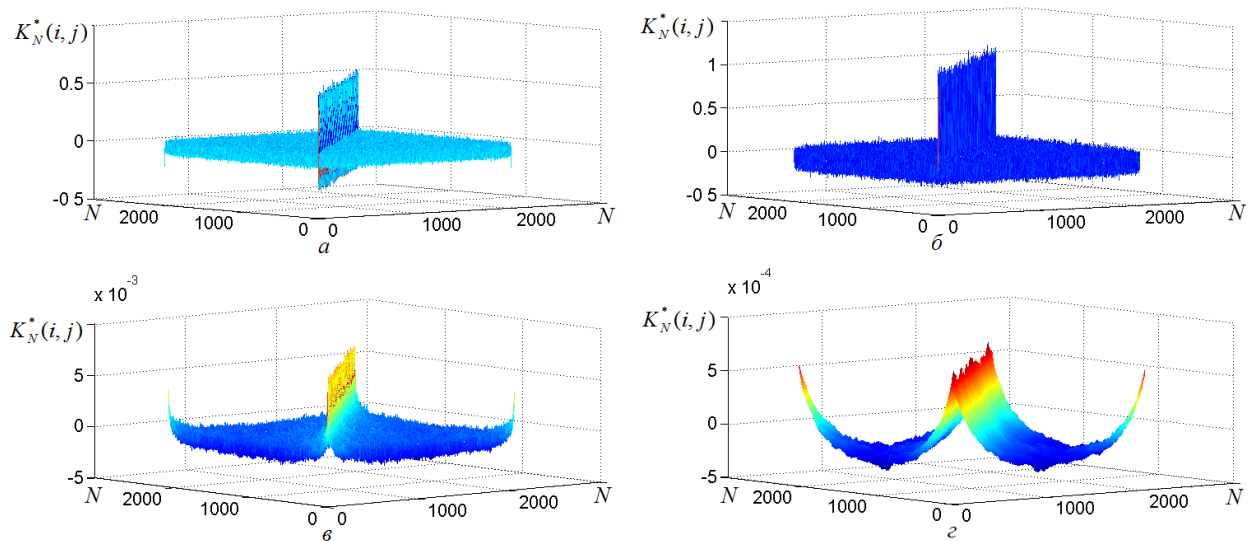


Рис. 3. Оценка корреляционного момента для случайного процесса, описываемого степенной СПМ с параметром формы спектра  $\beta = -1, 0, 1, 2$  (соответственно  $a-z$ ). Количество реализаций, использованных при вычислении оценки, равно 2048

Кривая, полученная с использованием правой части неравенства (14), близка к соответствующей кривой моделирования (рис. 2), что свидетельствует о возможности использования этого неравенства для оценки нарушений статистической устойчивости случайных процессов по отношению к СКО.

## 6. Сравнение с результатами экспериментальных исследований

Зависимость знака разности  $\Gamma_N - \gamma_N$  от спектрально-корреляционных особенностей процесса подтверждается результатами экспериментальных исследований.

Например, в монографии [1] приведены результаты оценки параметров статистической неустойчивости и СПМ для астрофизических источников рентгеновского излучения, в частности, пульсара PSR J1012+5307 (рис. 4) и источника GRS 1915+105 (рис. 5).

На рис. 4а и 5а для этих источников тонкими сплошными линиями изображены оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N^*$ , а полужирными сплошными линиями – оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N^*$ .

Пунктирными линиями представлен параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему для эталонного статистически устойчивого белого гауссовского шума, а точечными – верхняя граница коридора статистической устойчивости  $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + \sigma_{\tilde{\gamma}_0}$ .

Сплошными линиями на рис. 4б и 5б изображена СПМ излучения этих источников. Для сравнения пунктирными линиями представлены сдвинутые вдоль оси ординат до уровня первого отсчета спектров графики степенных функций  $1/f^\beta$ ,  $\beta = \overline{1,4}$ .

Из рис. 4а и рис. 5а видно, что для пульсара PSR J1012+5307 практически на всем интервале наблюдения справедливо неравенство  $\gamma_N^* < \Gamma_N^*$ , а для источника GRS 1915+105 – неравенство  $\gamma_N^* > \Gamma_N^*$ . Этот результат можно объяснить разным характером спектра: шум пульсара PSR J1012+5307 близок к некоррелированному белому шуму (рис. 4б), а источника GRS 1915+105 – к сильно коррелированному шуму, СПМ которого меняется с частотой  $f$  по закону примерно  $1/f^3$  (рис. 5б).

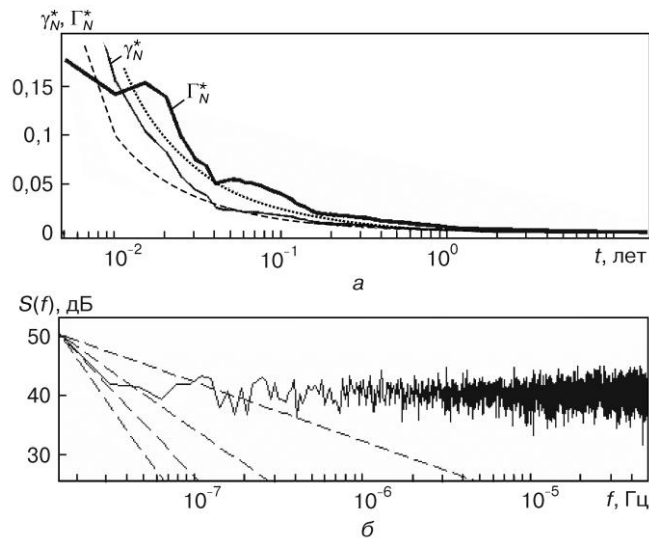


Рис. 4. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N^*$  и к СКО  $\Gamma_N^*$  для пульсара PSR J1012+5307 (а) и соответствующий спектр излучения (б)

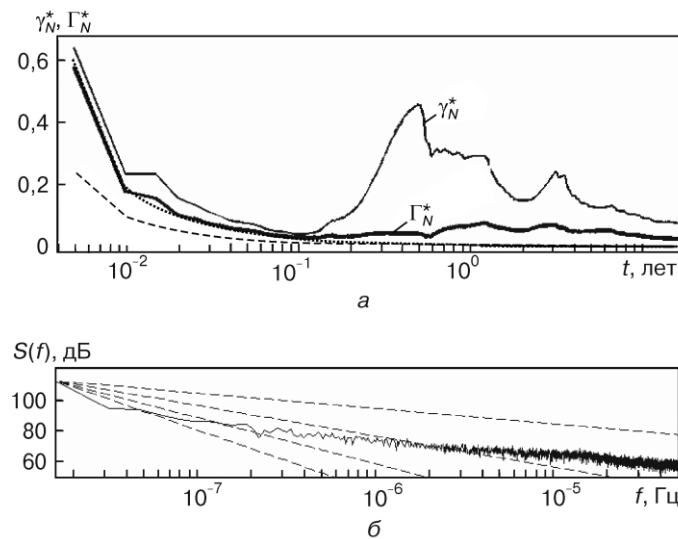


Рис. 5. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N^*$  и к СКО  $\Gamma_N^*$  для источника излучения GRS 1915+105 (а) и соответствующий спектр излучения (б)

## 7. Случайные процессы со степенной СПМ

Многие случайные процессы описываются степенной СПМ. К ним относятся, в частности [1, 2], цветные шумы (фиолетовый (при  $\beta = -2$ ), синий (при  $\beta = -1$ ), белый (при  $\beta = 0$ ), розовый (при  $\beta = 1$ ), коричневый (при  $\beta = 2$ ), черный (при  $\beta > 2$ )), фликкер-шум (при  $\beta > 0$ ) [6–10], фрактальный гауссовский шум (при  $-1 < \beta < 1$ ) [11–13], стационарные процессы (при  $0 \leq \beta < 1$ ) и нестационарные процессы (при  $\beta < 0$  и  $\beta \geq 1$ ).

Из приведенных результатов исследования следует, что статистически устойчивыми как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО (то есть статистически устойчивыми в широком смысле), являются:

- фиолетовый, синий и белый шумы;
- фликкер-шум с параметром  $0 < \beta < 1$ ;
- стационарные процессы со степенной СПМ;
- нестационарные процессы со степенной СПМ и параметром  $\beta < 0$ .

Статистически неустойчивыми как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО (то есть статистически неустойчивыми в широком смысле), являются:

- розовый, коричневый и черный шумы;
- фликкер-шум с параметром  $\beta \geq 1$ ;
- нестационарные процессы со степенной СПМ и параметром  $\beta \geq 1$ .

## 8. Выводы

1. Получено асимптотическое выражение, связывающее параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N$  с корреляционным моментом случайного процесса (теорема 1).
2. Получено асимптотическое выражение, связывающее нижнюю границу параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N$  с корреляционным моментом случайного процесса (теорема 2).
3. Установлено, что процессы, описываемые степенной спектральной плотностью мощности с параметром формы спектра  $\beta < 1$ , статистически устойчивы как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО (то есть статистически устойчивы в широком смысле), а с параметром формы спектра  $\beta \geq 1$  – статистически неустойчивы.
4. Установлено, что для случайного процесса, описываемого степенной спектральной плотностью мощности, параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему  $\gamma_N$  меньше параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $\Gamma_N$  ( $\gamma_N < \Gamma_N$ ), если параметр формы спектра  $\beta \leq 0$  (процесс слабо или отрицательно коррелированный), и больше параметра  $\Gamma_N$  ( $\gamma_N > \Gamma_N$ ), если параметр  $\beta > 0$  (процесс положительно коррелированный).
5. Результаты теоретических исследований подтверждены моделированием и сравнением с результатами экспериментальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: [http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban\\_i\\_i/index.html](http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).
2. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.

3. Горбань И.И. Критерии и параметры статистической неустойчивости / И.И. Горбань // Математичні машини і системи – 2012. – № 4. – С. 106 – 114.
4. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: [http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban\\_i\\_i/index.html](http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).
5. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.
6. Johnson J.B. // Phys. Rev. – 1925. – Vol. 26. – P. 71.
7. Schottky W. // Phys. Rev. – 1926. – Vol. 28, N 7. – P. 74.
8. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа  $1/f$  в твердых телах / Ш.М. Коган // Успехи физических наук. – 1985. – Т. 145, Вып. 2. – С. 285 – 325.
9. Жигальский Г.П. Неравновесный  $1/f^\gamma$ -шум в проводящих пленках и контактах / Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 5. – С. 465 – 490.
10. Gagnepain J.J. Proc. of Symposium on  $1/f$  Fluctuations / J.J. Gagnepain, J. Uebersfeld, T. Musha (ed.). – Токуо, 1977. – P. 173.
11. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Кроновер Р.М. – М.: Постмаркет, 2000. – 349 с.
12. Mishura Y. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes / Mishura Y. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 393 p.
13. Wornell G.W. Fractal Signals / G.W. Wornell // Digital Signal Processing / Ed. Vijay K. Madisetti and Douglas B. Williams. – Boca Ration: CRC Press LLC, 1999. – 450 p.

*Стаття надійшла до редакції 14.07.2015*