

КЛАСТЕРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА СИСТЕМЕ ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Б.Е. Панченко, И.Н. Сайко

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
Киев, проспект Академика Глушкова, 40.
Тел.: (044) 526 3603, e-mail: Igor_Sayko@mail.ru

Исследован параллельный алгоритм высокоточного решения задачи дифракции упругих волн на системе жестких включений некруговой формы. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений, которая решается численно. Параллельный алгоритм позволил исследовать ситуацию с большим количеством жестких включений. Приведены зависимости напряжений на границе неоднородностей от динамических и геометрических характеристик. Получены новые результаты.

Investigated parallel algorithm for solving the problem of high-precision diffraction of elastic waves by a system of rigid inclusions non-circular shape. The problem is reduced to solving a system of singular integral equations which is solved numerically. Parallel algorithm allowed us to investigate the situation with a lot of hard inclusions. Shows the dependence of the stress on the boundary irregularities on the dynamic and geometric characteristics. New results are obtained.

Введение

Задачи о динамической концентрации напряжений на системах жестких включениях некруговой цилиндрической формы исследованы мало. В этой сфере было исследовано несколько схожих задач [1, 2]. В случае неоднородностей сложной геометрической формы эффективно работает метод интегральных уравнений [3]. В [4] этим методом исследуется плоская задача о колебаниях изотропной среды с упругим включением. В данной работе метод интегральных уравнений распространяется на случай системы жестких цилиндрических включений произвольного поперечного сечения.

Постановка задачи

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде, с коэффициентами Ламе λ , μ и плотностью ρ , m цилиндров, растянутых вдоль оси Ox_3 , поперечное сечение каждого из которых ограничено замкнутым контуром L_j , $j = \overline{1, m}$ типа Ляпунова. Предполагается, что внутренняя часть цилиндров представляет собой абсолютно жесткое тело с плотностью ρ_0 . В среде, перпендикулярно оси цилиндра, распространяется гармоническая (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$) волна расширения-сжатия (P -случай):

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \tau_1 = const \quad (1)$$

или волна сдвига (SV -случай):

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \tau_2 = const, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной волн в матрице, ω – частота колебаний, $i^2 = -1$.

Взаимодействуя с включениями, падающая волна порождает отраженные продольные и поперечные волны. Их совокупность определяет напряженно-деформированное состояние среды, которое требуется определить. Следуя принципу суперпозиции, общее поле амплитуд перемещений и компонент тензора напряжений будем искать в виде:

$$U_n = U_n^{(0)} + U_n^{(1)}, \quad \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(0)} + \tau_{mn}^{(1)},$$

$$\tau_{mn} = \lambda \delta_{mn} (U_{1,1} + U_{2,2}) + \mu (U_{m,n} + U_{n,m}), \quad m, n = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $U_n^{(0)}$, $\tau_{mn}^{(0)}$ и $U_n^{(1)}$, $\tau_{mn}^{(1)}$ – амплитуды компонент вектора перемещений, тензора напряжений падающего и отраженного волновых полей соответственно, δ_{mn} – символ Кронекера.

Отраженное поле перемещений должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а также уравнениям движения [1]. Кроме того, на поверхности жесткого включения должны выполняться граничные условия:

$$U_1 = B_1 - \omega_0 \eta, \quad U_0 = B_2 + \omega_0 \xi, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad (4)$$

где B_1 , B_2 и ω_0 – амплитуды поступательного движения и жесткого поворота включения.

Метод решения

Представления амплитуд перемещений отраженного волнового поля будем искать в виде потенциалов типа простого слоя [4] (суммирование по $n=1,2$):

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где $p_n(s)$ – неизвестные плотности; $V_n^{(k)}$ – компоненты матрицы Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в точке M при действии гармонической силы, приложенной в точке $P \in L$ и направленной вдоль оси Ox_1 ($k=1$) или вдоль оси Ox_2 ($k=2$).

Амплитуды перемещений $V_n^{(k)}$ и соответствующих компонент тензора напряжений $\sigma_{mn}^{(k)}$ определяются из соотношений ($k, m, n=1,2$):

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k} L_{nk} G, \quad \sigma_{mn}^{(k)} = \lambda \delta_{mn} (V_{1,1}^{(k)} + V_{2,2}^{(k)}) + \mu (V_{m,n}^{(k)} + V_{n,m}^{(k)}),$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = c \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad c = -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$G(M, P) = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (6)$$

Здесь $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода j -го порядка, Δ – оператор Лапласа.

Используя фундаментальное решение $G(M, P)$, для комбинаций перемещений $V_n^{(k)}$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} + iV_2^{(2)} &= d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{00} \right), \quad V_1^{(2)} = V_2^{(1)}, \\ e^{2i\alpha} (V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) &= e^{-2i\alpha} (V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) = \frac{d}{4} \Phi_{22}, \quad d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \\ \Phi_{l j} &= \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ формул (7) показывает, что функции $V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ и $V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ непрерывны в нуле, а функция $V_1^{(1)} + iV_2^{(2)}$ обладает логарифмической особенностью. Это означает, что удовлетворение граничных условий (4) сводит краевую задачу к системе интегральных уравнений с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна. Поэтому, для получения сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, граничные условия (4) дифференцировались по дуговой координате s_0 и записывались в виде:

$$\left. \frac{d(U_1 + iU_2)}{ds_0} \right|_L = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad \left. \frac{d(U_1 - iU_2)}{ds_0} \right|_L = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}, \quad \left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (8)$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ с осью Ox_1 , $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

Удовлетворяя граничные условия (8), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядрами типа Коши (суммирование по $n = 1, 2$):

$$\int_L B_{mn}(s_0, s) f_n(s) ds - M_m(s_0) \omega_0 = -N_m(s_0), \quad m = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + F_{31}^0 e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\
 B_{21} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + F_{31}^0 e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\
 B_{11} = B_{22} &= -d \left(\frac{\chi}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{\chi}{4} F_{31}^0 - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{11}^0 \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right), \\
 f_1(s) &= p_1(s) + ip_2(s), \quad f_2(s) = p_1(s) - ip_2(s), \quad M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad M_2 = \bar{M}_1, \\
 \Phi_{1j}^0 &= \frac{\gamma_1' H_j^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma_2' H_j^{(1)}(\gamma_2 r_0)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \zeta_0 - \bar{\zeta} = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad F_{31}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{31}^0, \quad F_{33}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{33}^0, \\
 N_1 = -N_2 &= \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } P\text{-случае,} \\
 N_1 = N_2 &= -\gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{- в } SV\text{-случае.} \tag{9}
 \end{aligned}$$

Анализ ядер системы уравнений (9) показывает, что ядра B_{11} и B_{22} – сингулярны, а B_{12} и B_{21} – непрерывны.

Необходимые для замыкания алгоритма три дополнительных условия вытекают из законов поступательного и вращательного движения абсолютно жесткого тела. Для поступательного движения, исходя из второго закона Ньютона, получаем:

$$\int_L S_1 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_1, \quad \int_L S_2 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_2, \tag{10}$$

а уравнение, описывающее вращательное движение, запишем в виде

$$\int_L (S_1(\eta - a_2) - S_2(\xi - a_1)) ds = -\omega^2 J_A \omega_0, \tag{11}$$

где S_1 и S_2 – амплитуды компонент вектора напряжения на контуре L ; S_0 – площадь включения, ограниченного контуром L ; J_A – момент инерции включения относительно точки $A(a_1, a_2)$; постоянные B_1 и B_2 определяются согласно (4).

Результаты численных исследований

При численной реализации алгоритма использовался метод механических квадратур [5]. В качестве примера рассматривалась среда, содержащая систему цилиндрических жестких включений эллиптической поперечного сечения [6]

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \tag{12}$$

На границе включения проводилось вычисление безразмерных напряжений

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}|/P, \quad \sigma_\beta = |\tau_{s_0}|/P, \quad \sigma_{n\beta} = |\tau_{n_0 s_0}|/P, \tag{13}$$

где τ_n и τ_{n_s} – амплитуды нормального и тангенциального напряжений на L ; τ_s определяется из соотношения $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$; P – максимальное напряжение в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ в случае набегания на цилиндр P -волны (1) и $\gamma_2 \tau_2 \mu$ – в случае SV -волны (2).

На рис. 1–4 показаны графики распределения нормальных напряжений σ_n на контуре центрального и крайнего (рис. 1, 2 – случай P -волны, рис. 3, 4 – SV -волны) включений эллиптической формы, при $a/b = 1$; $b/a = 2,5$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\gamma_{1,2} a = 0,7$; 1,5 и 2,0. Расчеты показывают, что существует принципиальное различие в распределении контурных напряжений при набегании на систему жестких включений волны расширения-сжатия (1) или волны сдвига (2).

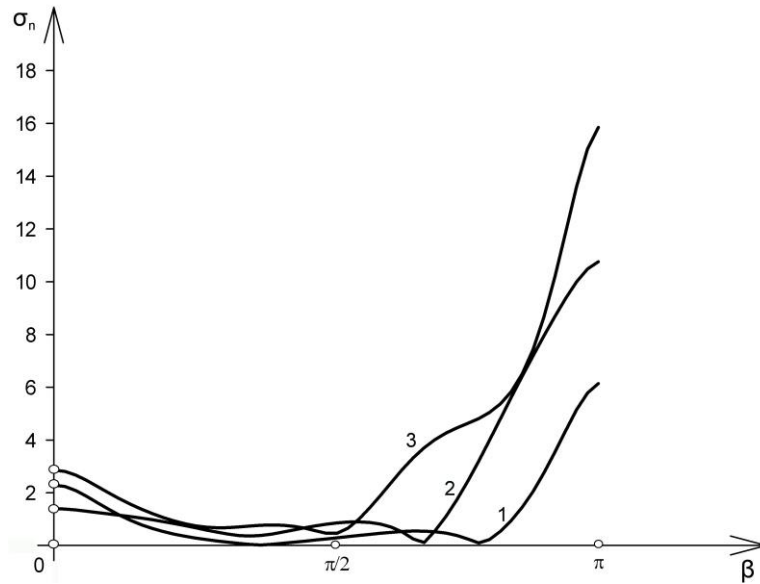


Рис. 1

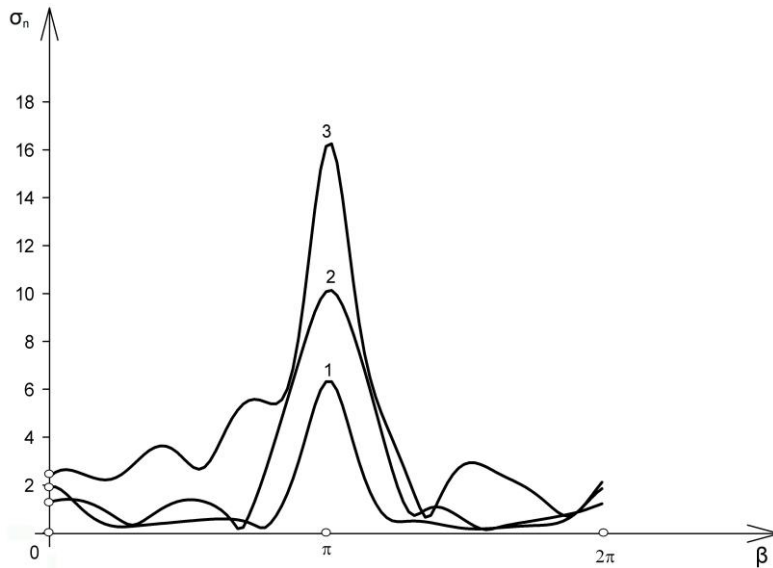


Рис. 2

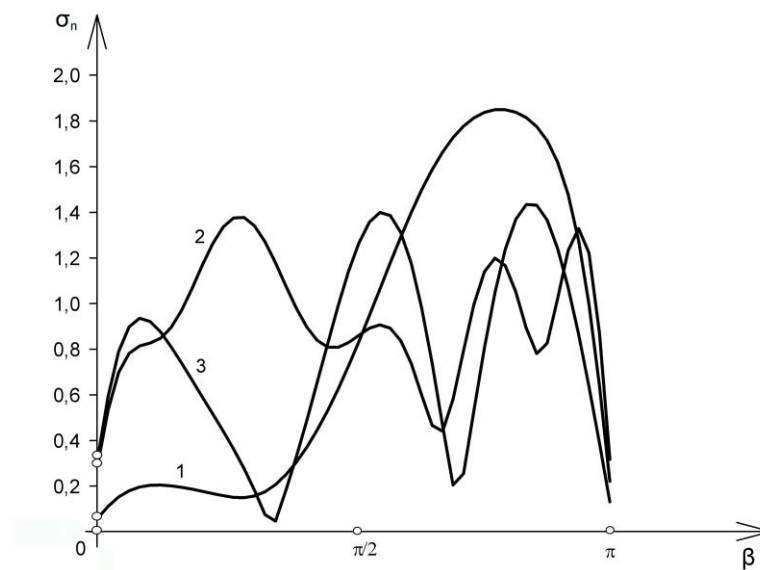


Рис. 3

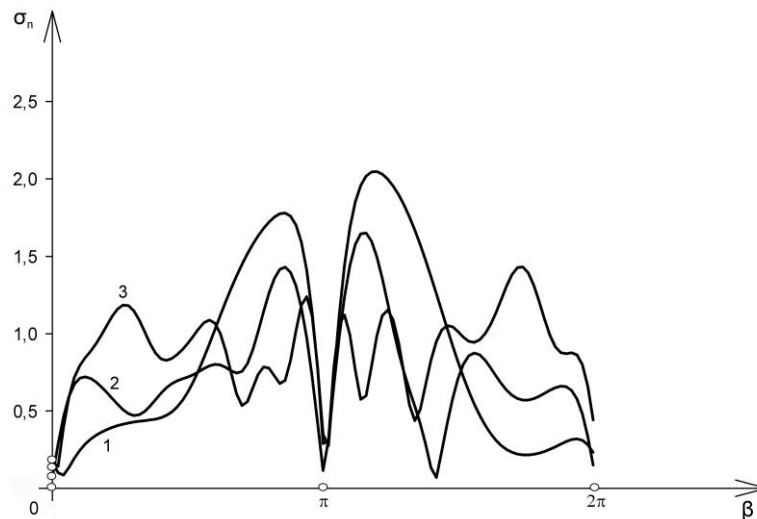


Рис. 4

Выводы

Для задачи дифракции волн сдвига на системе жестких включений некруговых формы параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Это очень важно, так как можно получить точные величины резонансных максимумов контурных напряжений, а также точных координат дислокации резонансных максимумов позволит избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок. Все это требует использования увеличенного числа вариантов исходных данных. Сочетание же метода интегральных уравнений, позволяет на единицу снизить размерность задачи, а также значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур, приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К., 1978. – 307с.
2. Волобуева Т.В., Сторожев В.И. Рассеяние плоских гармонических волн на цилиндрической полости эллиптического сечения в ортотропной среде // Теорет. и прикладная механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 66–79.
3. Фильшинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
4. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 54–60.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К., 1984. – 344 с.
6. Панченко Б.Е., Назаренко А.М., Каркасний анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172–187.