

## СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ SH-ВОЛН НА СИСТЕМЕ НЕКРУГОВЫХ ТРЕЩИН В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

А.М. Назаренко, Б.Е. Панченко, С.А. Пилипенко

Сумский государственный университет, Сумы, ул. Р. Корсакова, 2.

Тел.: 0542 68 7710, e-mail: [svetlana.morgylka@gmail.com](mailto:svetlana.morgylka@gmail.com)

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, проспект Академика Глушкова, 40.

Тел.: (044) 526 3630, e-mail: [pr-bpb@ukr.net](mailto:pr-bpb@ukr.net)

Предложен параллельный алгоритм численного решения стационарной задачи теории упругости о взаимодействии гармонических SH-волн с системой некруговых трещин-разрезов в бесконечной упругой среде. Краевая задача сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

A parallel algorithm of a numerical solution of a stationary problem of the elasticity theory about the interaction of harmonic SH-waves with a system of non-circular cracks-cuts in an infinite elastic medium, is offered. The boundary-value problem is reduced to a system of singular integro-differential equations.

### Введение

Проблемы взаимодействия волн напряжений с различного рода дефектами в упругих средах имеют большое значение в теории разрушения, дефектоскопии и в вопросах прогнозирования ресурса конструкций. Поэтому необходимо учитывать инерционный эффект при расчете конструкций и сооружений с трещинами, уметь определять зависимость коэффициента интенсивности напряжений от частоты колебаний на системах стационарных трещин под действием гармонических нагрузок.

Из решений задач динамической механики разрушения в случае трещин продольного и поперечного сдвигов, нормального отрыва можно сделать важнейшие качественные выводы о процессах, предшествующих хрупкому разрушению при динамическом нагружении. Большинство имеющихся в литературе исследований относятся к рассмотрению волновых полей в окрестности прямых и круговых трещин. Однако, как показали исследования, динамический коэффициент интенсивности напряжений существенно зависит от кривизны дефекта. Поэтому актуальной является разработка методов решения динамических задач для бесконечных изотропных сред с системами криволинейных трещин.

Напряженно-деформированное состояние сред с усложненными свойствами может быть высокоэффективно моделировано вычислительными комплексами в сочетании с программными системами. Хотя практически не изучен вопрос автоматизированного синтеза приложений, которые могут быть перенастроенными в зависимости от изменения конфигурации механических систем. Большинство исследований посвящено развитию метода конечных элементов [1]. Существуют и другие подходы, которые существенно экономят вычислительные ресурсы и повышают точность вычислений. Программные средства (CASE-средства) [2] позволяют синтезировать и сопровождать приложения, которые моделируют динамическое поведение сложных механических систем. В данной работе будут анализироваться именно эти методики решения задач механики сплошных сред.

Анализ конструкций, которые содержат значительное число неоднородностей и работающих под воздействием динамических нагрузок, происходит с исследованием взаимодействия волн перемещений и напряжений в упругой среде с трещинами-разрезами. Очень важным вопросом является изучение дифракции упругих волн на системах произвольных неоднородностей. Эффективные параллельные алгоритмы, в основе которых лежат обоснованные аналитические методы [3], имеют особое значение. Для решения антиплоских задач теории дифракции [4, 5] большой эффективностью обладает метод интегральных уравнений [6–9]. Преимущество метода заключается в сокращении числа пространственных переменных, достаточно высокой скорости сходимости и возможности применения различных эффективных численных методов решения [6]. Также метод обладает возможностями при построении параллельных вычислительных схем [8, 9].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим упругое изотропное пространство, ослабленное системой туннельных вдоль оси  $OZ$  криволинейных разрезов  $L_j (j = \overline{1, K})$  (рис. 1), где  $L_j$  – простая разомкнутая дуга Ляпунова с началом в точке  $a_j$  и концом в точке  $b_j$  (предполагаем, что  $\cap L_j = 0$ ).

Считаем, что берега разрезов свободны от сил, а перемещения при переходе через  $L = \cup L_j$  терпят разрыв.

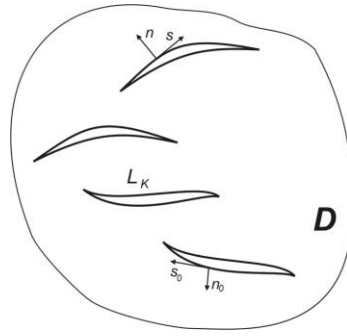


Рис. 1

Пусть из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига, нормаль к фронту которой составляет угол  $\psi$  с осью  $OX$  (зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ).

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)}, \quad \tau = \text{const}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  – частота колебаний,  $c_2$  – скорость распространения поперечной волны.

В результате взаимодействия падающей  $W_0$  волны с разрезами возникает рассеянная волна перемещений  $W_1$ , которая удовлетворяет уравнению антиплоской деформации [10].

$$\Delta W_1 + \gamma_2^2 W_1 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Для механики разрушения определяющее значение имеет асимптотическое распределение напряжений в окрестности вершин дефектов [4]. Ненулевые компоненты тензора напряжений  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  представляют собой касательные напряжения в плоскости поперечного сечения цилиндров. Они связаны с перемещением  $W = W_0 + W_1$  формулами ( $\mu$  – модуль сдвига)

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \sigma_{32} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \sigma_{31} - i\sigma_{32} = 2\mu \frac{\partial W}{\partial z}, \quad z = x + iy. \quad (3)$$

Касательное напряжение  $\sigma_n$ , действующее на  $L$  в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  со стороны положительной нормали, равно

$$\sigma_n = \sigma_{31} \sin \varphi - \sigma_{32} \cos \varphi = \text{Im} \left\{ e^{i\varphi} (\sigma_{31} - i\sigma_{32}) \right\}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  – угол между положительной касательной к  $L$  в точке  $\zeta$  и осью  $OX$ .

Решение антиплоской задачи динамической теории упругости сводится к определению функции  $W_1(x, y)$  – решения уравнения Гельмгольца (2) в плоскости с системой трещин-разрезов при выполнении дополнительных условий типа Зоммерфельда излучения на бесконечности [6].

## 2. Метод решения

Следуя [10], запишем функцию  $W_1(x, y)$ , характеризующую рассеянную разрезами волну перемещений в области  $D$ , следующим образом:

$$W_1(x, y) = \frac{1}{4} \int_L f(s) \left( \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) d\zeta - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) d\bar{\zeta} \right), \quad r = |z - \zeta|. \quad (5)$$

Здесь  $H_n^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка;  $f(s)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера.

Интегральное – представление (5) автоматически удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2) в области  $D$  и условиям излучения на бесконечности. При переходе через  $L$  оно обеспечивает скачок перемещений ( $[W_1] = W_1^+ - W_1^- = f(s)$ ) и непрерывность напряжений ( $[\sigma_n] = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = 0$ ). Остается выполнить граничное условие на  $L$ :

$$\sigma_{n_0} = \mu \frac{\partial}{\partial n_0} (W_0 - W_1) = 0, \quad (6)$$

которое перепишем в виде [9]

$$\left( e^{i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)^\pm = 0. \quad (7)$$

Будем предполагать также, что скачки перемещений на концах разрезов  $L_j$  равны нулю, т. е.

$$f(a_j) = f(b_j) = 0, \quad j = \overline{1, K}. \quad (8)$$

В интегральной форме (8) можно записать в виде

$$\int_L df(s) = \int_L f'(s) ds = 0. \quad (9)$$

Вспользуемся известными соотношениями [10]:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_0^{(1)}(\gamma r) = \frac{\gamma^2}{4} e^{-2i\alpha} H_2^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} H_0^{(1)}(\gamma r) = \frac{\gamma^2}{4} e^{2i\alpha} H_2^{(1)}(\gamma r), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma^2}{4} H_2^{(1)}(\gamma r), \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}.$$

Поведение в нуле ( $x \rightarrow 0$ ) функций Ханкеля нулевого и второго порядков характеризуется асимптотическими формулами:

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln x + H_0(x), \quad H_2^{(1)}(x) = \frac{4}{i\pi x^2} + H_2(x), \quad (11)$$

где  $H_0(x)$  и  $H_2(x)$  – непрерывны в точке  $x = 0$ .

Подстановка интегрального представления (5) в выражение, которое стоит в левой части граничного условия (7), с учетом (10), (11) дает:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_0} \frac{\partial W_1}{\partial z} - e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}} &= e^{i\varphi_0} \frac{1}{4i\pi} \int_L \frac{df}{\zeta - z} + e^{-i\varphi_0} \frac{1}{4i\pi} \int_L \frac{df}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{\gamma_2^2}{4i\pi} \int_L f(s) \cos(\varphi_0 - \varphi) \ln r ds + \\ &+ \frac{\gamma_2^2}{8} \int_L f(s) (\cos(\varphi_0 + \varphi - 2\alpha) H_2(\gamma_2 r) + \cos(\varphi_0 - \varphi) H_0(\gamma_2 r)) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь использованы формулы интегрирования по частям для гиперсингулярных интегралов [12] при дополнительных условиях (8).

Привлечение формул Сохоцкого–Племеля [11] для вычисления предельных интегралов типа Коши, возникающих при удовлетворении граничного условия (7) с учетом соотношений (1), (12), сводит рассматриваемую краевую задачу к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции  $f(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_L \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) df - \frac{\gamma_2^2}{4i\pi} \int_L f(s) \cos(\varphi_0 - \varphi) \ln r_0 ds + \\ + \frac{\gamma_2^2}{8} \int_L f(s) (\cos(\varphi_0 + \varphi - 2\alpha) H_2(\gamma_2 r_0) + \cos(\varphi_0 - \varphi) H_0(\gamma_2 r_0)) ds = T(s_0). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad T(s_0) = \tau \gamma_2 \sin(\varphi_0 - \psi) e^{-i\gamma_2 (\xi_0 \cos \psi + \eta_0 \sin \psi)}.$$

Для однозначной разрешимости интегро-дифференциального уравнения (13) к нему следует присовокупить дополнительное условие (3).

Представим контур  $L$  в параметрической форме. Для этого на каждом из контуров  $L_j$  ( $j = \overline{1, K}$ ) выбираем локальную систему координат, учитывая параллельный перенос и поворот осей координат. Учитывая это, на контуре  $L_j$  будем считать

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1, \quad \zeta(-1) = a_j, \quad \zeta(+1) = b_j. \quad (14)$$

Умножим уравнение (13) на  $s'(\beta_0)$  и выделим в нем ядро типа Коши и логарифмическое ядро следующим образом:

$$\frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{\beta - \beta_0} + \left( \frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right),$$

$$s' \ln|\zeta - \zeta_0| = s'_0 \ln|\beta - \beta_0| + (s' \ln|\zeta - \zeta_0| - s'_0 \ln|\beta - \beta_0|). \quad (15)$$

Здесь, используя правило Лопиталья, находим

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left( \frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right) = -\frac{\zeta''(\beta_0)}{2\zeta'(\beta_0)}, \quad (16)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} (s' \ln|\zeta - \zeta_0| - s'_0 \ln|\beta - \beta_0|) = s'_0 \ln|\zeta'_0|.$$

Теперь интеграл с логарифмическим ядром интегрируем по частям с учетом дополнительного условия (8):

$$\int_{-1}^1 f(\beta) \ln|\beta - \beta_0| d\beta = -\int_{-1}^1 (\beta - \beta_0) (\ln|\beta - \beta_0| - 1) df(\beta). \quad (17)$$

Параметрическая форма интегрального уравнения приобретает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(\beta)}{\beta - \beta_0} d\beta + \frac{\gamma_2^2}{4i\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'_0}) \int_{-1}^1 (\beta - \beta_0) (\ln|\beta - \beta_0| - 1) f'(\beta) d\beta + \\ & + \frac{\gamma_2^2}{8} \int_{-1}^1 \left[ \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'_0} e^{-2i\alpha_0}) H_2^{(1)}(\gamma_2 r_0) - \frac{4}{i\pi \gamma_2^2 (\beta - \beta_0)^2} \right] + \\ & + \left[ \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'_0}) H_0^{(1)}(\gamma_2 r_0) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'_0}) \ln|\beta - \beta_0| \right] f(\beta) d\beta = T(\beta_0) \cdot s'_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Предложенная процедура регуляризации интеграла с логарифмическим ядром позволяет свести задачу к сингулярному интегральному уравнению относительно функции  $f'(\beta)$ . Ядра интегралов, соответствующих функции  $f(\beta)$ , непрерывны. Единственное решение полученного сингулярного интегро-дифференциального уравнения (18) при наличии дополнительного условия (8) следует искать в классе функций, имеющих корневую особенность на концах разрезов [11]. Таким образом, полагаем

$$f'(\beta) = \frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad f(\beta) = \int_{-1}^{\beta} f'(\beta) d\beta, \quad \beta = \cos \theta. \quad (19)$$

### 3. Дискретизация задачи

Представим неизвестную плотность  $\Omega(\beta)$  интегрального уравнения (18) как совокупность функций  $\Omega_j(\beta^j)$ , определенных на контурах  $L_j, j = \overline{1, K}$ . Численная реализация интегрального уравнения (18) проводится методом конечных квадратур [6]. Уравнение, соответствующее контуру  $L_p$ , удовлетворяется в узлах Чебышева второго рода  $\theta_m = \frac{\pi m}{n_p}$  ( $m = \overline{1, n_p - 1}$ ) и сводится к системе алгебраических уравнений относительно значений функции  $\Omega_j(\beta)$  в узлах Чебышева первого рода  $\theta_k = \frac{2k-1}{n_j} \pi$  ( $k = \overline{1, n_j}$ ), где  $n_j$  – число точек разбиения контура  $L_j$ .

Для интеграла типа Коши используем квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2} (\beta - \beta_m)} d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\Omega_j(\beta_k)}{\beta_k - \beta_m}, \quad \beta_m = \cos \theta_m, \quad \beta_k = \cos \theta_k. \quad (19)$$

К інтегралу, що містить регулярне ядро  $D(\beta_0, \beta)$  і має корневую особливість, застосовуємо квадратурну формулу Гаусса

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} D(\beta_m, \beta) d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} D(\beta_m, \beta_k) \Omega_j(\beta_k). \quad (20)$$

Применительно к дополнительному условию (9) имеем

$$\sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) = 0. \quad (21)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $f_j(\beta)$  имеет вид [6]:

$$f_j(\beta) = \int_{-1}^{\beta} f'_j(\beta) d\beta \approx -\frac{2}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) \sum_{l=1}^{n_j-1} \frac{\cos l\theta_k \sin l\theta}{l}. \quad (22)$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно функций  $\Omega_j, j = \overline{1, K}$  приобретает вид:

$$\sum_{k=1}^{n_j} A_{mk}^j \Omega_j(\beta_k) = N_m^j, \quad \sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) = 0, \quad (23)$$

$$A_{mk}^j = \frac{\pi}{n_j} \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\beta_k - \beta_m} + \frac{\gamma_2^2}{4i\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_m \bar{\zeta}'_m) (\beta_k - \beta_m) (\ln|\beta_k - \beta_m| - 1) + \frac{\gamma_2^2}{8} \sum_{v=1}^{n_j} B_{mv} \sin \theta_v \left( -\frac{2}{n_j} \sum_{j=1}^{n_j-1} \frac{\cos l\theta_k \sin l\theta_v}{l} \right) \right\},$$

$$B_{mv} = \operatorname{Re} \left( \zeta'_m \zeta'_v \frac{\bar{\zeta}_m - \bar{\zeta}_v}{\zeta_m - \zeta_v} \right) H_2^{(1)}(\gamma_2 |\zeta_m - \zeta_v|) - \frac{4}{i\pi \gamma_2^2 (\beta_m - \beta_v)^2} + \operatorname{Re}(\zeta'_m \bar{\zeta}'_v) H_0^{(1)}(\gamma_2 |\zeta_m - \zeta_v|) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_m \bar{\zeta}'_m) \ln|\beta_m - \beta_v|, \quad N_m^j = \tau \gamma_2 s'_m \sin(\varphi_m - \psi) e^{-i\gamma_2(\xi_m \cos \psi + \eta_m \sin \psi)}.$$

Таким образом, при численной реализации системы интегральных уравнений (13), (9) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (23) с  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_K$  неизвестными.

#### 4. Схема вычислений

Проведена начальная фаза параметрического исследования описанной задачи. Для исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрен случай нормального падения волны сдвига [8] на систему, состоящую из эллиптических или ромбических трещин, поочередно расположенных в упругом пространстве на одинаковом расстоянии один от другого и симметрично ориентированных вдоль оси  $X$  (рис. 2). Однако число трещин справа и слева не является обязательно равным ( $L_T \neq L_K$ )

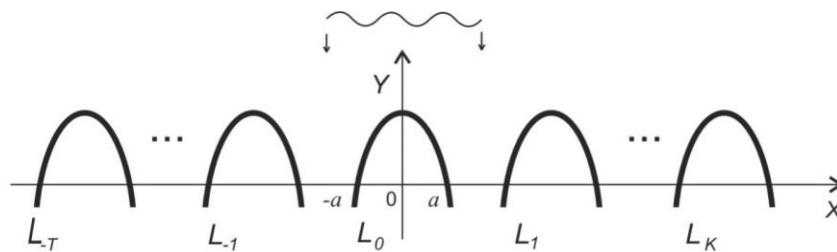


Рис. 2

Таким образом, задача сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИУ), которые решаются численно. Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой, в конечном итоге, сводятся система СИУ, являются результатом дискретизации контуров. Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу трещин. Применим распараллеливание алгоритма, в котором каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано в [8, 9], данный метод в вычислительном смысле сводится к обходу каждого контура по

точкам коллокации внеинтегральной переменной  $\zeta_{k0}$  и одновременно же обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования  $\zeta_k$ .

Параллельно-конвейерная схема вычислений построена аналогично [9]. Тут также вычисления имеют следующие этапы: синтез массивов исходных данных, синтез матрицы СЛАУ, решение СЛАУ методом Гаусса, синтез массивов итоговых решений. Первый, второй и четвертый этапы макроконвейера не требуют пересылок данных, что означает независимость вычислений. На третьем этапе для решения СЛАУ существует оптимальное число процессов, определяемое спецификой матрицы. Это означает, что для 1, 2 и 4 этапов алгоритма оптимальным является число процессов, соответствующее числу коэффициентов СЛАУ.

В данной методике решения краевой задачи основной операцией является определение текущего расстояния между точками коллокации и интегрирования, заданного на множестве значений параметрических координат неоднородностей. Указанное расстояние является аргументом функции Грина. И поскольку комбинации самих функций Грина и коэффициентов при них являются элементами матрицы СЛАУ, указанная процедура может быть базовой при разработке приложения. Как показано в [8, 9], алгоритм хорошо масштабируется по вычислительным узлам.

Вычислительный процесс решения СЛАУ распараллеливается согласно [9, 13]. Параллельное вычисление итоговых искомым характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций  $f_k(\beta_p)$  в интегральные представления решений аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ. Для решения СЛАУ эффективнее использовать построчное распараллеливание, когда пересылки и вычисления находятся в балансе.

В ходе начальной фазы численной реализации вычислялись безразмерные коэффициенты интенсивности на продолжении трещин. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях  $N$ . Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [10] для случая одиночной трещины. Совпадение результатов показало хорошую достоверность алгоритма.

Численное исследование показало, что алгоритм имеет высокую скорость сходимости. Точность вычислений до  $10^{-10}$  достигается уже при 200 точках коллокации каждого контура. Сходимость алгоритма также не зависит от числа трещин. Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритма, описанного в [13].

## Выводы

В задаче дифракции SH-волн на системе криволинейных трещин-разрезов параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Сочетание метода интегральных уравнений, который снижает на единицу размерность задачи, и значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма расчета неизвестных плотностей интегральных уравнений. Волновые характеристики ближнего и дальнего полей выражаются через указанными плотностями.

1. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – М: Изд. АСВ (Ассоциации строительных ВУЗов), 2000, – 152 с.
2. *Колянов Г.Н.* CASE. Структурный системный анализ (автоматизация и применение). – М: «Лори», 1996. – 360 с.
3. *Вертегйм И.И., Тертугов В.Н.* Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ: Учебное пособие. – Пермь: ПГУ, 2007. – 84 с.
4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
5. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 136 с.
6. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
7. *Фильштинский Л.А.* Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
8. *Назаренко А.М., Панченко Б.Е.* Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде // Проблемы програмування. – 2010. – № 2–3. – С. 604–610.
9. *Панченко Б.Е., Назаренко А.М.* Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172–187.
10. *Фильштинский Л.А.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига). – Докл. АН СССР, 1977. – № 6. – С. 1327–1330.
11. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
12. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М: Наука, 1985. – 256 с.
13. *Химич А.М., Поляно В.В.* Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблемы програмування. – 2008. – № 3. – С. 145–149.