УДК 518.9

NP-ТРУДНОСТЬ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

С.В. Пашко

Институт программных систем НАН Украины,
03187, Киев, проспект Академика Глушкова, 40,
тел. (044) 526 6025
E-mail: pashko55@yahoo.com

Рассмотрены игры преследования на плоскости с простым движением, в которых принимают участие несколько преследователей и убегающих. Для захвата целей множество преследователей разбивается на группы, причем для каждого убегающего создается одна группа. В качестве критерия используется время захвата. Доказаны теоремы о NP-трудности задач оптимизации групп преследования. Приведены результаты численных экспериментов для соответствующих версий метода ветвей и границ и метода случайного поиска с локальной оптимизацией.

The differential pursuit-evasion games on a plane are considered. A group of pursuers is created for every evader in a game. The optimization problem of group composition has been formulated. The theorems about NP-completeness and NP-hardness of pursuit optimization problems are proved. Numerical methods for solving such optimization problems are constructed. Numerical experiments have demonstrated high efficiency of the methods.

Введение

Задачи преследования и убегания, занимающие одно из центральных мест в теории динамических игр, можно разделить на два класса. В задачах первого класса игроки перемещаются на некотором многообразии, например, на евклидовой плоскости. Эти задачи принято называть непрерывными играми преследования; многие из них изучены в работе [1]. В задачах второго класса игроки двигаются по ребрам заданного графа. Впервые такие задачи, которые называются дискретными играми преследования, подробно рассмотрены в работе [2].

Кроме упомянутой классификации, динамические игры, согласно [1], разделяются на игры качества и игры степени. В играх качества представляет интерес два исхода игры. Например, требуется определить, могут ли преследователи захватить цель до определенного момента времени или нет. Отметим, что задачи преследования со многими участниками изучались в [3, 4] как игры качества. В играх степени требуется построить оптимальные стратегии игроков, для которых достигается минимакс функции платы. В настоящей работе задача преследования в пределах одной группы рассматривается как игра степени.

Оценки сложности дискретных игр преследования изложены в работе [5]. Среди таких игр имеются NP-трудные, NP-трудные в сильном смысле (определения этих понятий имеются в работе [6]), а также задачи, допускающие решение за время, ограниченное полиномом или даже линейной функцией от длины описания игры.

В данной работе изучается сложность непрерывных задач преследования, в которых число преследователей и число преследуемых больше одного. Критерий качества – это время окончания игры, т. е. время захвата всех целей. Движения игроков считаются простыми, при этом предполагается, что максимальная скорость каждого преследователя превосходит максимальную скорость любого убегающего. Каждому преследователю разрешается захватить не более одного убегающего. Множество преследователей разбивается на группы, причем для каждой цели создается одна группа [4]. В любой момент времени группы могут быть переформированы. После захвата цели вся группа вместе с целью выбывают из игры. Все цели должны быть захвачены. Требуется найти оптимальный состав групп, т. е. такой, для которого момент захвата последней цели минимален. В каждой группе преследователи и убегающий игрок применяют оптимальные или близкие к ним стратегии движения; такого рода стратегии изучались в работах [1, 7–11].

В настоящей работе показано, что задача оптимизации состава групп преследования является NP-трудной в сильном смысле, а некоторые ее частные случаи допускают полиномиальные по времени алгоритмы решения.

1. Преследование одного убегающего

Рассмотрим задачу оптимального преследования одного убегающего группой преследователей. Пусть на плоскости в точке $X_0(t)$ находится преследуемый игрок *E*, а в точках $X_i(t)$ находятся преследующие его игроки P_i, $i=1,2,\ldots,k$. Обозначим $V_i(t)$ скорости игроков, $i=0,1,2,\ldots,k$ (нулевое значение индекса *i* относится к игроку *E*); здесь V_i – двумерные векторы. Игра начинается в момент времени $t=0$. Уравнения движения игроков имеют вид

$$\dot{X}_i = V_i,\ i=0,1,2,\ldots,k. \qquad (1)$$

Будем считать, что выполняются ограничения

$$\|V_i\| \le w_i < \infty, \; i = 0,1,2,\ldots,k, \tag{2}$$

где w_i – максимальная величина скорости, $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – длина вектора $X = (x, y)$. Кроме того, скорость V_i считается кусочно-непрерывной функцией от времени. Это означает, что в каждом ограниченном временном интервале существует не больше конечного числа точек разрыва первого рода.

Игрок *i* управляет своими координатами, выбирая в каждый момент времени скорость V_i. Функция $V_i(t)$ является управлением *i*-го игрока. Движение, осуществляемое таким образом, называется простым. Игра считается законченной, когда координаты одного из преследователей в некоторый момент $t = T$ совпадают с координатами *E*. Преследователи стремятся уменьшить время *T*, преследуемый стремится его увеличить. Считаем, что

$$w_0 < w_i, \; i = 1,2,\ldots,k. \tag{3}$$

Стратегию игрока *i* можно определить как функцию $S_i(t, I(t))$, где $I(t)$ – информация, доступная игроку в момент *t*. Значением этой функции является управление $V_i(t)$; игрок *i* вычисляет свое управление по формуле $V_i = S_i(t, I(t))$. Далее считается, что стратегия убегающего зависит только от времени и фазового вектора, а стратегии преследователей зависят еще и от скорости убегающего игрока. Пусть $X^u(t) = (X_0(t), X_1(t),\ldots, X_k(t))$ – фазовый вектор, содержащий координаты игроков, зависящие от времени. Управления $V_i(t)$ вычисляются по формулам

$$V_0(t) = S_0(t, X^u(t)), \tag{4}$$

$$V_i(t) = S_i(t, X^u(t), V_0(t)), \; i = 1,2,\ldots,k. \tag{5}$$

Используя уравнения (1), (4), (5), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_0(t) = S_0(t, X^u(t)), \tag{6}$$

$$\dot{X}_i(t) = S_i(t, X^u(t), S_0(t, X^u(t))), \; i = 1,2,\ldots,k, \tag{7}$$

$$0 \le t \le T, \; X^u(0) = X^{u0}; \tag{8}$$

здесь X^{u0} – заданное начальное значение вектора X^u. Решением системы (6)–(8) считается абсолютно непрерывная функция $X^u(t)$, производная которой всюду удовлетворяет соотношениям (6), (7) за исключением, быть может, конечного числа моментов времени в каждом ограниченном временном отрезке.

Пусть $S = (S_1, S_2,\ldots, S_k)$ – стратегия преследования. Пара стратегий убегания и преследования (S_0, S) называется совместной, если существует единственное решение $X^u(t)$ системы уравнений (6)–(8), причем управления $V_i(t)$, вычисляемые по формулам (4), (5), являются кусочно-непрерывными функциями от *t* и удовлетворяют соотношениям (2). Приведенное определение совместной пары стратегий аналогично определению, данному в [11].

Пусть величина $T(X^u(0), S_0, S)$ равна времени захвата цели, если стратегии S_0 и *S* совместны, и равна ∞ в противном случае. Оптимальным временем преследования назовем число

$$t^* = \inf_S \sup_{S_0} T(X^u(0), S_0, S). \tag{9}$$

Ясно, что из соотношений (3) следует $t^* < \infty$. Назовем стратегию S^* оптимальной стратегией преследования, если для каждой стратегии S_0 выполняется неравенство $T(X^u(0), S_0, S^*) \le t^*$. Назовем стратегию S_0^* оптимальной стратегией убегания, если для каждой стратегии S справедливо неравенство $T(X^u(0), S_0^*, S) \ge t^*$. Обозначим $V = (V_1, V_2,\ldots, V_k)$ управление преследования, соответствующее стратегии *S*. Предположим, преследуемый объект и преследователи применяют оптимальные стратегии S_0^* и S^*. Получающиеся при этом управления назовем парой оптимальных управлений (V_0^*, V^*).

В случае $k = 2$ оптимальные управления V_0^* и V^* указаны в работе [1] (раздел 6.8). Для произвольных значений *k* задачи оптимального преследования изучаются в работах [8, 11] .

Рассмотрим подробнее игру с двумя преследователями, т. е. при условии $k=2$. Обозначим A_i окружность Аполлония, относящуюся к паре игроков E, P_i, $i=1,2$. Она представляет собой геометрическое место точек, в которых могут встретиться игроки E и P_i, если они двигаются равномерно и прямолинейно с максимальными скоростями. Пусть Q_i – замкнутый круг Аполлония, соответствующий окружности A_i. Тогда $Q=Q_1\bigcap Q_2$ – множество таких точек плоскости, до которых игрок E успевает дойти не позже каждого преследователя. Внутренность множества Q представляет собой множество точек, до которых игрок E успевает дойти раньше любого преследователя. Пусть $X^*\in Q$ – наиболее удаленная точка от точки X_0 из множества Q, т. е. для каждого $X\in Q$ справедливо неравенство $\left\|X^*-X_0\right\|\geq\left\|X-X_0\right\|$.

Обозначим S_0^* стратегию убегающего игрока, которая состоит в том, что он двигается равномерно и прямолинейно с максимальной скоростью по направлению к точке X^*. До момента времени, равного $\left\|X^*-X_0\right\|/w_0$, захват произойти не может, поэтому $t^*\geq\left\|X^*-X_0\right\|/w_0$. В данной игре каждый из преследователей может применить стратегию параллельного сближения [10]. В работе [9] доказано, что применение каждым преследователем этой стратегии приводит к захвату цели за время, которое не превосходит величины $\left\|X^*-X_0\right\|/w_0$, откуда следует неравенство $t^*\leq\left\|X^*-X_0\right\|/w_0$. Из двух последних неравенств вытекает соотношение $t^*=\left\|X^*-X_0\right\|/w_0$.

Управление убегающего игрока, при котором он движется равномерно и прямолинейно с максимальной скоростью по направлению к точке X^*, обозначим V_0^*. Управление преследователей, при котором они движутся равномерно и прямолинейно с максимальной скоростью по направлению к той же точке X^*, обозначим V^*. Пара $\left(V_0^*,V^*\right)$ – пара оптимальных управлений.

Пример. Рассмотрим пример игры с двумя преследователями. Пусть в начальный момент времени игрок E находится в точке $(0,0)$, преследователи P_1 и P_2 находятся в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$, соответственно (рисунок).

Предположим, окружности Аполлония A_1 и A_2 пересекаются в двух точках X^* и X_1^*. В начальный момент времени центры окружностей A_1 и A_2 лежат на оси абсцисс. Точки X^* и X_1^* расположены симметрично относительно оси абсцисс, множество $Q=Q_1\bigcap Q_2$ представляет собой часть плоскости, которая ограничена дугами $X^*a_1X_1^*$ и $X_1^*b_2X^*$. Среди точек множества Q точки X^* и X_1^* наиболее удалены от убегающего игрока.

В этой игре имеется множество пар оптимальных управлений. Одна из таких пар приводит к тому, что все игроки двигаются прямолинейно по направлению к точке X^* с максимальными скоростями. Другая пара приводит к тому, что все игроки двигаются с максимальными скоростями прямолинейно по направлению к точке X_1^*.

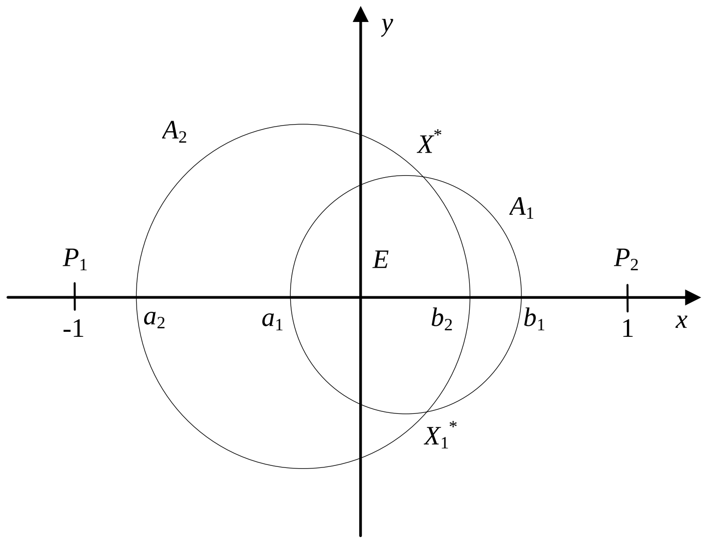

Рисунок. Пример игры с двумя преследователями

Разобьем промежуток времени игры $[0,T]$ на конечное число непересекающихся промежутков. Пусть на некоторых из этих промежутков все игроки двигаются с максимальными скоростями прямолинейно по направлению к точке X^*, а на остальных промежутках двигаются с максимальными скоростями прямолинейно по направлению к точке X_1^*. С течением времени окружности Аполлония A_1 и A_2, а также их точки пересечения X^* и X_1^* изменяют свое положение. Соответствующие пары управлений также оптимальны.

Если все игроки применяют описанные оптимальные управления, то в каждый момент времени три игрока расположены на одной прямой, и преследователи находятся по разные стороны убегающего на равных расстояниях от него. Захват цели происходит в момент времени $\left\|X^*\right\|/w_0$, последняя величина представляет собой оптимальное время преследования.

2. Задача оптимизации групп преследования

Рассмотрим задачу формирования оптимальных групп преследования в случае, когда число убегающих больше одного. Пусть на плоскости имеются m преследователей и n убегающих, причем $m \ge n > 1$. Все игроки обладают простым движением, максимальная скорость каждого преследователя больше максимальной скорости любого убегающего. Для каждого убегающего образуется группа преследователей, которая после его захвата выбывает вместе с ним из игры. Цель считается захваченной, если ее координаты совпадают с координатами одного из преследователей, входящих в группу. Все цели должны быть захвачены. Считается, что для каждой цели заданы минимальное и максимальное количества игроков, которые могут принадлежать группе. Требуется составить группы преследования таким образом, чтобы общее время завершения игры принимало минимальное значение.

Считаем, что в каждой группе игроки действуют следующим образом. Если существует пара оптимальных стратегий $\left(S_0^*, S^*\right)$, то они применяются игроками; время захвата t^* вычисляется по формуле (9).

Если оптимальных стратегий нет, то для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует стратегия преследования S' такая, что для любой стратегии уклонения S_0 справедливо неравенство $T\left(X^u(0), S_0, S'\right) \le t^* + \varepsilon$; здесь число t^* определяется формулой (9). Поскольку $t^* \le \sup_{S_0} T\left(X^u(0), S_0, S'\right)$, то существует стратегия преследования S_0' такая, что выполняется неравенство $t^* - \varepsilon \le T\left(X^u(0), S_0', S'\right)$. Считаем, что применяется пара стратегий $\left(S_0', S'\right)$. Так как число ε можно выбрать сколь угодно близким к нулю, то в такой группе для вычисления времени захвата цели также используем формулу (9).

Пусть целочисленный вектор $J = \left(j_1, j_2, \ldots, j_m\right)$ задает распределение преследователей по группам. Число j_i означает номер цели, которую преследует i-й преследователь, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j_i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Если $j_i = 0$, i-й преследователь не принимает участия в погоне. Обозначим $t_j^*(J)$ оптимальное время преследования в j-й группе (относящейся к j-й цели). Пусть натуральное число $k_j(J)$ равно количеству преследователей в j-й группе. Задачу оптимизации групп преследования можно записать следующим образом:

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} t_j^*(J) \to \min_J, \tag{10}$$

$$k_j^{(1)} \le k_j(J) \le k_j^{(2)}, \; j = 1,2,\ldots,n; \tag{11}$$

здесь $k_j^{(1)}, k_j^{(2)}$ задают соответственно минимально возможное и максимально возможное число преследователей в j-й группе.

Входными данными этой задачи являются координаты на плоскости всех игроков в начале игры, их максимальные скорости, числа $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$, m, n. Считаем, что входные данные представляют собой целые числа; максимальные скорости и числа $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$, m, n считаются положительными.

Задачу (10), (11) назовем оптимизация групп преследования (ОГП). В задаче требуется найти оптимальное значение вектора J, который состоит из целых чисел. Поскольку входные данные также являются целыми числами, то уместен вопрос о том, какова алгоритмическая сложность задачи ОГП. Далее доказывается, что в общем случае эта задача является NP-трудной в сильном смысле.

В некоторых частных случаях задача ОГП допускает решение за время, ограниченное полиномом от длины ее описания, т. е. принадлежит классу P. Рассмотрим один из них. Предположим, число преследователей равно числу убегающих, т. е. $m = n$. Для каждой цели должен быть назначен ровно один преследователь. Если один игрок преследует цель, то его оптимальной стратегией является движение с максимальной скоростью по направлению к цели, а оптимальной стратегией убегающего является движение с максимальной скоростью в противоположном от преследователя направлении.

Пусть d_{ij} – начальное расстояние между *i*-м преследователем и *j*-й целью. Оптимальное время захвата цели равно $d_{ij}/(w_{1i}-w_{0j})$, где w_{0j} и w_{1i} означают максимальные скорости убегающего и преследователя соответственно.

Пусть булева переменная x_{ij} принимает значение 1, если *i-й* преследователь назначен на *j*-ю цель, и принимает значение 0 в противном случае. Задачу ОГП можно записать в виде

$$\max_{i,\,j=1,2,\dots,n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{12}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j=1,2,\dots,n, \tag{13}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i=1,2,\dots,n, \tag{14}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \tag{15}$$

здесь $c_{ij} = d_{ij}/(w_{1i}-w_{0j})$, минимум ищется по переменным x_{ij}.

Если в задаче (12)–(15) коэффициенты целевой функции выбрать по формуле $c_{ij} = d_{ij}^2/(w_{1i}-w_{0j})^2$, то множество оптимальных решений не изменится. При этом новые коэффициенты c_{ij} являются рациональными числами. В таком случае для задачи (12)–(15) существуют полиномиальные алгоритмы решения [12], т. е. задача принадлежит классу P.

3. NP- трудность задачи оптимизации групп преследования

Для доказательства NP-трудности задачи ОГП рассмотрим ее частный случай. Считаем, что число преследователей вдвое превышает число убегающих, т. е. $m=2n$, при этом для каждого убегающего должны быть назначены ровно два преследователя, $k_j^{(1)} = k_j^{(2)} = 2$, $j=1,2,\dots,n$. Пусть все *n* убегающих сосредоточены в начале координат, *n* преследователей находятся в точке $(-1,0)$, еще *n* преследователей сосредоточены в точке $(1,0)$.

Считаем, что для любых двух преследователей P_1 и P_2 таких, что P_1 находится в точке $(-1,0)$, а P_2 находится в точке $(1,0)$, и любого убегающего *E* справедливо следующее. Две окружности Аполлония A_1 и A_2 пересекаются или касаются; здесь окружность A_1 относится к паре игроков *E*, P_1, а окружность A_2 – к паре *E*, P_2 (рисунок). Далее приведено условие, необходимое и достаточное для этого. Поскольку все игроки применяют оптимальные управления, одна из точек пересечения этих окружностей представляет собой точку захвата цели. Если таких точек две, X^* и X_1^* (рисунок), то время захвата в обеих одинаково. Для расчетов, производимых далее, можно выбрать любую из этих точек, поскольку нас интересует только время захвата.

Задачу ОГП (10), (11) в рассматриваемом частном случае запишем в виде

$$F(J) = \max_{j=1,2,\dots,n} t_j^*(J) \underset{J}{\to} \min, \tag{16}$$

$$k_j(J) = 2,\ \ j=1,2,\dots,n. \tag{17}$$

Назовем допустимое решение задачи (16), (17) правильным, если оно удовлетворяет следующему условию: в каждой группе преследования один из двух преследователей в начальный момент времени находится в точке $(-1,0)$, а другой в точке $(1,0)$. Справедлива лемма.

Лемма 1. Для каждого решения *J* задачи ОГП (16), (17) существует правильное решение J' такое, что $F(J') \le F(J)$. Существует полиномиальный алгоритм, преобразующий решение *J* в решение J'.

Доказательство леммы содержится в работе [13].

Задачу ОГП (16), (17) в описанном частном случае, для которой допустимыми являются только правильные решения, удовлетворяющие (17), назовем оптимизация групп преследования на прямой (ОГПП). Придадим задаче ОГПП иную форму.

Пусть точка захвата в *j*-й группе $X^* = X_j^*$ имеет координаты x_j, y_j (рисунок). В результате применения оптимальных стратегий все три игрока прибывают в точку X_j^* одновременно, поэтому справедлива система уравнений

$$\begin{cases} (x_j^2 + y_j^2)/w_{0j}^2 = ((x_j \mp 1)^2 + y_j^2)/w_{1j}^2, \\ (x_j^2 + y_j^2)/w_{0j}^2 = ((x_j \pm 1)^2 + y_j^2)/w_{2j}^2, \end{cases}$$

где w_{0j}, w_{1j}, w_{2j} означают соответственно максимальные скорости убегающего игрока и двух догоняющих игроков в *j*-й группе. Перепишем эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \left\|X_j^*\right\|^2 \Big/ w_{0j}^2 = \left(\left\|X_j^*\right\|^2 \mp 2x_j + 1\right) \Big/ w_{1j}^2, \\ \left\|X_j^*\right\|^2 \Big/ w_{0j}^2 = \left(\left\|X_j^*\right\|^2 \pm 2x_j + 1\right) \Big/ w_{2j}^2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\left\|X_j^*\right\|^2$ и x_j, получаем $\left\|X_j^*\right\|^2 = 2w_{0j}^2 \Big/ \left(w_{1j}^2 + w_{2j}^2 - 2w_{0j}^2\right)$. Поэтому $\left(t_j^*(J)\right)^2 = \left\|X_j^*\right\|^2 \Big/ w_{0j}^2 = 2 \Big/ \left(w_{1j}^2 + w_{2j}^2 - 2w_{0j}^2\right)$. Следовательно, задачу ОГПП можно записать в виде

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} 2 \Big/ \left(w_{1j}^2 + w_{2j}^2 - 2w_{0j}^2\right) \xrightarrow[J]{} \min,$$

$$k_j(J) = 2, \; j = 1,2,\ldots,n,$$

или

$$\min_{j=1,2,\ldots,n} \left(w_{1j}^2 + w_{2j}^2 - 2w_{0j}^2\right) \xrightarrow[J]{} \max, \tag{18}$$

$$k_j(J) = 2, \; j = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Задача ОГПП в форме (18), (19) имеет вариант распознавания, в котором вопрос можно сформулировать следующим образом: существует ли допустимый вектор *J* такой, что выполняются неравенства

$$w_{1j}^2 + w_{2j}^2 - 2w_{0j}^2 \ge M, \; j = 1,2,\ldots,n,$$

где M – целое положительное число.

Изложенные рассуждения справедливы только в том случае, если в каждой группе преследования две окружности Аполлония имеют общие точки. Легко доказать, что в *j*-й группе окружности Аполлония имеют общие точки тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\left|w_{2j} - w_{1j}\right| \le 2w_{0j}$.

Справедлива следующая теорема о NP-полноте задачи ОГПП.

Теорема 1. Задача ОГПП является NP-полной в сильном смысле.

Задача ОГП рассматривается в оптимизационной форме. Это значит, что требуется найти оптимальное решение J^*. Справедлива следующая теорема о NP-трудности задачи ОГП.

Теорема 2. Задача ОГП является NP-трудной в сильном смысле.

Теорема 1 и 2 легко выводятся из соответствующих теорем работы [13]. Из теоремы 2 можно сделать выводы о том, какие методы следует применять для решения задачи ОГП. В отличие от некоторых частных случаев, один из которых рассмотрен в разделе 2, в общем случае задача ОГП не может быть решена полиномиальным или псевдополиномиальным алгоритмом (при условии P $\neq$ NP). Для решения подобных задач применяются методы ветвей и границ, методы случайного поиска с локальной оптимизацией, эвристические алгоритмы.

4. Методы оптимизации групп преследования и результаты численных экспериментов

В работе [14] для оптимизации групп преследования построены конкретные версии метода ветвей и границ и метода случайного поиска с локальной оптимизацией.

Здесь подробно рассмотрим метод случайного поиска с локальной оптимизацией. Метод состоит из таких шагов.

1. Случайным образом формируем допустимое решение *J* задачи ОГП. Используя решение *J* в качестве начального, с помощью алгоритма локальной оптимизации A (алгоритм A описан далее) вычисляем локальный оптимум J'.

2. Из всех полученных локальных оптимумов J' запоминаем наилучший. Если выполняется критерий останова, прекращаем вычисления, иначе переходим к шагу 1. □

На шаге 1 решение *J* выбирается согласно равномерному (или близкому к нему) распределению вероятностей на множестве допустимых решений.

В качестве критерия останова можно выбрать достижение заранее заданного числа повторения шага 1 или достижение заранее заданного числа шагов, на протяжении которых наилучшее достигнутое значение целевой функции не изменяется.

Алгоритм локальной оптимизации A, использующий начальное допустимое решение J задачи ОГП, состоит из следующих шагов.

1. Находим номер j_0 группы, время преследования в которой максимально.

2. Поочередно для групп $j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n$ выполняем следующее. Пусть $I_0 = \{i_{01}, i_{02}, \ldots, i_{0k_0}\}$ – множество преследователей, составляющих группу j_0, а $I_1 = \{i_{11}, i_{12}, \ldots, i_{1k_1}\}$ – множество преследователей, составляющих группу j.

Перераспределяя преследователей множества $I_0 \cup I_1$ между группами j_0 и j всеми возможными способами, удовлетворяющими ограничениям (11), образуем множество пар групп. В каждой паре первая группа преследует цель j_0, а вторая – цель j. Пусть время преследования в первой группе равно $\bar{t}_0$, а во второй – $\bar{t}_1$. Выберем пару, в которой общее для обеих групп время преследования $t = \max(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ минимально. Пусть первая группа образована множеством преследователей $I_2 = \{i_{21}, i_{22}, \ldots, i_{2k_2}\}$, а вторая – множеством $I_3 = \{i_{31}, i_{32}, \ldots, i_{3k_3}\}$; при этом $I_0 \cup I_1 = I_2 \cup I_3$. Если время t меньше времени преследования в исходной группе j_0, то группу I_0 заменим группой I_2, а группу I_1 заменим группой I_3. Произведем соответствующие изменения в векторе J и перейдем к шагу 1.

Если не найдена группа j, позволяющая уменьшить максимальное время преследования в группах j_0 и j, вычисления прекращаем. □

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором Pentium® Dual-Core 2,5 GHz. Задачи ОГП формировались случайным образом. При этом все координаты (т. е. x или y) целей и преследователей считались независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[-1; 1]$. Величины скоростей целей и преследователей считались независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезках $[1; 1{,}9]$ и $[2; 2{,}9]$ соответственно.

В таблице 1 приведены характеристики работы метода ветвей и границ в зависимости от количества участников. Для каждой пары значений m и n решено сто задач ОГП, после чего вычислены данные, приведенные в табл. 1. Символами E, M, σ обозначены соответственно среднее время решения задачи, максимальное время решения задачи и стандартное отклонение времени решения в секундах.

Таблица 1. Зависимость времени решения задачи ОГП методом ветвей и границ от чисел m и n

№	m	n	E	M	σ
1	12	6	0.2	8.3	0.9
2	13	6	0.4	13.6	1.5
3	13	7	1.0	27.7	3.6
4	14	7	4.5	108.3	15.7

Вычислительные эксперименты говорят о том, что среднее время решения задачи ОГП методом ветвей и границ быстро растет с ростом чисел m и n, что подтверждается данными табл. 1. Величины E, M, σ, приведенные в табл. 1, свидетельствуют о нестабильном характере работы метода. При фиксированных значениях величин m и n время решения задачи сильно зависит от входных данных и колеблется в широких пределах.

В таблице 2 приведены результаты испытаний метода случайного поиска с локальной оптимизацией. Для каждой пары значений m и n решено сто задач ОГП. Для каждой задачи методом ветвей и границ вычислялось точное оптимальное значение целевой функции t^*. Затем эта же задача решалась методом случайного поиска с локальной оптимизацией. Во всех случаях было найдено оптимальное решение.

Пусть C_0 – количество шагов, выполненных методом случайного поиска с локальной оптимизацией в процессе решения задачи ОГП, т. е. количество выполненных шагов 1 данного метода. Пусть C_1 – суммарное количество выполненных алгоритмом локальной оптимизации A шагов 1 в процессе решения задачи ОГП. Далее символами E_0, M_0, σ_0 обозначены соответственно среднее, максимальное значение и стандартное отклонение величины C_0, а символами E_1, M_1, σ_1 обозначены аналогичные характеристики величины C_1.

Данные таблицы 2 показывают, что для получения оптимального решения методу случайного поиска с локальной оптимизацией достаточно небольшого количества итераций. Количество использованного процессорного времени по сравнению со временем метода ветвей и границ незначительно. Стабильность работы этого метода по сравнению с методом ветвей и границ выше, так как величины σ_i / E_i меньше величин σ / E из табл. 1.

Таблица 2. Зависимость количества итераций метода случайного поиска с локальной оптимизацией от чисел m и n

№	m	n	E_0	M_0	σ_0	E_1	M_1	σ_1
1	12	6	1.3	6	0.8	10.4	50	7.9
2	13	6	2.2	17	2.5	18.1	150	22.9
3	13	7	1.9	15	2.2	18.3	196	26.6
4	14	7	1.5	17	1.8	15.8	217	22.2

Опишем еще один вычислительный эксперимент. Случайным образом генерировались задачи ОГП при условии $m = 2n$. После этого для каждой задачи координаты n преследователей полагались равными координатам целей, так что оптимальное значение целевой функции каждой задачи ОГП оказывалось равным нулю. Задачи решались методом случайного поиска с локальной оптимизацией. Для каждой пары значений m и n решено сто задач ОГП. Отличие от предыдущего эксперимента заключается в больших значениях чисел m и n, при которых решить задачу методом ветвей и границ не удается. Результаты приведены в табл. 3. Данные табл. 3 говорят о стабильной работе метода при указанных размерностях задач. Во всех случаях найдено оптимальное решение. Среднее время решения одной задачи при условиях $m = 400$, $n = 200$ равно 1,0 сек.

Таблица 3. Зависимость трудоемкости метода случайного поиска с локальной оптимизацией от чисел m и n

№	m	n	E_0	M_0	σ_0	E_1	M_1	σ_1
1	100	50	2.2	12	2.2	501.0	2493	452.1
2	200	100	5.0	32	5.4	2650.2	15573	2748.7
3	400	200	38.1	275	51.0	46769.2	327643	61905.4

Из результатов экспериментов можно сделать вывод о высокой точности и скорости метода случайного поиска с локальной оптимизацией даже при значительных размерностях решаемых задач ОГП.

Заключение

В данной работе рассмотрены игры преследования на плоскости с простым движением, в которых принимают участие несколько преследователей и убегающих. Считается, что количество преследователей больше числа убегающих, и скорости преследователей больше скоростей убегающих.

Для захвата целей множество преследователей разбивается на группы, причем для каждого убегающего создается одна группа. После захвата цели все преследователи группы и убегающий выбывают из игры. Считается, что в каждой группе игроки используют оптимальные стратегии. В качестве критерия выступает время захвата.

Доказаны теоремы о NP-полноте и NP-трудности задач оптимизации групп преследования. Эти задачи являются NP-трудными в сильном смысле уже в случае, когда для каждого убегающего необходимо назначить ровно двух преследователей. На основе доказанных теорем сделаны выводы о том, какие методы следует применять для решения задачи ОГП.

Выполненные численные эксперименты позволяют сделать вывод о высокой точности и скорости метода случайного поиска с локальной оптимизацией для рассматриваемого класса задач.

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
2. *Parsons T.D.* Pursuit – Evasion in a graph. Theory and Applications of Graphs. Springer-Verlag, 1976. – P. 426–441.
3. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. – Ижевск: Удмуртский университет, 2009. – 266 с.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
5. *Borie R., Tovey C., Koenig S.* Algorithms and Complexity Results for Pursuit-Evasion Problems // Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), 2009. – P. 59–66.
6. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
7. *Ибрагимов Г.И., Рихсиев Б.Б.* О некоторых достаточных условиях оптимальности времени преследования в дифференциальной игре со многими преследующими // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 4. – С. 16–24.
8. *Иванов Р.П., Ледяев Ю.С.* Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простыми движениями // Труды МИАН СССР. Том 158. – М.: МИАН СССР, 1981. – С. 87–97.
9. *Пашко С.В.* Квазиоптимальные стратегии в дифференциальных играх преследования на плоскости // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 6. – С. 30–43.
10. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Геометрия простого преследования. – Новосибирск: Наука, 1983. – 140 с.
11. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. – Ташкент: ФАН, 1989. – 232 с.
12. *Гордон А.Я.* Один алгоритм решения минимаксной задачи о назначениях // Исследования по дискретной оптимизации. – М.: Наука, 1976. – С. 327–333.
13. *Пашко С.В.* Сложность задач оптимизации преследования на плоскости // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 3. – С. 27–39.
14. *Пашко С.В., Яловец А.Л.* Численные методы решения задач оптимизации преследования // Проблеми програмування. – 2013. – № 4. – С. 74–85.