

К задаче расчета усталостной долговечности при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением

В. П. Голуб, В. И. Крижановский, В. Н. Пелых

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Решается задача расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов из изотропных металлических материалов при комбинированном нагружении симметричными циклическими растяжением–сжатием и кручением. Решение строится на основе нелинейной модели предельного состояния, описывающей зависимость между предельными амплитудами напряжений цикла в виде степенной трансцендентной функции.

Ключевые слова: усталостная долговечность, сплошные цилиндрические образцы, тонкостенные трубчатые образцы, комбинированное нагружение, циклическое растяжение–сжатие, циклическое кручение.

Введение. Одной из основных причин преждевременного выхода из строя многих ответственных элементов конструкций является усталость – источник наиболее опасного и трудно прогнозируемого вида разрушения [1–3]. Особенно актуальной считается проблема усталостных разрушений при многоосном нагружении, в том числе при различных видах комбинированного симметричного нагружения.

Практический интерес представляют задачи расчета усталостной долговечности при комбинированном нагружении симметричными циклическими изгибом и кручением. В этой области накоплен большой объем первичных экспериментальных данных и сформулирован ряд эмпирических соотношений и соотношений на основе критериев усталостного разрушения, описывающих зависимость между предельными амплитудами циклических напряжений растяжения–сжатия и кручения [1, 2, 4–9]. Однако задача расчета усталостной долговечности на основе построенных моделей предельного состояния не решалась.

Ранее [10] построена и апробирована экспериментально [11–13] одномерная модель предельного состояния при асимметричном нагружении. Модель описывает зависимость между амплитудой циклического напряжения и средним напряжением цикла в виде степенной трансцендентной функции. В работах [14–16] на основе построенной модели предельного состояния с использованием метода эквивалентных напряжений решены задачи расчета усталостной долговечности при асимметричном растяжении–сжатии, изгибе и кручении.

В настоящей работе модель предельного состояния в виде степенной трансцендентной функции обобщается на условия комбинированного синфазного нагружения симметричными циклическими растяжением–сжатием и кручением и на этой основе рассчитывается усталостная долговечность.

1. Постановка задачи. Рассматривается усталостное разрушение сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов из изотропных металлических материалов при комбинированном нагружении симметричными циклическими растяжением–сжатием и кручением.

Нормальные $\tilde{\sigma}$ и касательные $\tilde{\tau}$ компоненты двухосного переменного напряженного состояния задаются соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xa} = \sigma_a g(n); & \tilde{\sigma}_{ya} = 0; & \tilde{\sigma}_{za} = 0; \\ \tilde{\tau}_{xya} = \tau_a g(n); & \tilde{\tau}_{yza} = 0; & \tilde{\tau}_{zxa} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}_{xa}, \dots, \tilde{\tau}_{xya}, \dots$ – переменные составляющие нормальных и касательных компонент напряжений растяжения–сжатия и кручения; σ_a, τ_a – амплитудные значения соответствующих переменных составляющих; $g(n)$ – некоторая периодическая функция времени, изменяющаяся в пределах $-1 \dots +1$; n – число циклов нагружения.

Полагаем, что амплитудные значения σ_a и τ_a переменных напряжений растяжения–сжатия и кручения не зависят от времени (стационарный режим), не превышают пределов текучести материала σ_Y и τ_Y и достаточно быстро (частота нагружения $f \geq 5 \dots 10$ Гц) изменяются от цикла к циклу. В этом случае усталостное разрушение реализуется в многоциклового области, где число циклов до разрушения $n_R \geq 10^4$. Кроме того, соотношения (1) описывают условия синфазности напряжений, что согласно теории пластичности адекватно условию простого нагружения [8].

Зависимость между предельными значениями амплитуд напряжений σ_a и τ_a , вызывающими разрушение за одно и то же число циклов нагружения n_R , задается уравнениями

$$\left[\frac{\tau_a}{\tau_n} \right]^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right]^2 = 1 \quad (2)$$

и

$$\left[\frac{\tau_a}{\tau_n} \right]^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right]^2 - \frac{1}{24} \left[\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right]^4 = 1, \quad (3)$$

которые получены из модели предельного состояния

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} - \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right) \right]^\eta = 0 \quad (4)$$

при разложении $\cos(\cdot)$ в (4) в ряд и удержании в нем двух и трех членов, где τ_n и σ_n – ограниченные пределы выносливости при чистом кручении и чистом растяжении–сжатии; η – коэффициент чувствительности материала к нормальным напряжениям при двухосном нагружении. Структура уравнений (2)–(4) аналогична структуре уравнений, задающих предельное состояние при одноосном асимметричном циклическом нагружении [10].

Задача заключается в экспериментальном обосновании моделей предельного состояния (2)–(4) и расчете на основе этих моделей числа циклов до разрушения

$$n_R = F(\sigma_a, \tau_a, c_i), \quad i = \overline{1, k} \quad (5)$$

как функции напряжений σ_a и τ_a , а также набора констант c_i . Число циклов до разрушения n_R трактуется далее как усталостная долговечность.

2. Обоснование модели предельного состояния. Обоснование включает выбор объекта исследования, определение материальных констант модели, расчет предельных значений нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений для нескольких уровней усталостной долговечности n_R и экспериментальную апробацию результатов расчета.

2.1. Объект исследования. Экспериментальная апробация модели предельного состояния (2)–(4) и описанной ниже методики определения материальных констант модели осуществляется на примере усталостного разрушения сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов из стали JIS SNCM8 и тонкостенных трубчатых образцов из стали 45.

Образцы из стали JIS SNCM8 испытывали при температуре $\theta = 24^\circ\text{C}$ и частоте нагружения $f = 5$ Гц. Образцы из стали 45 испытывали при той же температуре и частоте нагружения $f = 33$ Гц. Соответствующие экспериментальные данные приведены в работах [17, 18] соответственно.

2.2. Методика определения материальных констант модели. Определению подлежат коэффициент чувствительности η материала к нормальной компоненте при двухосном нагружении растяжением–сжатием и кручением и коэффициенты уравнений, описывающих связь между ограниченными пределами выносливости τ_n, σ_n и числом циклов до разрушения n_R при чистом кручении и чистом растяжении–сжатии.

Коэффициент η определяется из условия минимизации функционала

$$\Phi(\eta) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} \right) - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}} \right) \right]^\eta \right\}^2, \quad (6)$$

что позволяет наилучшим образом согласовать задаваемые в эксперименте значения напряжений $\sigma_{aj}, \sigma_{nj}, \tau_{aj}, \tau_{nj}$ с линеаризованной предельной диаграммой

$$\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}} \right) \right]^\eta, \quad (7)$$

которая следует из (4) при условии, что значениям σ_{nj} и τ_{nj} соответствует одно и то же число циклов до разрушения n_R .

Значения напряжений σ_{aj} и τ_{aj} базового эксперимента в (6) выбираются исходя из условия эквивалентности влияния нормальных и касательных напряжений на усталостную долговечность n_R . В первом приближении соотношение между напряжениями τ_{aj} и σ_{aj} может быть записано в виде

$$\tau_{aj} = \sigma_{aj} \quad \text{или} \quad \tau_{aj} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{aj}, \quad (8)$$

что соответствует критерию максимальных нормальных напряжений или критерию удельной энергии изменения формы.

Уравнения, описывающие зависимость между ограниченными пределами выносливости σ_n, τ_n и числом циклов до разрушения n_R , задаются в виде

$$n_R = \frac{1}{(1+q_\sigma)D_\sigma(\sigma_n)^{q_\sigma}} \quad \text{и} \quad n_R = \frac{1}{(1+q_\tau)D_\tau(\tau_n)^{q_\tau}}, \quad (9)$$

где коэффициенты q_σ, D_σ и q_τ, D_τ определяются по результатам аппроксимации экспериментальных данных испытаний на усталость при чистом растяжении–сжатии и чистом кручении соответственно.

Задача определения коэффициентов q_σ, D_σ и q_τ, D_τ в (9) сводится соответственно к минимизации функционалов

$$\Phi(q_\sigma D_\sigma) = \sum_{j=1}^s \{ n_{Rj}(\sigma_{aj}) - [(1+q_\sigma)D_\sigma(\sigma_{aj})^{q_\sigma}]^{-1} \}^2 \quad (10)$$

и

$$\Phi(q_\tau D_\tau) = \sum_{j=1}^s \{n_{Rj}(\tau_{aj}) - [(1+q_\tau)D_\tau(\tau_{aj})^{q_\tau}]^{-1}\}^2, \quad (11)$$

где σ_{aj} , τ_{aj} , n_{Rj} – набор дискретных значений амплитуд циклических нормальных и касательных напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

2.3. Экспериментальная апробация моделей предельного состояния. Рассчитываются и апробируются экспериментально диаграммы предельных напряжений сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением. Расчет осуществляется с использованием уравнений (2)–(4), в качестве экспериментальных данных используются результаты, заимствованные из [17, 18].

Значения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ , а также η , рассчитанные по изложенной в подразделе 2.2 методике, приведены в таблице.

Значения коэффициентов q , D и η для образцов из сталей JIS SNCM8 и 45

| Сталь | Образцы | q_σ | D_σ , МПа ^{-q_σ} /цикл | q_τ | D_τ , МПа ^{-q_τ} /цикл | η |
|-----------|--------------|------------|---|----------|---|--------|
| JIS SNCM8 | Сплошные | 15,17 | $2,79 \cdot 10^{-48}$ | 11,98 | $2,43 \cdot 10^{-37}$ | 0,519 |
| | Тонкостенные | 11,29 | $2,11 \cdot 10^{-37}$ | 17,49 | $6,38 \cdot 10^{-51}$ | 0,429 |
| 45 | » | 12,59 | $1,39 \cdot 10^{-37}$ | 16,09 | $1,81 \cdot 10^{-43}$ | 0,450 |

Результаты расчета диаграмм предельных напряжений по уравнениям (2)–(4) с использованием приведенных в таблице коэффициентов показаны на рис. 1.

Как видно, приближенная модель (2) вполне удовлетворительно описывает предельное состояние как сплошных цилиндрических, так и тонкостенных трубчатых образцов. Характерно, что результаты расчетов по приближенной модели (2) практически не отличаются от таковых по точной модели (4), с увеличением нормальной компоненты с экспериментальными данными они согласуются лучше.

3. Расчет усталостной долговечности. Решается задача расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов из изотропных металлических материалов при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением. Решение строится на основе модели предельного состояния (2), достаточно точно удовлетворяющей экспериментальным данным (рис. 1) и близкой по структуре к известным эмпирическим моделям.

3.1. Усталостная долговечность сплошных цилиндрических образцов. Рассчитывается усталостная долговечность n_R сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 в зависимости от амплитуд нормальных σ_a , касательных τ_a и эквивалентных σ_{eqa} напряжений. Решение строится по параметру ν , задающему отношение между амплитудами касательных и нормальных напряжений, $\nu = \tau_a / \sigma_a$.

Для зависимости числа циклов до разрушения n_R от амплитуды нормальных напряжений σ_a из (2) с учетом (9) получим уравнение

$$n_R = \frac{1}{D_\sigma} \{1 - [(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/\eta q_\tau} (\nu \sigma_a)^{1/\eta}\}^{q_\sigma/2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sigma_a}\right)^{q_\sigma}, \quad (12)$$

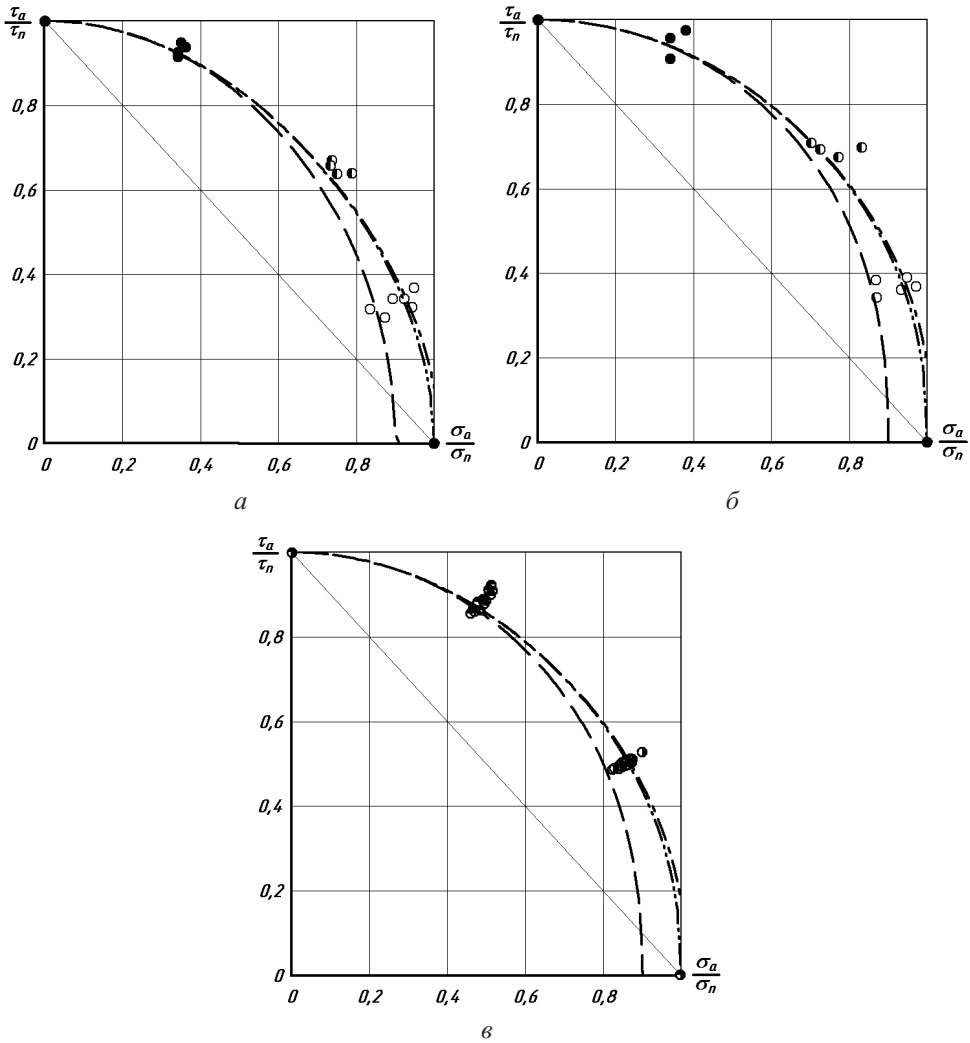


Рис. 1. Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) диаграммы предельных напряжений сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 (а) и тонкостенных трубчатых образцов (б) из сталей JIS SNCM8 и 45 (в) при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением. (Штриховые линии – по уравнению (2), штрихпунктирные – по уравнению (3), штриховые с двумя пунктирами – по уравнению (4); здесь и на рис. 2–4: $\circ - \nu = \tau_a/\sigma_a = 1/4$, $\bullet - \nu = 0,4$, $\ominus - \nu = 1/\sqrt{3}$, $\omin� - \nu = 1,23$, $\bullet - \nu = \sqrt{3}$.)

а для этой зависимости от амплитуды циклических напряжений τ_a – уравнение

$$n_R = \frac{1}{D_\tau} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [(1 + q_\sigma) D_\sigma n_R]^{2/q_\sigma} \left(\frac{\pi \tau_a}{2 \nu} \right)^2 \right\}^{\eta_{q_\tau}} \left(\frac{1}{\tau_a} \right)^{q_\tau}, \quad (13)$$

где $\tau_a = \nu \sigma_a$; $\sigma_a = \tau_a/\nu$.

Результаты расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 по уравнениям (12) и (13) с использованием значений коэффициентов, приведенных в таблице, представлены на рис. 2, а, б. Уравнения (12) и (13) решаются численно методом итераций.

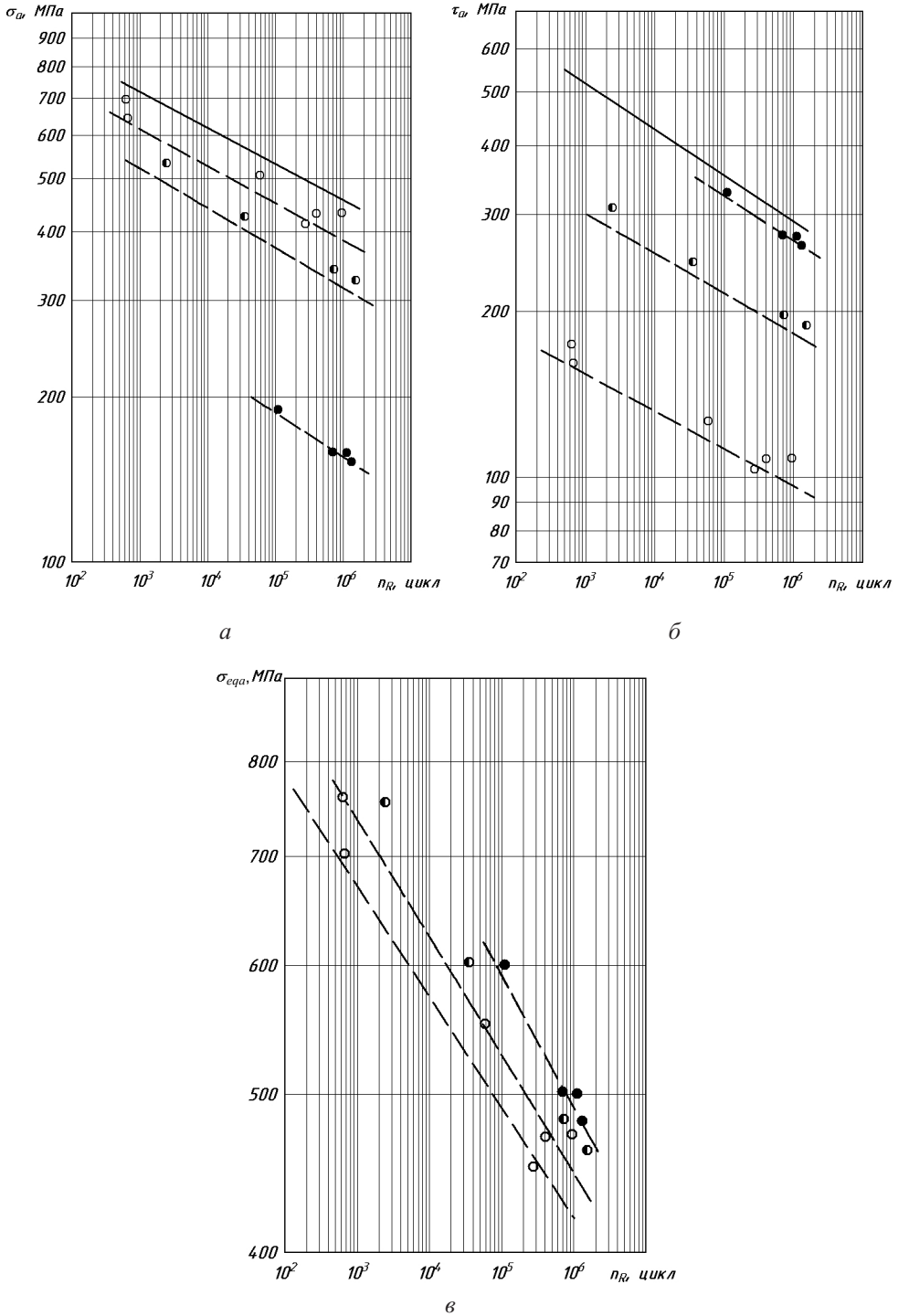


Рис. 2. Расчетные (линии) и экспериментальные [17] (точки) значения усталостной долговечности сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 в зависимости от амплитуд нормальных (а), касательных (б) и эквивалентных (в) напряжений. (Здесь и на рис. 3, 4 сплошными линиями обозначены базовые кривые усталости, которые используются для определения коэффициентов в уравнениях (9).)

В качестве амплитуды эквивалентных напряжений σ_{eqa} выбирается напряжение

$$\sigma_{eqa} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}, \quad (14)$$

которое следует из энергетического критерия Мизеса вида [7–9]

$$\sigma_{eqa} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 + 6(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)}$$

с учетом условий нагружения (1).

Для зависимости числа циклов до разрушения n_R от амплитуды эквивалентных напряжений σ_{eqa} из (2) с учетом (9) и (14) получим уравнение

$$n_R = \frac{1}{D_\sigma} \left\{ 1 - [(1 + q_\tau) D_\tau n_R]^{1/\eta q_\tau} \left(\frac{\sigma_{eqa}}{\sqrt{3 + \nu^{-2}}} \right)^{1/\eta} \right\}^{q_\sigma / 2} \left(\frac{\pi \sqrt{2(1 + 3\nu^2)}}{2 \sigma_{eqa}} \right)^{q_\sigma}, \quad (15)$$

где

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{eqa}}{\sqrt{1 + 3\nu^2}}; \quad \tau_a = \frac{\nu \sigma_{eqa}}{\sqrt{1 + 3\nu^3}}.$$

Результаты расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 по уравнению (15) с использованием значений коэффициентов, приведенных в таблице, представлены на рис. 2,в. Данное уравнение решается численно методом итераций.

3.2. Усталостная долговечность тонкостенных трубчатых образцов. Рассчитывается усталостная долговечность тонкостенных трубчатых образцов из сталей JIS SNCM8 и 45 в зависимости от амплитуд нормальных σ_a , касательных τ_a и эквивалентных σ_{eqa} напряжений. Решение строится по параметру ν , задающему отношению между амплитудами касательных и нормальных напряжений.

Зависимость числа циклов до разрушения n_R от амплитуды нормальных напряжений σ_a рассчитывается по уравнению (12), от амплитуды касательных напряжений τ_a – по уравнению (13).

Результаты расчета усталостной долговечности тонкостенных трубчатых образцов из стали JIS SNCM8 по уравнениям (12) и (13) представлены на рис. 3,а,б, из стали 45 – на рис. 4,а,б. В расчетах используются значения коэффициентов, приведенных в таблице.

Зависимость числа циклов до разрушения n_R от амплитуды эквивалентных напряжений для образцов из стали JIS SNCM8 рассчитывается по уравнению (15). Результаты расчета с использованием приведенных в таблице коэффициентов представлены на рис. 3,в.

В качестве амплитуды эквивалентных напряжений σ_{eqa} для образцов из стали 45 выбирается напряжение [18]

$$\sigma_{eqa} = \sqrt{\sigma_a^2 + \tau_a^2}, \quad (16)$$

действующее на площадке, нормаль к которой образует угол

$$\alpha = \arctg \frac{\tau_a}{\sigma_a}.$$

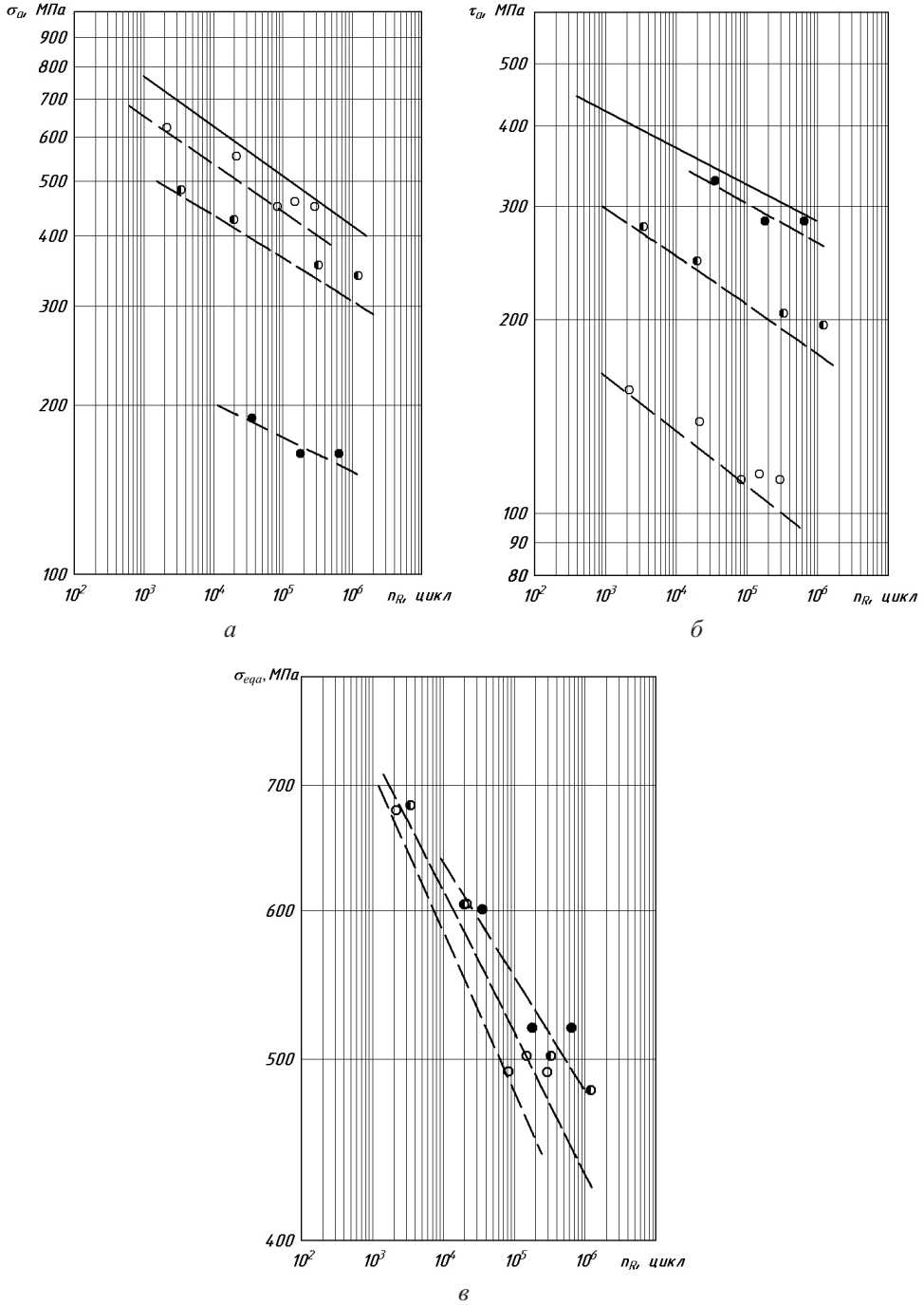


Рис. 3. Расчетные (линии) и экспериментальные [17] (точки) значения усталостной долговечности тонкостенных трубчатых образцов из стали JIS SNCM8 в зависимости от амплитуд нормальных (а), касательных (б) и эквивалентных (в) напряжений.

Для зависимости числа циклов до разрушения n_R от амплитуды эквивалентных напряжений $\sigma_{ср}$, задаваемой согласно (16), из (2) с учетом (9) и (16) получим уравнение

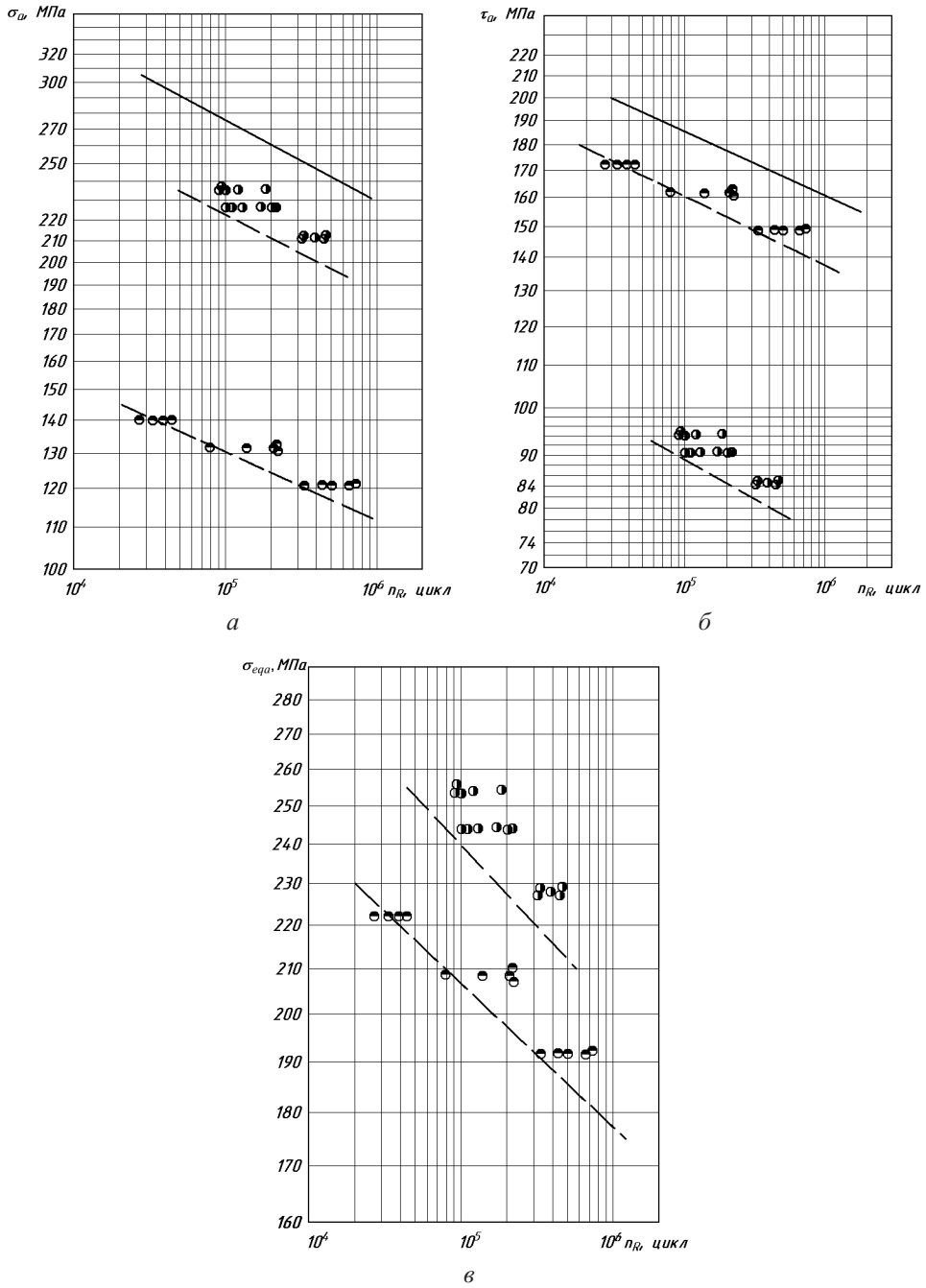


Рис. 4. Расчетные (линии) и экспериментальные [18] (точки) значения усталостной долговечности тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 в зависимости от амплитуд нормальных (а), касательных (б) и эквивалентных (в) напряжений.

$$n_R = \frac{1}{D_\sigma} \left\{ 1 - [(1 + q_\tau) D_\tau n_R]^{1/\eta q_\tau} \left(\frac{\nu \sigma_{eqa}}{\sqrt{1 + \nu^2}} \right)^{1/\eta} \right\}^{q_\sigma / 2} \left(\frac{\pi \sqrt{2(1 + \nu^2)}}{2 \sigma_{eqa}} \right)^{q_\sigma}, \quad (17)$$

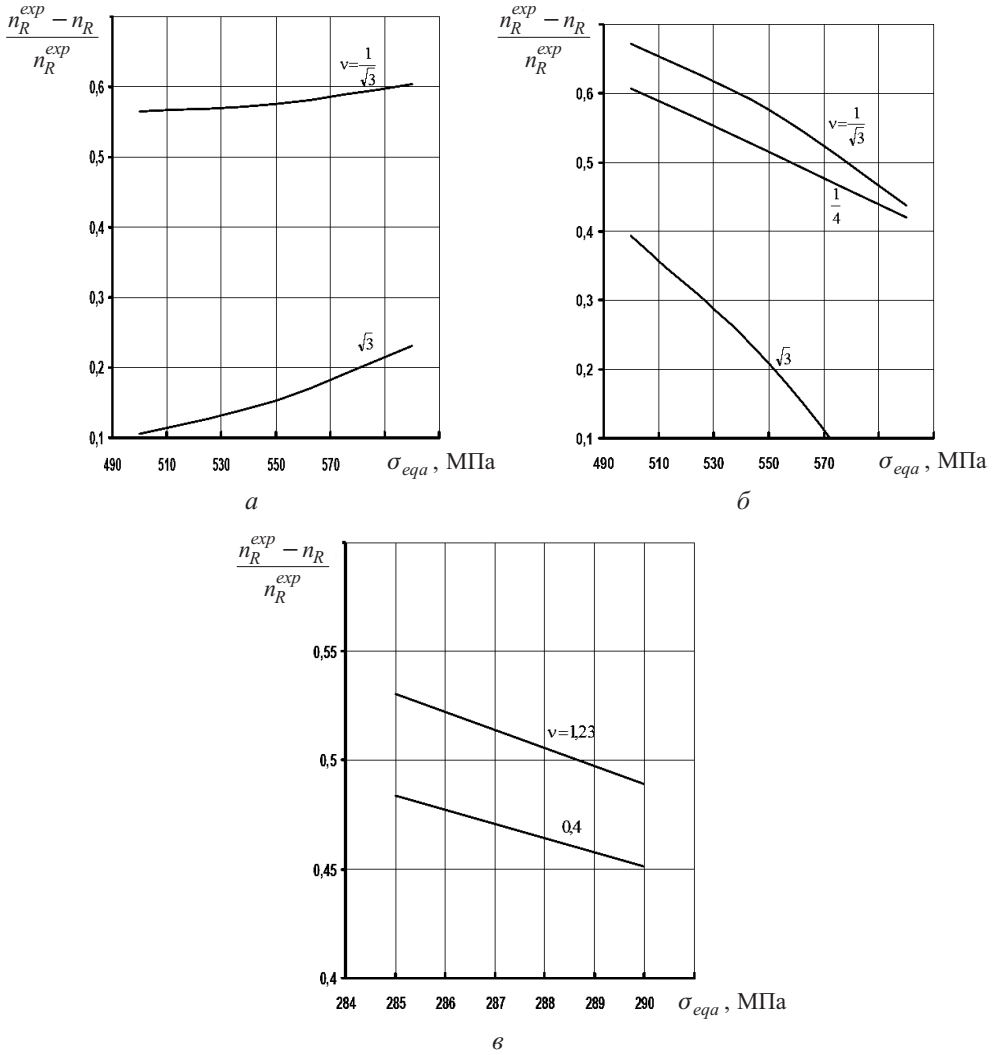


Рис. 5. Зависимость относительной величины живучести сплошных цилиндрических (а) и тонкостенных трубчатых (б, в) образцов из сталей JIS SNCM8 (а, б) и 45 (в) от величины эквивалентных напряжений.

где

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{eqa}}{\sqrt{1+\nu^2}}; \quad \tau_a = \frac{\nu\sigma_{eqa}}{\sqrt{1+\nu^2}}.$$

Результаты расчета усталостной долговечности тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 по уравнению (17) с использованием приведенных в таблице значений коэффициентов представлены на рис. 4,в. Уравнение (17) решается численно методом итераций.

4. Обсуждение результатов. Эффективность использования модели предельного состояния в виде степенной трансцендентной функции для решения задач расчета усталостной долговечности при комбинированном нагружении циклически-ми растяжением-сжатием и кручением обоснована по результатам соответствия между расчетными и экспериментальными данными. Рассчитана и эксперименталь-

но апробирована усталостная долговечность сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов.

В целом, как это видно из рис. 2–4, результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Максимальная погрешность по числу циклов до разрушения составляет 58% и получена для тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 при $\sigma_a = 230$ МПа и $\tau_a = 92$ МПа или соответственно при $\sigma_{eqa} = 248$ МПа. В остальных случаях максимальная погрешность не превышает 30%.

Характерно, что во всех рассмотренных случаях расчетные значения усталостной долговечности оказались меньше полученных экспериментально. Это объясняется тем, что усталостная долговечность рассчитывается в соответствии с уравнениями (12), (13), (15) и (16) по моменту возникновения макротрещины. Период распространения макротрещины как период “живучести” [2] в расчетах фактически не учитывается.

Определим период живучести как разность между экспериментальными n_R^{exp} и расчетными n_R значениями усталостной долговечности. На рис. 5 приведена зависимость относительной величины живучести $(n_R^{exp} - n_R) / n_R^{exp}$ сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов от величины эквивалентных напряжений σ_{eqa} по параметру ν . Видно, что с увеличением напряжений длительность периода живучести в большинстве рассмотренных случаев сокращается, что вполне логично. Исключение составляют результаты расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических образцов при значениях $\nu = 1/\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$ (рис. 5,а). В этом случае длительность периода живучести с повышением напряжений возрастает. Характерно, что во всех исследуемых случаях длительность периода живучести с ростом коэффициента ν при фиксированном значении σ_{eqa} уменьшается.

Заключение. Методы расчета усталостной долговечности элементов конструкций при двухосном комбинированном нагружении, основанные на моделях предельного состояния, устанавливающих зависимость между предельными амплитудами циклических напряжений, являются, по-видимому, наиболее эффективными. В качестве одной из моделей предельного состояния может быть использована модель, в которой зависимость между предельными амплитудами задается в виде степенной трансцендентной функции. Базовыми экспериментами при определении параметров модели могут служить стандартные испытания образцов на усталость при двух простых режимах нагружения и ограниченный идентифицирующий эксперимент на усталость при двухосном нагружении. Предложенный метод расчета усталостной долговечности апробирован экспериментально на задачах расчета усталостной долговечности сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением.

Резюме

Розв’язується задача розрахунку втомної довговічності суцільних циліндричних і тонкостінних трубчастих зразків з ізотропних металічних матеріалів при комбінованому навантаженні симетричними циклічними розтягом–стиском і крученням. Розв’язок побудовано на основі нелінійної моделі граничного стану, що описує залежність між граничними амплітудами напружень циклу у вигляді степеневі трансцендентної функції.

1. Хэйвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости / Пер. с англ. под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.

2. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие / Под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
3. Троценко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Ч. 2. – Киев: Наук. думка, 1994. – 704 с.
4. Gough H. J. and Pollard H. V. The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. – 1935. – **131**. – P. 3 – 103.
5. Gough H. J. Engineering steels under combined cyclic and static stresses // J. Appl. Mech. – 1950. – **17**, No. 2. – P. 113 – 125.
6. Findley W. N. and Mathur P. N. Modified theories of fatigue failure under combined stresses // Proc. SESA. – 1956. – **14**, No. 1. – P. 35 – 46.
7. Серенсен С. В. Об условиях прочности при переменных нагрузках для плоского и объемного напряженного состояния // Инж. сборник. – 1941. – **1**, вып. 1. – С. 3 – 12.
8. Биргер И. А. Условия усталостной прочности при сложном напряженном состоянии // Прочность авиадвигателей. – 1952. – № 7. – С. 130 – 163.
9. Серенсен С. В. О сопротивлении усталости при сложном напряженном состоянии и симметричном цикле // Некоторые вопросы усталостной прочности стали. – М.; Л.: Машгиз, 1953. – С. 102 – 115.
10. Голуб В. П., Крижановский В. И. К оценке предельного состояния материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 1994. – № 4. – С. 3 – 15.
11. Голуб В. П., Крижановский В. И., Погребняк А. Д., Кочеткова Е. С. Усталостная прочность металлических и композитных материалов при асимметричном растяжении–сжатии // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 1. – С. 48 – 58.
12. Желдубовский А. В., Погребняк А. Д., Регульский М. Н. Расчет предельного состояния алюминиевых сплавов при асимметричном циклическом растяжении–сжатии // Пробл. прочности. – 2006. – № 4. – С. 148 – 155.
13. Голуб В. П., Погребняк А. Д., Кочеткова Е. С. Усталостная прочность металлов и композитов при асимметричном многоцикловом кручении // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 2. – С. 19 – 28.
14. Голуб В. П., Пелых В. Н., Погребняк А. Д. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении–сжатии методом эквивалентных напряжений // Вісн. нац. техн. ун-ту України “КПІ”. Машинобудування. – 2010. – № 58. – С. 177 – 182.
15. Пелых В. М. Визначення довговічності конструкційних алюмінієвих сплавів за умови асиметричного розтягнення–стиснення методом еквівалентних напружень // Наук. вісті нац. техн. ун-ту “КПІ”. – 2011. – № 6. – С. 114 – 119.
16. Голуб В. П., Пелых В. Н., Погребняк А. Д. К задаче расчета усталостной долговечности призматических стержней при асимметричном изгибе и кручении // Авиац. косм. техника и технология. – 2012. – № 8 (95). – С. 129 – 133.
17. Tanaka K. and Matsuoka S. The strength of JIS SNCM8 steel under combined alternating stresses // Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials. – Vol. 28: Fracture. – New York: Pergamon Press, 1978. – P. 1161 – 1168.
18. Панфилов Ю. А. Описание предельного состояния при переменной двухосной напряженности и его применение в расчетах. Сообщ. 1. Простое нагружение // Пробл. прочности. – 1981. – № 1. – С. 49 – 53.

Поступила 25. 04. 2013