

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178.5:620.179

Влияние неупругого сопротивления на колебания упругого тела с закрывающейся трещиной при основном и субгармоническом резонансах

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Представлены результаты аналитических и численных исследований по определению влияния неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия в упругом теле повреждений типа дышащих трещин усталости при основном и субгармоническом резонансах.

Ключевые слова: нелинейные колебания, субгармонический резонанс, вибродиагностика усталостного повреждения, закрывающаяся (дышащая) трещина.

Введение. Одним из высокочувствительных методов вибродиагностики наличия в упругом теле малых закрывающихся, или дышащих (breathing) трещин усталости нормального отрыва является определение спектра вынужденных колебаний тела с повреждением в области супер- и субгармонического резонансов, возбуждение которых возможно из-за нелинейности колебательной системы, вызванной указанными трещинами [1–10].

Как аналитические, так и численные методы решения этих задач, как правило, ограничиваются рассмотрением колебательных систем с линейным вязким трением. В этом случае методы вибродиагностики базировались на том, что при наличии закрывающейся трещины в спектре свободных колебаний и основного резонанса упругого тела появляются четные гармоники, относительная амплитуда которых однозначно определяется параметрами трещины независимо ни от абсолютных значений амплитуд гармоник, ни от уровня демпфирующей способности системы, обусловленной линейным вязким трением.

Поэтому цель данного исследования заключалась в рассмотрении возможных особенностей определения вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины при других видах неупругого сопротивления, начиная с оценки его влияния на основной вибродиагностический параметр при основном резонансе – относительную амплитуду второй гармоники.

Основной резонанс. Как и в приведенных ранее [9] приближенных решениях при обычно рассматриваемом линейном вязком трении, полагаем, что при относительно малых размерах трещины можно пренебречь некоторым различием собственных форм колебаний упругого тела на полуциклах его деформирования с закрытой и открытой трещиной, и для данной резонирующей формы колебаний упругое тело можно представить системой с одной степенью свободы с билинейной характеристикой восстанавливающей силы. Вынужденные колебания такой системы при различном неупругом сопротивлении и воздействии гармонического возбуждения с частотой ν в зоне резонанса можно описать дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = \varepsilon q \sin vt. \quad (1)$$

Здесь ω – собственная частота колебаний неповрежденного тела, или тела с закрытой трещиной; q – амплитуда возбуждающей силы; $\varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$ – функция неупругого сопротивления; ε – малый параметр; α – относительное изменение жесткости, или квадрата собственной частоты колебаний упругого тела при открытии трещины,

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\omega_{\tau}}{\omega}\right)^2, \quad (2)$$

где ω_{τ} – собственная частота тела при открытой трещине.

Решение уравнения (1) в случае линейного вязкого трения

$$\varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) = 2h \frac{du}{dt} \quad (3)$$

для стационарных колебаний в области основного резонанса ($\nu \approx (1 \pm 0,01)\omega_0$) при значении $\alpha \leq 0,3$ с достаточным приближением можно представить в виде [9]

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\nu t + \gamma_1) + \sum_{i=2, 4, \dots} A_i \sin(i\nu t + \gamma_i), \quad (4)$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} (1 + 0,6\alpha) A_1; \quad A_i = \frac{2\alpha(1 + 0,6\alpha)}{\pi(i^2 - 1)^2} A_1; \quad \gamma_i = i\gamma_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

а собственную частоту колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной –

$$\omega_0 = \frac{2\omega\omega_{\tau}}{\omega + \omega_{\tau}} = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1 + \sqrt{1-\alpha}} \omega \approx \sqrt{1-0,5\alpha} \omega. \quad (6)$$

Как видно, наличие такой трещины обуславливает присутствие четных гармоник, наиболее представительна из которых – вторая. Относительная амплитуда этой гармоники

$$\bar{A}_{2/1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\alpha(1 + 0,6\alpha)}{9\pi} \quad (7)$$

является характерным показателем степени поврежденности системы типа закрывающейся трещины.

Весьма малая величина этой амплитуды (меньше относительного изменения собственной частоты колебаний [9]), особенно для наиболее важных случаев – обнаружения малых трещин (< 1%), ограничивает надежность ее определения по результатам спектрального анализа колебаний упругого тела при основном резонансе. Однако наличие второй гармоники обуславливает возможность возбуждения субгармонического резонанса порядка 1/2.

Решение (4) с учетом (5) соответствует точному решению уравнения (1) для свободных колебаний ($q = 0$) при пренебрежении затуханием в пределах одного цикла [9]. Принимая, как и ранее [9], в качестве первого приближения $u(t) = A_1 \sin(\nu t + \gamma_1)$ при $\nu \approx \omega_0$, рассмотрим возможное влияние на амплитуду второй гармоники наиболее характерных видов неупругого сопротивления, для которых функцию $f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$ запишем в следующей форме.

1. Вязкое трение пропорционально n -й степени скорости:

$$f\left(u, \frac{du}{dt}\right) = 2h_n \left| \frac{du}{dt} \right|^{n-1} \frac{du}{dt}. \quad (8)$$

2. Эллиптическая петля гистерезиса:

$$f\left(u, \frac{du}{dt}\right) = \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)] \frac{k}{\pi} A_1^n \sqrt{1 - \frac{u^2}{A_1^2}} \text{sign } \frac{du}{dt}. \quad (9)$$

3. Гистерезис, описываемый разными нелинейными зависимостями для восходящей (\rightarrow) и нисходящей (\leftarrow) ветвей петли гистерезиса в соответствии с достаточно физически обоснованной гипотезой Давиденкова, хорошо согласующейся с экспериментальными данными по исследованию рассеяния энергии в конструкционных материалах [10]:

$$\ddot{f}\left(u, \frac{du}{dt}\right) = \mp \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)] \frac{\eta}{n} [(A_1 \pm u)^n - 2^{n-1} A_1^n] \quad \text{при } n > 1. \quad (10)$$

Оценим возможное влияние на спектр установившихся колебаний при основном резонансе ($\nu \approx \omega_0$) указанных видов неупругого сопротивления.

С использованием асимптотического метода нелинейной механики и полученного решения в случае линейного вязкого трения (4) общее решение уравнения (1) во втором приближении можно представить в виде

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\nu t + \gamma_1) + \sum_{i=2, 4, \dots} A_i \sin(i\nu t + \gamma_i) - \frac{g_0(A_1)}{\omega^2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{g_i(A_1) \cos i\varphi + h_i(A_1) \sin i\varphi}{\omega^2(i^2 - 1)}, \quad (11)$$

где A_0 , A_i и γ_i определяются зависимостями (5);

$$g_0(A_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) d\varphi; \quad f_0(A_1, \varphi) = f(A_1 \sin \varphi, \nu A_1 \cos \varphi); \quad \varphi = \nu t; \quad (12)$$

$$g_i(A_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) \cos i\varphi d\varphi; \quad h_i(A_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) \sin i\varphi d\varphi.$$

Амплитуда A_1 и собственная частота ω_0^* колебаний при наличии неупругого сопротивления определяются из уравнений первого приближения:

$$-\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) \cos \varphi d\varphi + q \frac{\sin \gamma_1}{\omega + \nu} = 0, \quad (13)$$

$$\omega_0^{*2} = \left[\omega_0^2 + \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) \sin \varphi d\varphi \right]. \quad (14)$$

Стационарные значения амплитуды вынужденных колебаний A_1 и сдвига фазы γ_1 с приемлемым приближением определяются по формулам линейной теории колебаний:

$$A_1 = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^{*2} - \nu^2)^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 \omega_0^{*4}}}; \quad (15)$$

$$\gamma_1 = \arctg \frac{\frac{\psi}{2\pi} \omega_0^{*2}}{\omega_0^{*2} - \nu^2}, \quad (16)$$

где относительное рассеяние энергии, или коэффициент поглощения в общем случае является функцией частоты и амплитуды колебаний,

$$\psi(\nu, A_1) = \frac{\int_0^{2\pi} f_0(A_1, \varphi) \cos \varphi d\varphi}{0,5\omega_0^{*2} A_1}. \quad (17)$$

Для нелинейного вязкого трения (8) использование формул (14) и (17) определяет $\omega_0^* = \omega_0$ и

$$\psi(\nu, A_1) = 8h_n \frac{\nu^n}{\omega_0^2} A_1^{n-1} \phi(n), \quad (18)$$

где

$$\phi(n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} \varphi d\varphi.$$

Вычисления значений $g_i(A_1)$ и $h_i(A_1)$ (12) показали, что этот вид сопротивления, как и линейное вязкое трение (3), не вносит коррективы в диагностические параметры наличия трещины $A_{i=2, 4, \dots}$, так как $g_i = h_i = 0$ при $i = 2, 4, \dots$.

Однако следует заметить, что при нелинейном вязком трении, как и при линейном, максимальная резонансная амплитуда A_{1m} достигается, строго говоря, не при $\nu = \omega_0$, а при несколько меньшей частоте возбуждающей силы.

Количественно оценим возможное влияние вязкого трения на смещение резонансного пика для разных значений показателя нелинейности трения n при условии равенства амплитуды A_{1m} таковой при линейном ($n = 1, h_1 \equiv h$) трении, что будет выполняться в случае

$$h_n = 2^{n-2} \pi \frac{h^n}{q^{n-1} \phi(n)}.$$

При этом в выражении для соответствующего коэффициента поглощения (18) примем приближенное значение амплитуды A_{1m} , определяемое из выражения (15) при $\nu = \omega_0$:

$$A_{1m} = \frac{1}{\omega_0} n \sqrt{\frac{\pi q}{4h_n \phi(n)}}.$$

Подставив полученное значение $\psi(\nu, A_{1m})$ в выражение (15) и продифференцировав подкоренное выражение по параметру $x = \nu/\omega_0$, получим следующее уравнение для определения величины параметра, соответствующего максимальной резонансной амплитуде:

$$x^{*2} + 2n \frac{h^2}{\omega_0^2} x^{*2(n-1)} - 1 = 0.$$

При $n = 1$ получим известное значение $\nu^*/\omega_0 = \sqrt{1 - 2(h/\omega_0)^2}$. В качестве примера на рис. 1 показана зависимость искомого значения ν^*/ω_0 от показателя нелинейности n для случая $q = 4 \cdot 10^{-5}$ мм/с², $\omega_0 = 1$ и $h/\omega_0 = 0,016$, что соответствует весьма высокому для металлических элементов конструкций значению коэффициента ψ , равному 0,2. Видно, что обусловленным вязким трением сдвигом резонансного пика вполне допустимо пренебречь.

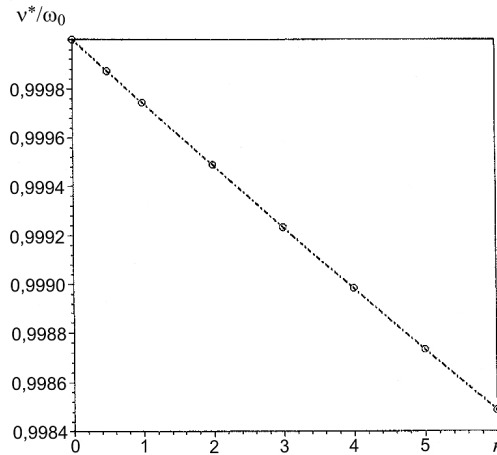


Рис. 1. Зависимость отношения ν^*/ω_0 , определяющего максимальную величину резонансной амплитуды, от показателя нелинейности вязкого трения n .

В случае эллиптической петли гистерезиса (9) имеем

$$\omega_0^* = \omega_0; \quad \psi(A_1) \approx \frac{2-\alpha}{1-0,5\alpha} kA_1^{n-1} = 2kA_1^{n-1}, \quad (19)$$

т.е. влияние этого вида сопротивления на собственную частоту отсутствует, а коэффициент поглощения не зависит от частоты, но при этом возникают дополнительные четные гармоники, основная из которых вторая $b_2 \sin 2\varphi$ с амплитудой

$$b_2 = \frac{h_2(A_1)}{3\pi\omega^2} = -\frac{4\alpha k}{9\pi^2} A_1^2 = -\frac{\psi(A_1)}{\pi(1+0,6\alpha)} A_2.$$

Однако при любом реальном значении ψ изменением амплитуды второй гармоники A_2 можно пренебречь, так как результирующая амплитуда

$$A_2^* = \sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{\pi(1 + 0,6\alpha)} \right)^2} A_2 \approx A_2.$$

В большей мере проявляется влияние гистерезиса, описываемого петлей Давиденкова (10). Так, для квадрата собственной частоты (14) имеем поправку, зависящую от амплитуды основной гармоники:

$$\omega_0^{*2}(A_1) = \omega_0^2 - \frac{(2 - \alpha)\Gamma(2n)\eta A_1^{n-1}\omega^2}{2^{n-1}(1 - 0,5\alpha)n(n+1)[\Gamma(n)]^2} \approx \left[1 - \frac{\Gamma(2n)\eta A_1^{n-1}}{2^{n-2}n(n+1)[\Gamma(n)]^2} \right] \omega_0^2. \quad (20)$$

Значение коэффициента поглощения (17), соответствующее данной петле гистерезиса, также не зависит от частоты:

$$\psi(A_1) = \frac{(2 - \alpha)2^{n+1}(n - 1)\eta}{(1 - 0,5\alpha)n(n + 1) \left[1 - \frac{\Gamma(2n)\eta A_1^{n-1}}{2^{n-2}n(n+1)[\Gamma(n)]^2} \right]} A_1^{n-1} \approx \frac{2^{n+2}(n - 1)\eta}{n(n + 1)} A_1^{n-1}. \quad (21)$$

Однако при этом проявляется наличие четных дополнительных гармоник, основные из которых вторые $a_2 \cos 2\varphi$ и $b_2 \sin 2\varphi$. Значения амплитуд $a_2 = \frac{g_2(A_1)}{3\pi\omega^2}$ и $b_2 = \frac{h_2(A_1)}{3\pi\omega^2}$ и их результирующей амплитуды A_2^* для различных величин параметра n приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Значения амплитуд a_2 , b_2 и A_2^* вторых гармоник, обусловленных гистерезисом (10)

Амплитуда	n , равное		
	1,5	2,0	3,0
a_2	$\frac{0,619}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,375}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,2625}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$
b_2	$\frac{0,2862}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,2862}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,2813}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$
A_2^*	$\frac{0,682}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,4688}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$	$\frac{0,3848}{1 + 0,6\alpha} \psi A_2$

Анализ приведенных данных с учетом соответствующего сдвига фазы показывает, что даже при предельно возможном значении коэффициента поглощения ψ при диагностических виброиспытаниях конструктивных элементов из металлических материалов погрешность в оценке величины амплитуды A_2 не превышает 5%. Более того, проведенные исследования [11] свидетельствуют, что не при квазистатическом, а при гармоническом вибрационном нагружении с амплитудой напряжения ниже предела выносливости для металлических материалов даже с высоким уровнем

демпфирования ($\psi > 0,1$) форма петли гистерезиса регистрируется эллиптической. Однако следует заметить, что описываемое петлей гистерезиса Давиденкова (10) изменение собственной или “уход” резонансной частоты (20) хорошо согласуется с экспериментальными данными [12]. Для петель гистерезиса (9), (10) множитель $\omega^2[1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]$ можно заменить значением ω_0^2 , и при практических расчетах использовать представление функции $f_0(A_1, \varphi)$ в виде, приведенном в табл. 2, где даны и соответствующие им выражения для коэффициента поглощения ψ , которые полностью совпадают с ранее полученными (18), (19), (21).

Т а б л и ц а 2

Функции неупругого сопротивления и соответствующие им коэффициенты поглощения

№ функции $f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$	$f_0(A_1, \varphi)$	$\psi(\nu, A_1)$
(8)	$2h_n \nu^n A_1^n \cos \varphi ^{n-1} \cos \varphi$	$8h_n \frac{\nu^n}{\omega_0^2} A_1^{n-1} \phi(n)$
(9)	$\omega_0^2 \frac{k}{\pi} A_1^n \cos \varphi$	$2k A_1^{n-1}$
(10)	$\mp \frac{\eta}{n} \omega_0^{*2} A_1^n [(1 \pm \sin \varphi)^n - 2^{n-1}]$	$\frac{2^{n+2} (n-1)\eta}{n(n+1)} A_1^{n-1}$

Субгармонический резонанс. Из-за трудностей, возникающих при использовании параметра $\bar{A}_{2/1}$ (7) для надежной вибродиагностики малых трещин, определенное внимание, как отмечалось, уделяется анализу параметров колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной в области супер- и субгармонического резонансов.

Рассмотрим вынужденные колебания упругого тела, описываемые уравнением (1), при субгармоническом резонансе порядка 1/2 ($\nu \approx 2\omega_0$). Как и ранее [9], полагаем, что колебания при субгармоническом резонансе представляют свободные колебания со спектром гармоник, соответствующим основному резонансу (4), поддерживаемые возбуждением с частотой, равной частоте второй гармоники ($i = 2$), и основные вынужденные колебания. Амплитуда резонансных колебаний определяется из баланса подводимой по второй гармонике и рассеиваемой по всем гармоникам энергии. В данном случае достаточно учитывать только первую и вторую гармоники колебаний.

В соответствии с принятым выше положением решение уравнения (1) для установившихся колебаний при $\nu \approx 2\omega_0$ представим с учетом (4) в виде

$$u(t) = A_{0C} + A_{1C} \sin\left(\frac{\nu}{2}t + \gamma_{1C}\right) + A_{2C} \sin(\nu t + \gamma_{2C}) + A_B \sin(\nu t + \gamma_B), \quad (22)$$

где A_{0C} и A_{2C} связаны с амплитудой первой гармоники A_{1C} формулами (5) при $\gamma_{1C} = \frac{1}{2}\gamma_{2C} - \frac{\pi}{4}$ и $\gamma_{2C} \approx \frac{\pi}{2}$, а амплитуда A_B и сдвиг фазы γ_B основных вынужденных колебаний с достаточным приближением определяются из уравнений (15), (16) при $A_1 \equiv A_B$, $\gamma_1 \equiv \gamma_B$, где коэффициент поглощения ψ является в общем случае функцией частоты ν и амплитуды A_B , индекс C при A_0 , A_1 , A_2 , γ_1 и γ_2 соответствует их значению при субгармоническом резонансе.

Учитывая, что при вибродиагностических испытаниях конструктивных металлических элементов $\psi < 0,1$, из формул (15), (16) при $\nu \approx 2\omega_0$ следует

$$A_B \approx \frac{q}{3\omega_0^2}; \quad \gamma_B \approx 0. \quad (23)$$

Рассмотрим удельные значения (на единицу массы) подводимой и рассеиваемой в колебательной системе энергий.

Подводимая энергия ΔW_q , которая поддерживает резонирующие свободные колебания системы, определяется работой вынуждающей силы только на перемещениях их второй гармоники за период первой $T_1 = 4(\pi/\nu)$. Здесь частота первой гармоники будет $\nu_1 = \nu/2 \approx \omega_0^*$. Учитывая при этом, что изменением отношения амплитуд второй A_{2C} и первой A_{1C} гармоник, определяемого из формулы (7), в узкой области резонанса можно пренебречь, получаем

$$\Delta W_q = 2\pi q A_{2C} \sin \gamma_{2C} \approx \frac{4}{9} \alpha(1+0,6\alpha) q A_{1C} \sin \gamma_{2C}.$$

Энергию, рассеиваемую в системе $\Delta W = \Delta W_1 + 2\Delta W_2$ за цикл колебаний по первой и второй гармоникам, удобно выразить через соответствующие коэффициенты поглощения $\psi(\nu_i, A_i) = \frac{2\Delta W_i}{\omega_0^2 A_{iC}^2}$, равные при $\nu = \omega_0^*$ удвоенному значению логарифмического декремента свободных колебаний $\delta(A_1)$, методы экспериментального определения которых хорошо известны [10, 12–14]:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \omega_0^{*2} \left[\psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right) A_{1C}^2 + 2\psi(\nu, A_{2C}) A_{2C}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^{*2} A_{1C}^2 \psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right) \left[1 + 2 \left(\frac{2\alpha(1+0,6\alpha)}{9\pi} \right)^2 \frac{\psi(\nu, A_{2C})}{\psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Из баланса подводимой и рассеиваемой энергий, учитывая, что для приемлемых при данном моделировании упругого тела с закрывающейся трещиной значений $\alpha \leq 0,3$ величиной второго члена в квадратных скобках можно пренебречь, найдем следующее уравнение для определения амплитуды первой гармоники при субгармоническом резонансе упругого тела с закрывающейся трещиной:

$$A_{1C} = \frac{8}{9} \frac{\alpha(1+0,6\alpha)q}{\omega_0^{*2} \psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right)} \sin \gamma_{2C}. \quad (24)$$

Зная для рассматриваемых видов неупругого сопротивления коэффициенты поглощения при частоте $\nu = \omega_0^*$ (табл. 2), получаем формулы для максимальной амплитуды первой гармоники A_{1Cm} при субгармоническом резонансе ($\nu = 2\omega_0^*$, $\gamma_{2C} = \pi/2$) – табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Значения амплитуд первой гармоники при субгармоническом резонансе

№ функции $f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$	A_{1Cm}
(8)	$\frac{1}{h_n \omega_0} \sqrt[n]{\frac{\alpha(1+0,6\alpha)q \sin \gamma_{2C}}{9\phi(n)}}$
(9)	$\sqrt[n]{\frac{4\alpha(1+0,6\alpha)q \sin \gamma_{2C}}{9k\omega_0^2}}$
(10)	$\frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{2\alpha(1+0,6\alpha)n(n+1)q \sin \gamma_{2C}}{9(n-1)\eta\omega_0^{*2}}}$

Колебания по второй резонирующей гармонике представим как колебания эквивалентной системы с собственной частотой ω_3 , равной удвоенной частоте ω_0^* ($\omega_3 = 2\omega_0^*$), т.е. с периодом, составляющим половину периода первой гармоники, и коэффициентом поглощения ψ_3 ,

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right). \tag{25}$$

Тогда неизвестный угол сдвига фазы второй гармоники γ_{2C} можно найти по зависимости, аналогичной (16):

$$\gamma_{2C} = \arctg \frac{\psi_3 \omega_3^2}{2\pi[\omega_3^2 - \nu^2]} = \arctg \frac{\psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1C}\right) \omega_0^{*2}}{\pi[(2\omega_0^*)^2 - \nu^2]}. \tag{26}$$

Амплитудно-частотную характеристику (рис. 2) можно построить и другим способом, используя известное соотношение между коэффициентом поглощения (25) и шириной резонансного пика $\Delta\nu(A) = 2(\nu'' - \omega_3) = 2(\omega_3 - \nu')$ на каком-либо уровне амплитуды A_{1C} [12–14]:

$$\psi_3(A_{1C}) = \frac{2\pi}{K_A} \frac{\Delta\nu(A_{1C})}{\omega_3(A_{1C})}, \tag{27}$$

где коэффициент K_A для случая степенной зависимости ψ от амплитуды колебаний можно представить в виде [12, 13]

$$K_A \approx \sqrt{\left(\frac{A_{1Cm}}{A_{1C}}\right)^2 \left(\frac{\psi(\bar{A}_{1C})}{\psi(A_{1C})}\right)^2} - 1 = \sqrt{\left(\frac{A_{1Cm}}{A_{1C}}\right)^{2n} - 1}. \tag{28}$$

В итоге получим

$$\nu'(\nu'') = 2\omega_0^*(A_{1C}) \left[1 \mp \frac{\psi(A_{1C})}{8\pi} K_A \right]. \tag{29}$$

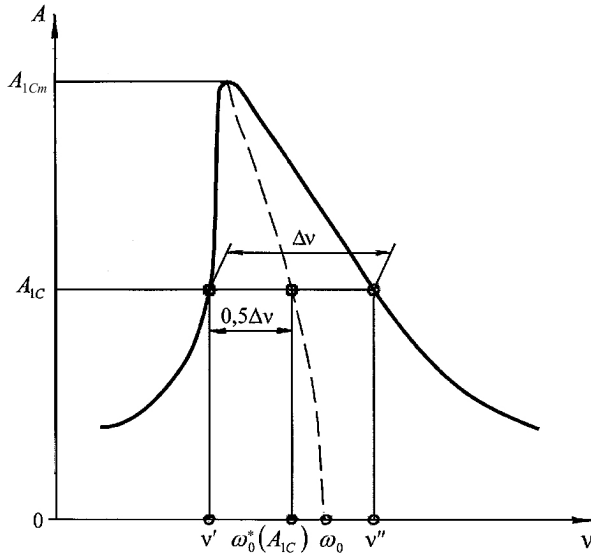


Рис. 2. К определению коэффициента поглощения по ширине резонансного пика амплитудно-частотной характеристики.

Схема резонансного пика (рис. 2) соответствует случаю гистерезисной петли Давиденкова, когда в качестве собственной частоты поврежденной системы следует использовать зависимость (20). Для других рассматриваемых неупругих сопротивлений имеем $\omega_0^*(A) = \omega_0$.

Зависимость (24) позволяет оценить опасность возможного возникновения субгармонического резонанса для конструктивного элемента при наличии в возмущении гармоники с частотой $\nu \approx 2\omega_0$ и амплитудой q . Вычислив для заданных параметров трещины величину α и установив по результатам виброиспытаний при основном резонансе с использованием формулы (27) при $A_{1C} \equiv A_1$ зависимость коэффициента поглощения от амплитуды колебаний ($\psi = \beta A_1^{n-1}$), из (24) при $\gamma_{2C} = \pi/2$ определим максимальное значение резонансной амплитуды:

$$A_{1Cm} = \sqrt[n]{\frac{8\alpha(1+0,6\alpha)q}{9\beta\omega_0}}. \tag{30}$$

Результаты аналитического определения резонансных амплитуд субгармонических колебаний. В качестве примера на рис. 3 представлены результаты вычисления амплитудно-частотной зависимости $A_{1C}(\nu)$ для первой резонирующей гармоники в области субгармонического резонанса порядка 1/2 с использованием зависимости (24), (26) и (29) для более сложного вида неупругого сопротивления (10). Расчеты проводились для случая $\alpha = 0,2$ при собственной частоте неповрежденной системы $\omega = 1$, амплитуде возмущающей силы $q = 3,52 \cdot 10^{-4}$ мм/с² и значениях параметров петли гистерезиса $\eta = 18,63$, $n = 2$. Там же показана амплитудно-частотная зависимость для случаев эллиптической петли гистерезиса (9) и нелинейного вязкого трения (8), рассчитанная с использованием формулы (29) при параметрах неупругого сопротивления $n = 2$, $k = 4\eta/3$, $h_2 = \eta/(3\phi(2))$.

Для оценки влияния рассматриваемых видов неупругого сопротивления на величину амплитуды первой гармоники A_{1C} субгармонических колебаний по сравнению с обычно используемым линейным вязким трением были выполнены расчеты для

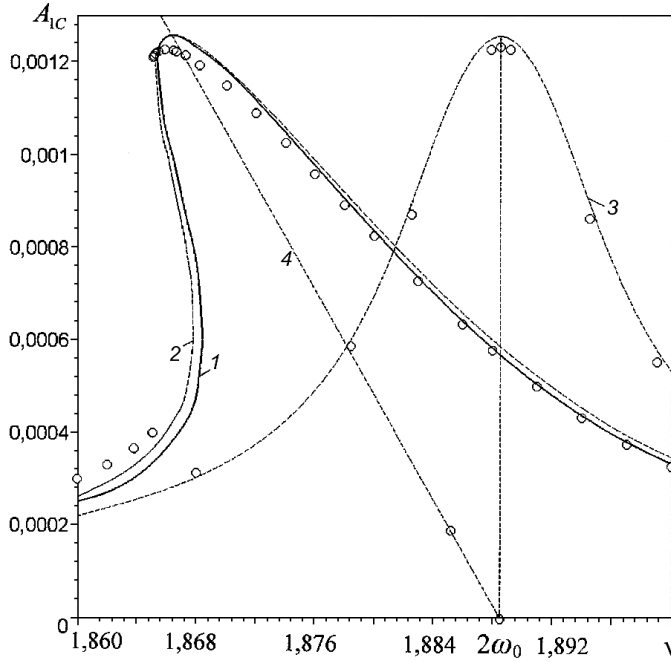


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики колебательной системы (1) при субгармоническом резонансе порядка 1/2 ($\nu \approx 2\omega_0$) для функций неупругого сопротивления (10) – кривые 1, 2 и (8), (9) – кривая 3, определенные с использованием зависимостей (24), (26) – кривая 1 и (29) – кривые 2, 3, 4 – скелетная кривая $\omega_0^*(A_{1C})$, определяемая по зависимости (20). (Точки – данные численного решения уравнения (1).)

случая настроенного субрезонанса ($\nu = 2\omega_0^*$ и $\sin \gamma_{2C} = 1$) при выборе значений h_n , k , η и n (8)–(10) из условия равенства максимальной амплитуды A_1 при основном резонансе ($\nu = \omega_0^*$) $A_{1m} = \frac{2\pi q}{\psi(\omega_0, A_{1m})\omega_0^{*2}}$ таковой при линейном сопротивлении $\bar{A}_{1m} = \frac{q}{2h\omega_0}$ и заданных постоянных значениях амплитуды возмущающей силы q и коэффициента h .

Зная для рассматриваемых видов неупругого сопротивления значения коэффициента поглощения ψ (табл. 2), вначале были определены соответствующие принятому условию эквивалентные значения параметров функций неупругого сопротивления (табл. 4).

Результаты вычисления максимальных амплитуд первой гармоники колебаний при настроенном субгармоническом резонансе показали, что независимо от физической природы неупругого сопротивления амплитуда определяется по единой формуле:

$$A_{1Cm} = \frac{q}{2h\omega_0} \sqrt[n]{\frac{4\alpha(1+0,6\alpha)}{9\pi}} \equiv \sqrt[n]{\frac{4\alpha(1+0,6\alpha)}{9\pi}} A_{1m}, \quad (31)$$

где для функции (10) $\omega_0 \equiv \omega_0^*$, т.е. независимо от природы сопротивления значение A_{1Cm} при заданных параметрах α , h , ω_0 и q определяется показателем степени амплитудной зависимости неупругого сопротивления или соответствующего ему коэффициента поглощения $\psi(A_1)$. Отсутствие проявления возможного влияния час-

Эквивалентные значения параметров функций неупругого сопротивления

Параметр	Эквивалентные значения при $\nu = \omega_0^*$
h_n	$2^{n-2} \pi \frac{h^n}{q^{n-1} \phi(n)} \equiv \frac{\pi h}{2 \omega_0^{n-1} \phi(n) A_{1m}^{n-1}}$
k	$2^n \pi \frac{h^n \omega_0^{n-2}}{q^{n-1}} \equiv \frac{2 \pi h}{\omega_0 A_{1m}^{n-1}}$
η	$\frac{\pi n(n+1) h^n \omega_0^{*n-2}}{2(n-1) q^{n-1}} \equiv \frac{\pi h n(n+1)}{2^n (n-1) \omega_0 A_{1m}^{n-1}}$

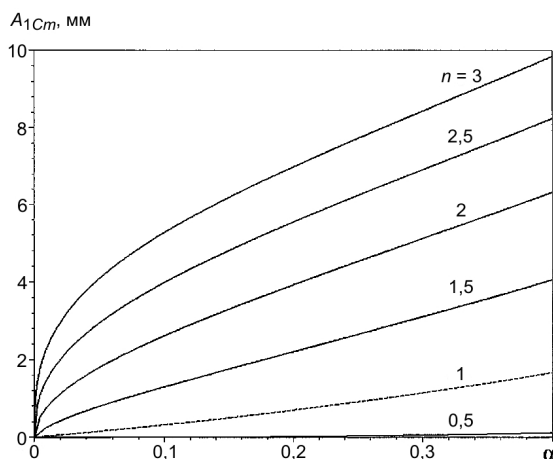


Рис. 4. Зависимость максимальной амплитуды первой гармоники A_{1Cm} при субгармоническом резонансе от параметра α , рассчитанная по формуле (31) при разных значениях показателя степени n амплитудной зависимости неупругого сопротивления.

тоты при использовании функций нелинейного вязкого трения (8), как и линейного, обусловлено исключением из рассмотрения потерь энергии по высшим гармоникам из-за пренебрежимо малых их относительных амплитуд.

Расчетные зависимости $A_{1Cm}(\alpha)$ представлены на рис. 4 для разных показателей степени n при значениях $q = 0,1 \text{ мм/с}^2$, $h/\omega_0 = 0,0024$ или $A_{1m} = 20,83 \text{ мм}$ и $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$. Для сравнения там же штриховой линией показана зависимость для обычно используемого случая линейного вязкого трения ($n = 1$). Как видно, величина рассматриваемых резонансных амплитуд весьма существенно зависит от показателя n . При $n < 1$ значения амплитуд A_{1Cm} меньше, чем в случае линейного вязкого трения, при $n > 1$ – они больше.

Определение вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины. Как видно из решения (22), в области субгармонического резонанса имеют место две гармоники с одинаковой частотой, равной частоте возбуждения ν , близкой к удвоенному значению собственной частоты ω_0 ($\nu \approx 2\omega_0$). При спектральном анализе колебательного процесса будет проявляться одна результирующая вторая гармоника $A_{2\Sigma} \sin(\nu t + \gamma_{2\Sigma})$ с амплитудой

$$A_{2\Sigma} = \sqrt{A_B^2 + A_{2C}^2 + 2A_B A_{2C} \cos(\gamma_B - \gamma_{2C})}, \tag{32}$$

где A_B и γ_B соответствуют значениям (23), A_{2C} и γ_{2C} – соответственно значениям, вычисляемым с использованием (24) из соотношения (7) при $A_1 \equiv A_{1C}$ и $A_2 \equiv A_{2C}$ и формулы (26).

Таким образом в области субгармонического резонанса основным вибрационным показателем наличия трещины будет не отношение A_{1C}/A_{2C} , определяемое формулой (7) и независящее от демпфирующих свойств системы, а отношение A_{1C} к результирующей амплитуде второй гармоники $A_{2\Sigma}$. Тогда, учитывая, что $\gamma_B \approx 0$ (23), а при настроенном резонансе $\nu = 2\omega_0$, $\gamma_{2C} = -\pi/2$, получаем следующую зависимость вибродиагностического параметра $\bar{A}_{1/2} = A_{1Cm}/A_{2\Sigma}$ от параметра α :

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{8\alpha(1+0,6\alpha)}{\psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1Cm}\right)} \left\{ 1 + \frac{1}{9} \left[\frac{(4\alpha(1+0,6\alpha))^2}{9\pi\psi\left(\frac{\nu}{2}, A_{1Cm}\right)} \right]^2 \right\}^{-0,5} \quad (33)$$

В отличие от линейного вязкого трения, для которого коэффициент поглощения ψ и, следовательно, параметр $\bar{A}_{1/2}$ не зависят от абсолютного значения амплитуды A_{1Cm} , определение параметра $\bar{A}_{1/2}$ из соотношения (33) для рассмотренных видов неупругого сопротивления требует знания характера амплитудной зависимости коэффициента ψ и значения амплитуды A_{1Cm} , что снижает практичность использования этого весьма чувствительного параметра.

Для оценки влияния амплитудной зависимости коэффициента поглощения, характеризуемой показателем степени n , используем для значения A_{1Cm} выражение (31), соответствующее условию равенства максимальной амплитуды A_1 при основном резонансе таковой в случае линейного вязкого трения. Тогда (33) примет вид

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{2\alpha(1+0,6\alpha)\omega_0 \left(\frac{9\pi}{4\alpha(1+0,6\alpha)} \right)^{(n-1)/n}}{3\pi h \sqrt{1 + \left[\frac{3\omega_0}{4h} \left(\frac{4\alpha(1+0,6\alpha)}{9\pi} \right)^{(n+1)/n} \right]^2}} \quad (34)$$

В качестве примера на рис. 5 показаны зависимости $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$, полученные по формуле (34) для случая $h/\omega = 0,0008$; $0,0016$ и $0,0064$. Как видно, при наличии амплитудной зависимости коэффициента поглощения, характерной для элементов конструкций из металлических материалов ($n > 1$), чувствительность диагностического параметра $\bar{A}_{1/2}$ существенно возрастает именно в области малых значений параметра α , когда обычно используемое в качестве диагностического параметра изменение собственной частоты малочувствительно и требует тщательной паспортизации элементов конструкций и условий их виброиспытания.

Однако при использовании параметра $\bar{A}_{1/2}$ имеется такой недостаток, как малый абсолютный уровень амплитуды второй гармоники $A_{2\Sigma}$. При возможной весьма высокой чувствительности параметра в случае малых трещин (рис. 5а,б) и низкой демпфирующей способности, например при испытаниях конструктивных элементов из титановых сплавов, надежность определения значения этой амплитуды при спектральном анализе регистрируемого колебательного процесса существенно уменьшается из-за весьма малой ее относительной величины. В этих случаях более надежным вибродиагностическим параметром наличия трещины может быть отно-

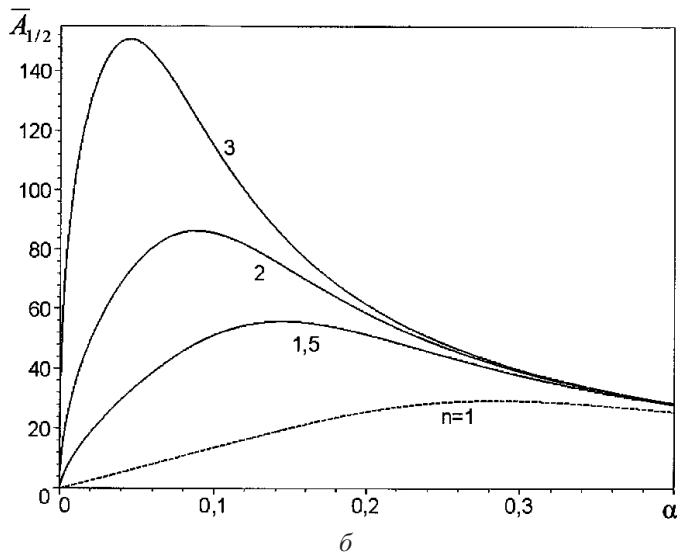
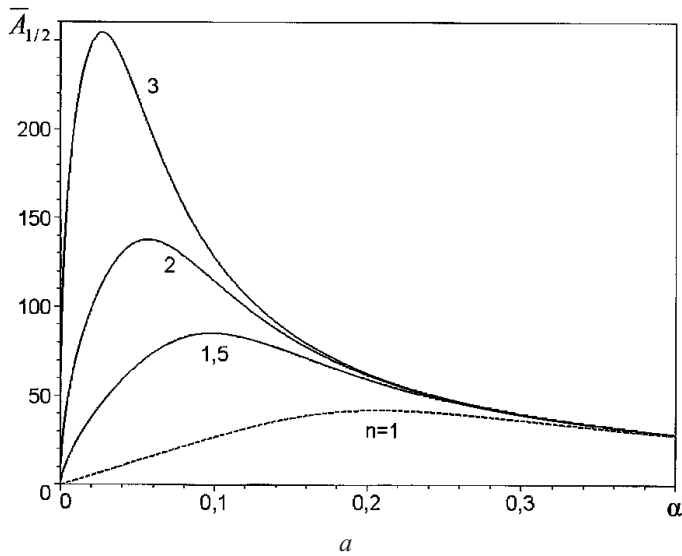
шение максимальных резонансных амплитуд первой гармоники при субгармоническом и основном резонансах, возбуждаемых соответственно при амплитудах возмущающей силы q_{1C} и q_1 :

$$\bar{A}_C = \frac{A_{1Cm}}{A_{1m}} = \frac{4\alpha}{9\pi} (1+0,6\alpha) \frac{\psi(\omega_0^*, A_{1m})\omega_0^{*2}(A_{1m})q_{1C}}{\psi(\omega_0^*, A_{1Cm})\omega_0^{*2}(A_{1Cm})q_1} \approx \frac{4\alpha}{9\pi} (1+0,6\alpha) \frac{\psi(A_{1m})q_{1C}}{\psi(A_{1Cm})q_1}. \quad (35)$$

Для рассмотренных видов неупругого сопротивления имеем $\psi = \text{const}A^{n-1}$ и

$$\bar{A}_C = \sqrt[n]{\frac{4\alpha}{9\pi} (1+0,6\alpha) \frac{q_{1C}}{q_1}}, \quad (36)$$

что при $q_{1C} = q_1$ соответствует отношению A_{1Cm}/A_{1m} , определяемому из (31).



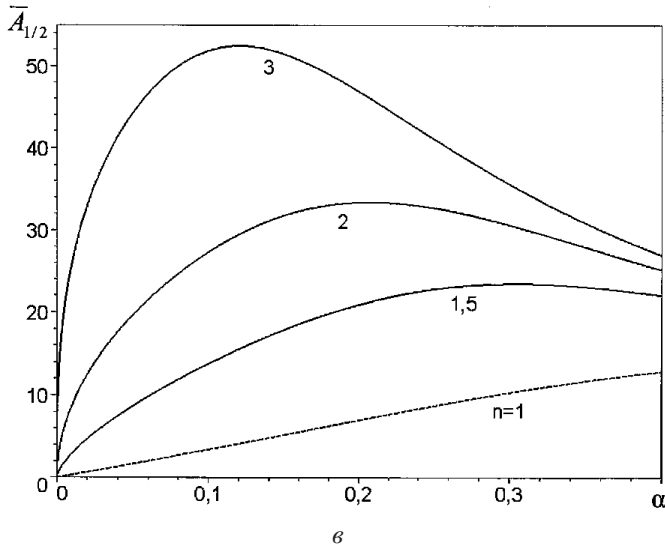


Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды первой гармоники $\bar{A}_{1/2}$ при субгармоническом резонансе от параметра α , рассчитанная по формуле (34) при значениях h/ω , равных 0,0008 – а, 0,0016 – б и 0,0064 – в. (Штриховые линии – зависимость для случая линейного вязкого трения, или для амплитудно-независимого коэффициента поглощения.)

Как видно, разрешающая способность параметра \bar{A}_C повышается при увеличении соотношения q_{1C}/q_1 . На рис. 6 в качестве примера приведены зависимости $\bar{A}_C(\alpha)$ при $q_{1C}/q_1 = 5$. Заметим, что при использовании параметра $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$ в области малых значений α при $n > 1$ и низкой демпфирующей способности колебательной системы ($h/\omega < 0,0064$ или $\psi(A_1) < 0,08$) относительная величина амплитуды второй гармоники увеличивается в четыре раза при обычно регистрируемом ускорении (обозначено индексом а), а не перемещении, т.е. $\bar{A}_{1/2}^a = 0,25\bar{A}_{1/2}$. Для параметра \bar{A}_C такое изменение отсутствует.

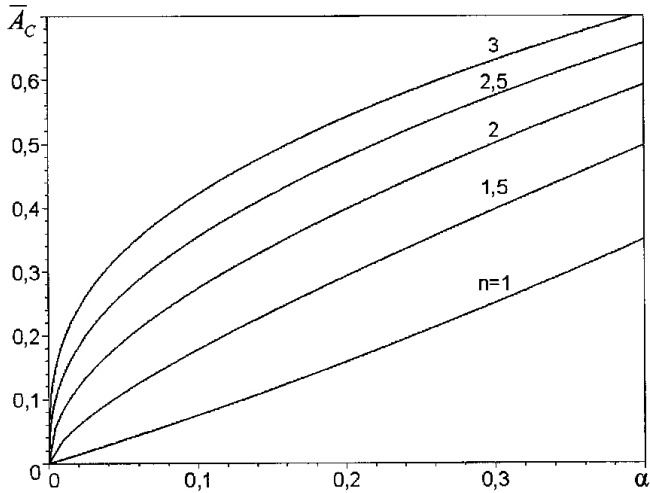


Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды первой гармоники \bar{A}_C при субгармоническом резонансе от параметра α , рассчитанная по формуле (36) при разных значениях показателя степени n амплитудной зависимости неупругого сопротивления.

Необходимо также обратить внимание на возможную неустойчивость субгармонических колебаний в случае слабого резонанса ($\bar{A}_{1/2} < 1$). Как следует из (33), условие $\bar{A}_{1/2} \geq 1$ примерно соответствует значению параметра $\alpha \geq \frac{3}{8} \psi(\bar{A}_{1C})$. Даже при достаточно большом значении $\psi(A_{1Cm}) = 0,04$ для относительно малых амплитуд колебаний A_{1Cm} при субгармоническом резонансе разрешающая величина параметра $\alpha = 0,015$.

Целесообразность использования параметров $\bar{A}_{1/2}$, $\bar{A}_{1/2}^a$ или \bar{A}_C , как видно из формул (34), (36) и данных, приведенных на рис. 5, 6, зависит от характера амплитудной зависимости коэффициента поглощения $\psi(A)$, возможного отношения q_{1C}/q_1 , значения α , определяемого параметрами трещины при заданных параметрах исследуемого конструктивного элемента, и исследуемой резонирующей формы его колебаний.

Для сравнительной оценки чувствительности рассмотренных параметров к показателю нелинейности системы α на рис. 7 представлены зависимости $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$, $\bar{A}_{1/2}^a(\alpha)$, соответствующие эквивалентным значениям коэффициентов неупругого сопротивления h_n, k, η (табл. 4) при $h/\omega = 0,0064$ или $\psi(A_{1m}) = 0,08$, и $\bar{A}_C(\alpha)$ при $\psi(A_1) = \text{const} \cdot A^{n-1}$ и $q_{1C}/q_1 = 5$ для случаев $n = 1$ и 2 , а также относительного изменения собственной частоты колебаний упругого тела $\bar{\Delta} = (\omega - \omega_0)/\omega$. Как видно, параметры $\bar{A}_{1/2}$, $\bar{A}_{1/2}^a$ и \bar{A}_C при наличии амплитудной зависимости коэффициента поглощения ($n > 1$) имеют более высокую чувствительность, особенно $\bar{A}_{1/2}$, $\bar{A}_{1/2}^a$ в важной области малых значений α .

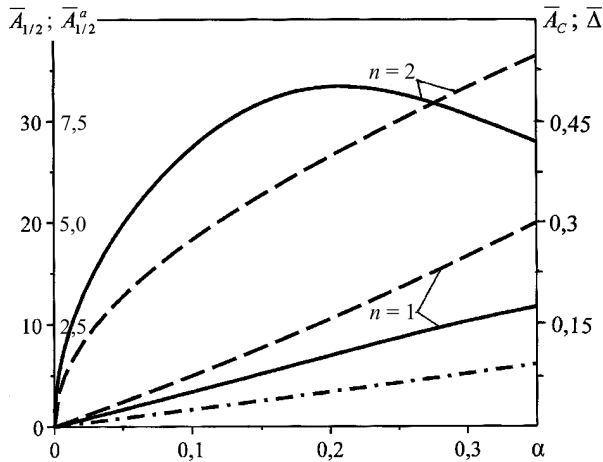


Рис. 7. Расчетные зависимости относительных амплитуд первой гармоники перемещения $\bar{A}_{1/2}$ и ускорения $\bar{A}_{1/2}^a$ (сплошные линии) и \bar{A}_C (штриховые линии) при значениях показателя степени n амплитудной зависимости неупругого сопротивления, равных 1 и 2, а также относительного изменения собственной частоты колебаний упругого тела $\bar{\Delta}$ (штрихпунктирная линия) от параметра нелинейности α .

На примере изгибных колебаний консольной балки прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) при возбуждении субгармонического резонанса первой формы колебаний сосредоточенной гармонической силой, приложенной к свободному концу, оценим, какой глубине a краевой поперечной трещины могут соответствовать значения α . Отношение высоты h сечения балки к ее длине l равно $20/230$, и трещина расположена на расстоянии $0,1l$ от защемления.

Значение параметра α можно определить через энергетическую характеристику повреждения конструктивного элемента κ ($\alpha = \kappa/(1+\kappa)$), равную отношениюращения потенциальной энергии деформации $\Delta\Pi_T$, обусловленного наличием трещины и вычисляемого через коэффициент интенсивности напряжений, к потенциальной энергии деформации неповрежденного элемента Π_0 по резонирующей форме колебаний ($\kappa = \Delta\Pi_T/\Pi_0$) [15, 16].

С использованием этого метода получим, что разрешающему значению $\alpha = 0,015$ или $\kappa = \alpha/(1-\alpha) = 0,01523$ будет соответствовать относительная глубина трещины $\gamma = a/h$, равная 0,05. Такая трещина определяет относительное изменение собственной частоты первой формы колебаний $\bar{\Delta}_1$ менее 0,4% при значениях параметров $\bar{A}_{1/2} = 1$, $\bar{A}_{1/2}^a = 0,25$ и \bar{A}_C в случае $q_{1C}/q_1 = 5$, равном 1% при $n = 1$, 6,7% при $n = 2$ и 15% при $n = 3$.

При использовании для коэффициента интенсивности напряжений формулы [15]

$$K_1 = \frac{6M_T}{bh^{3/2}} \sqrt{\pi\gamma} F_1(\gamma), \tag{37}$$

где M_T – изгибающий момент в сечении расположения трещины;

$$F_1(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \frac{0,923 + 0,199 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}, \tag{38}$$

соотношение между параметром $\alpha = \kappa/(1+\kappa)$ и относительной глубиной трещины γ определяется для приведенного примера консольной балки зависимостью

$$\kappa(\gamma) \approx 7,3 \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma. \tag{39}$$

На рис. 8 представлена соответствующая формуле (39) зависимость $\alpha(\gamma)$. На рассмотренном примере балки можно оценить чувствительность параметров $\bar{A}_{1/2}$, \bar{A}_C (при $q_{1C}/q_1 = 5$) и относительного изменения собственной частоты первой формы колебаний $\bar{\Delta}_1$ к относительной глубине трещины γ (рис. 9).

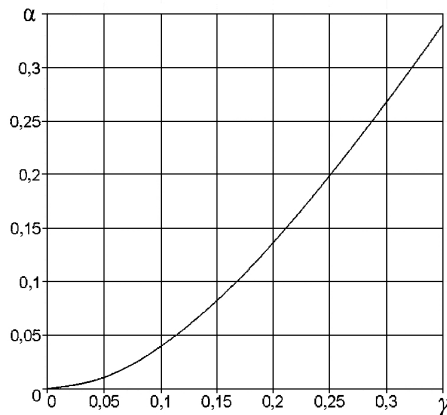


Рис. 8. Соотношение между параметром нелинейности α и относительной глубиной трещины γ для консольной балки, соответствующее зависимости (39).

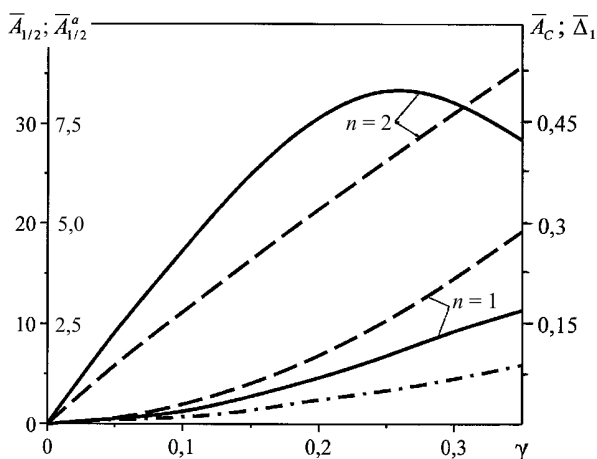


Рис. 9. Расчетные зависимости параметров $\bar{A}_{1/2}^-$ и $\bar{A}_{1/2}^a$ (сплошные линии) и \bar{A}_c (штриховые линии) при значениях показателя степени n амплитудной зависимости коэффициента поглощения $\psi(A)$, равных 1 и 2, а также относительного изменения собственной частоты первой формы колебаний балки $\bar{\Delta}_1$ (штрихпунктирная линия) от относительной глубины γ поперечной трещины.

Оценка достоверности аналитического решения. Выполненные численные решения уравнения (1) при исследуемых видах функции неупругого сопротивления с использованием метода Рунге-Кутты [17] с последующим гармоническим анализом показали удовлетворительное согласование полученных результатов с данными аналитического решения. В качестве примера рассмотрим более сложный вид неупругого сопротивления, описываемого функцией (10). В отличие от остальных видов сопротивления, когда решалась система двух дифференциальных уравнений, соответствующих открытой ($\alpha \neq 0$) и закрытой ($\alpha = 0$) трещине, в данном случае исследовалась система четырех уравнений, описывающих последовательно движения упругого тела по нисходящей ветви петли гистерезиса при открытой и закрытой трещине и восходящей ветви при закрытой и открытой трещине. Это позволило отразить гистерезис с учетом не только различия в характеристиках восстанавливающей силы на полуциклах колебаний тела с открытой и закрытой трещиной, но и в максимальных перемещениях от положения устойчивого равновесия на этих полуциклах. Результаты численного решения как для данного сопротивления, так и для случая нелинейного вязкого трения показаны на рис. 2 точками.

Заметим, что используемая кусочно-линейная характеристика восстанавливающей силы как в аналитическом, так и численном решениях является идеализированной моделью поведения закрывающейся трещины.

Выводы

1. Показано, что влиянием неупругого сопротивления на основной показатель степени рассматриваемой поврежденности упругого тела при основном резонансе – относительную амплитуду второй гармоники – при практических расчетах можно пренебречь.

2. Получены явные аналитические зависимости вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины от параметра нелинейности упругого тела, обусловленной его повреждением.

3. Установлено, что при условии равенства максимальных амплитуд колебаний тела с данной трещиной при основном резонансе значения диагностических пара-

метров определяются показателем степени амплитудной зависимости неупругого сопротивления независимо от его природы.

4. Показано, что наиболее чувствительной к поврежденности упругого тела является относительная амплитуда первой гармоники при субгармоническом резонансе.

Резюме

Представлено результати аналітичних і чисельних досліджень щодо визначення впливу непружного опору на вібродіагностичні параметри наявності у пружному тілі пошкоджень типу дихаючих тріщин утоми при основному і субгармонічному резонансах.

1. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *J. Sound Vibration.* – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
2. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings // *Ibid.* – 2000. – **236**, No. 1. – P. 49 – 60.
3. *Ji J. C. and Hansen Colin H.* On the approximate solution of a piecewise nonlinear oscillator under super-harmonic resonance // *Ibid.* – 2005. – **283**, No. 1-2. – P. 467 – 474.
4. *Bovsunovskii A. P., Surace C., and Bovsunovskii O. A.* The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behavior of a cracked beam at sub- and super-resonance vibrations // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 5. – С. 61 – 67.
5. *Peng Z. K., Lang Z. Q., and Billings S. A.* Crack detection using nonlinear output frequency response functions // *J. Sound Vibration.* – 2007. – **301**, No. 3-5. – P. 777 – 788.
6. *Chatterjee Animesh.* Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions // *Ibid.* – 2010. – **329**, No. 16. – P. 3325 – 3334.
7. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 3. – С. 125 – 141.
8. *Andreaus Ugo and Baragatti Paolo.* Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response // *J. Sound Vibration.* – 2011. – **330**, No. 4. – P. 721 – 742.
9. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // *Пробл. прочности.* – 2012. – № 3. – С. 37 – 49.
10. *Писаренко Г. С.* Рассеяние энергии при механических колебаниях. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 436 с.
11. *Бовсуновский А. П.* Форма петли механического гистерезиса для металлических материалов при гармонических напряжениях ниже предела выносливости. Сообщ. 2. Экспериментальная методика и результаты // *Пробл. прочности.* – 1997. – № 3. – С. 119 – 130.
12. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.

13. *Matveev V. V., Yakovlev A. P., and Vasinyuk I. M.* On determining the damping rate of vibrations of nonlinear systems of the hysteresis type from the resonance curve // *Soviet Appl. Mech.* – 1970. – **6**, No. 1. – P. 81 – 84.
14. *Matveev V. V. and Yakovlev A. P.* Determination of the decrement of vibrations of a nonlinear system of the hysteresis type from the width of the resonance peak of the amplitude–frequency characteristic // *Strength Mater.* – 1976. – **8**, No. 9. – P. 1090 – 1092.
15. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 5. – С. 62 – 83.
16. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Приближенные методы и результаты определения вибродиагностических параметров наличия трещины в стержневых элементах при супер- и субгармоническом резонансах // *Прочность материалов и элементов конструкций: Тр. междунар. науч. конф. “Прочность материалов и элементов конструкций” (Киев, 28–30 сент. 2010 г.)* / Отв. ред. В. Т. Трощенко. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2011. – С. 59 – 77.
17. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ в языках Паскаль, Фортран и Бейсик. – Томск: МП “Раско”, 1991. – 271 с.

Поступила 30. 04. 2013