

## ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

PACS numbers: 05.70.Ln, 62.20.F-, 62.50.-p, 81.40.Jj, 81.40.Lm, 83.10.-y, 83.50.-v

### Закономерности локализованного пластического течения как следствия упругопластического инварианта деформации

Л. Б. Зуев

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
просп. Академический, 2/4,  
634055 Томск, Российская Федерация  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
ул. Фёдора Лыткина, 28-г,  
634050 Томск, Российская Федерация*

Исследованы закономерности генерации макроскопических фазовых автоволн локализации пластического течения на линейных стадиях деформационного упрочнения. Показано, что характеристики упругих и пластических волн образуют инвариантную величину. Существование упругопластического инварианта деформации определяется закономерностями изменения энтропии системы при формировании таких автоволн. Рассмотрены следствия из существования упругопластического инварианта и оценены его роль и возможности в описании закономерностей развития локализованного пластического течения.

**Ключевые слова:** деформация, пластичность, упругость, дефекты, локализация, упрочнение, автоволны.

Досліджено закономірності генерації макроскопічних фазових автохвиль локалізації пластичної течії на лінійних стадіях деформаційного зміцнення. Показано, що характеристики пружних і пластичних хвиль утворюють інваріантну величину. Існування пружньо-пластичного інваріан-

---

Corresponding author: Lev Borisovich Zuev  
E-mail: lbz@ispms.tsc.ru

*Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS,  
2/4 Akademicheskij Ave., 634055, Tomsk, Russia  
National Research Tomsk State University,  
28-g Fedor Lytkin Str., 653050 Tomsk, Russia*

Please cite this article as: L. B. Zuev, Regularities of the Localized Plastic Flow Viewed as Consequences of Elastoplastic Invariant of Strain, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, 38, No. 10: 1335–1349 (2016) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.38.10.1335.

ту деформації визначається закономірностями зміни ентропії системи при формуванні таких автохвиль. Розглянуто наслідки з існування пружно-пластичного інваріанту й оцінено його роль і можливості в описі закономірностей розвитку локалізованої пластичної течії.

**Ключові слова:** деформація, пластичність, пружність, дефекти, локалізація, зміцнення, автохвилі.

Regularities of generation of macroscopic phase autowaves of localized plasticity are investigated for linear stages of work hardening. As shown, the characteristics of autowaves and ultrasound waves form the invariant value. Its occurrence is governed by the behaviour of entropy in the course of autowaves' generation. The consequences of this invariant are considered, and its role and descriptive possibilities for the development of localized plastic flow are discussed.

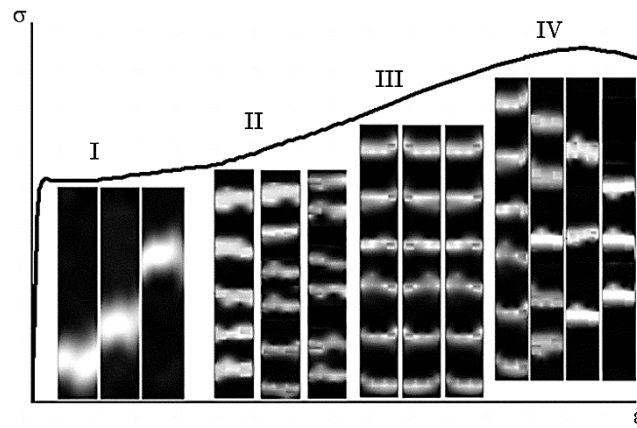
**Key words:** deformation, plasticity, elasticity, defects, localization, hardening, autowaves.

*(Получено 10 мая 2016 г.)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как было показано ранее [1], пластическая деформация твёрдых тел независимо от их природы протекает локализовано, начиная от предела текучести и заканчивая разрушением. При локализации материал самопроизвольно расслаивается на активно деформируемые в данный момент и пассивные объёмы. Их распределение по образцу формирует паттерн макроскопически локализованного пластического течения. Паттерны закономерно эволюционируют в ходе процесса, последовательно приобретая одну из четырёх форм, соответствующих действующему на данной стадии процесса течения [3] закону деформационного упрочнения. Эти формы рассматриваются как моды автоволн локализованного пластического течения [1–3]. В ходе деформации последовательно наблюдаются [1] автоволны переключения, фазовые автоволны, стационарные диссипативные структуры и коллапс автоволны на стадии предразрушения.

Фазовые автоволны локализованного пластического течения наблюдаются на стадиях линейного деформационного упрочнения или лёгкого скольжения (для монокристаллов), для которых  $\sigma \propto \varepsilon$  [4, 5]. Их длина  $\lambda \cong 10^{-2}$  м, а скорость распространения вдоль образца  $V_{aw} \cong 10^{-5} - 10^{-4}$  м/с. Обе характеристики измеряются с достаточной точностью и пригодны для количественного анализа. Характерные паттерны для этого случая показаны на рис. 1. Очевидно, что представления о непрерывной связи пластической деформации с локализационными явлениями важны для понимания физики



**Рис. 1.** Развитие локализованного пластического течения в деформируемом монокристалле стали Гадфильда как эволюция автоволнового процесса. I, II, III и IV — стадии деформационного упрочнения.

**Fig. 1.** The development of localized plastic flow in Hadfield steel single crystal under deformation viewed as autowave process evolution. I, II, III, and IV are the stages of work hardening.

процесса. По этой причине существенными являются количественные данные о кинетике процессов пластического течения.

## 2. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ДЕФОРМАЦИИ

Так, в частности, количественный анализ результатов наблюдений локализованного пластического течения на стадиях лёгкого скольжения и линейного деформационного упрочнения позволил ввести соотношение

$$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \hat{Z} \cong 2/3 \pm 1/4, \tag{1}$$

которое было названо упругопластическим инвариантом деформации. Кроме определённых выше характеристик фазовых автоволн  $\lambda$  и  $V_{aw}$  в инвариант входят также материальные характеристики деформируемой среды: межплоскостное расстояние  $\chi$  и скорость распространения поперечной упругой волны  $V_t$ . Исходные данные для обоснования соотношения (1), приведённые в табл. 1, охватывают металлы и сплавы в разных состояниях. Очевидно, инвариантное соотношение (1) формальным образом связывает характеристики упругой ( $\chi$  и  $V_t$ ) и пластической ( $\lambda$  и  $V_{aw}$ ) деформации. Эта связь должна играть важную роль в описании любых процессов пластического формоизменения.

**ТАБЛИЦА 1.** Исходные данные для металлов и сплавов для введения упругопластического инварианта.  
**TABLE 1.** The original data for metals and alloys for introduction of elastoplastic invariant.

Члены инварианта $\times 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	Металлы и сплавы															
	Cu	Zn	Al	Zr	Ti	V	Nb	$\gamma\text{-Fe}$	$\alpha\text{-Fe}$	Ni	Co	Sn	Mg	Cd	In	Pb
$\lambda V_{av}$	3,6	3,7	7,6	2,9	3,5	2,8	1,8	2,1	2,3	2,1	3,0	2,8	9,9	0,95	2,6	2,7
$\chi V_t$	4,8	5,2	7,5	5,5	6,6	6,1	5,2	6,9	6,7	6,5	6,0	5,3	15,8	3,52	2,2	2,0

Для понимания природы инварианта (1) в развитие работы [4] сформулируем некоторые соображения о природе автоволн локализованного пластического течения на основании термодинамической оценки. Как было экспериментально установлено [1], зависимость скорости распространения автоволн  $V_{aw}$  от коэффициента деформационного упрочнения  $\theta = E^{-1} d\sigma/d\varepsilon$ , где  $E$  — упругий модуль, имеет вид  $V_{aw} \propto \theta^{-1}$ . В литературе ранее также обсуждались и экспериментально исследовались волны напряжений (волны Кольского), связанные с распространением фронтов пластичности. Их скорость распространения  $V_{pw} \propto \theta^{-1/2}$  [6, 7]. Различие функций  $V_{aw} \propto \theta^{-1}$  и  $V_{pw} \propto \theta^{-1/2}$  для двух типов волновых процессов принципиально, и можно ожидать, что генерации каждого из них отвечает разное поведение термодинамических характеристик деформируемых систем, в частности, их энтропии.

Для анализа этого предположения примем, что скорость пластической деформации  $\dot{\varepsilon} \sim V_w$ , и используем кинетическое уравнение Тейлора–Орована для дислокационной деформации [8]  $\dot{\varepsilon} = b\rho_m V_d$ , где  $b$  — модуль вектора Бюргерса,  $\rho_m$  — плотность подвижных дислокаций, а  $V_d$  — скорость их термически активированного движения. Последняя определяется как  $V_d \propto \exp(-G/k_B T)$  [9], где  $G = U - TS + A$  — термодинамический потенциал Гиббса,  $U$  — внутренняя энергия,  $S$  — энтропия,  $A = -\gamma\sigma$  — работа деформирующего напряжения  $\sigma$ , а  $\gamma$  — активационный объём процесса,  $k_B$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — температура. В предположении, что  $\rho_m \approx \text{const}$ ,  $V_d \sim \dot{\varepsilon} \sim V_w$ . Тогда скорость распространения любой волны, связанной с деформацией, есть

$$V_w \sim \dot{\varepsilon} \sim V_d \approx V_t \exp(S/k_B) \exp(-(U - \gamma\sigma)/(k_B T)) \approx V_t \Psi. \quad (2)$$

Исследованные монокристаллы и поликристаллы имеют близкие механические характеристики, и можно считать, что  $-(U - \gamma\sigma)/(k_B T) \approx \text{const}$ . При этом очевидно, что из (2) следует  $\ln \dot{\varepsilon} \sim \ln V_w \propto S$ . Принимая во внимание, что для волн Кольского  $V_w = V_{pw} \propto \theta^{1/2}$ , а для автоволн  $V_w = V_{aw} \propto \theta^{-1}$ , приходим к выводу, что энтропия волн Кольского и энтропия автоволн различным образом ведут себя при деформации. В случае автоволн локализованной пластичности энтропия системы убывает с ростом коэффициента деформационного упрочнения, как на стадии лёгкого скольжения, так и на стадии линейного деформационного упрочнения, то есть, для этих случаев  $\Delta S < 0$ .

Напротив, при генерации волн Кольского энтропия системы возрастает ( $\Delta S > 0$ ). Такой рост характерен для процессов, сопровождающихся диссипацией энергии.

Эти рассуждения подчёркивают принципиальное различие между обнаруженными автоволнами локализованного пластического

течения и другими волновыми процессами, отмечавшимися при пластическом деформировании твёрдых тел [9]. Снижение энтропии деформируемой системы при генерации автоволн показывает, что система является самоорганизующейся [1, 10], поскольку она «без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру» [11].

Очевидно, что перераспределение напряжений при пластическом течении вызывает деформацию, а изменение деформации ведёт к перестройке поля упругих напряжений. Производства энтропии  $\partial S/\partial \epsilon$  и  $\partial S/\partial \sigma$  в этих двух взаимно сопряжённых процессах линейно связаны со скоростями деформации  $\dot{\epsilon}$  и релаксации напряжений  $\dot{\sigma}$ , так что [12]

$$\dot{\epsilon} = \Gamma_{\epsilon\sigma} \partial S/\partial \sigma \quad (3)$$

и

$$\dot{\sigma} = \Gamma_{\sigma\epsilon} \partial S/\partial \epsilon. \quad (4)$$

Для коэффициентов этих уравнений  $\Gamma_{\epsilon\sigma}$  и  $\Gamma_{\sigma\epsilon}$ , согласно принципу симметрии Онзагера [13], справедливо равенство

$$\Gamma_{\epsilon\sigma} = \Gamma_{\sigma\epsilon}. \quad (5)$$

Из соображений размерности можно записать эти коэффициенты в виде

$$\Gamma_{\epsilon\sigma} = \dot{T}\ddot{u}/(\lambda V_{aw})^2 \quad (6)$$

и

$$\Gamma_{\sigma\epsilon} = \dot{T}\ddot{u}/(\chi V_t)^2, \quad (7)$$

где  $\dot{T}$  — скорость изменения температуры, а  $\ddot{u}$  — ускорение. Две последние величины характеризуют локальное поведение материала в очаге пластической деформации. При условиях  $\dot{T} = \text{const}$  и  $\ddot{u} = \text{const}$  мы приходим к равенству

$$\lambda V_{aw} = \chi V_t, \quad (8)$$

которое с точностью до  $\hat{Z}$  определяет упругопластический инвариант (1).

Величина  $\hat{Z}$  может быть получена следующим образом. Сопоставление автоволновых характеристик  $V_{aw}$  и  $\lambda$  с одной стороны и характеристик среды  $V_t$  и  $\chi$  с другой позволяет переписать упруго-

пластический инвариант деформации в виде уравнения

$$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \frac{\lambda}{\chi} \frac{V_{aw}}{V_t} = \hat{Z} \approx 2/3 \pm 1/4 < 1. \quad (9)$$

При такой записи безразмерную величину  $\lambda^* = \lambda/\chi \gg 1$  можно рассматриваться как соотношение между основным и наименьшим масштабам в системе [10]. В свою очередь, безразмерное отношение основной и наибольшей скоростей [10]  $V^* = V_{aw}/V_t \ll 1$  служит мерой выбора скорости автоволны из её возможных значений. Учитывая, что при формировании автоволны, как было показано выше, энтропия системы уменьшается, положим, что общее изменение энтропии деформируемой системы при генерации автоволны есть сумма приращений её конфигурационной и вибрационной частей

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_v = \hat{S} < 0. \quad (10)$$

В этом выражении величина  $\hat{S} < 0$  характеризует общее уменьшение энтропии при формировании автоволны локализации пластического течения.

Можно оценить знаки соответствующих приращений энтропии в уравнении (10). Используя формулу Больцмана для энтропии и высказанные выше соображения, для приращения конфигурационной части имеем:

$$\Delta S_c = k_B \ln(\lambda/\chi) > 0, \quad (11)$$

где  $\lambda/\chi$  рассматривается как возможное число мест зарождения автоволны локализованной пластической деформации.

Для приращения вибрационной энтропии используем соотношение

$$\Delta S_v = k_B \ln(V_{aw}/V_t) < 0, \quad (12)$$

в котором отношение  $V_{aw}/V_t$ , как было сказано, определяет выбор скорости распространения автоволны из спектра её возможных значений  $0 \leq V_{aw} \leq V_t$ .

$$\ln(\lambda/\chi) + \ln(V_{aw}/V_t) = \hat{S}/k_B < 0 \quad (13)$$

и, соответственно

$$\frac{\lambda}{\chi} \frac{V_{aw}}{V_t} = \exp(\hat{S}/k_B) < 1. \quad (14)$$

Очевидно,

$$\widehat{Z} = \exp(\widehat{S}/k_B) = 2/3, \quad (15)$$

откуда  $\widehat{S} = k_B \ln 2/3 \cong -0,4k_B$  на осциллятор [13].

### 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА

Существование упругопластического инварианта деформации (1) имеет ряд важных следствий, касающихся экспериментально наблюдаемых существенных закономерностей развития локализованного пластического течения. Рассмотрим эти следствия и убедимся в том, что они охватывают многие закономерности, ранее установленные экспериментальным образом.

#### 3.1. Скорость распространения автоволн

Уравнение (1) можно продифференцировать по деформации  $\varepsilon$ , получив

$$\lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} + V_{aw} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \widehat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \widehat{Z}V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon}. \quad (16)$$

Записав это уравнение относительно  $V_{aw}$ , мы имеем:

$$V_{aw} = \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^{-1} \left( \widehat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \widehat{Z}V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} \right). \quad (17)$$

Величина  $\chi$  не зависит от пластической деформации, так что  $\widehat{Z}V_t d\chi/d\varepsilon = 0$ . Тогда

$$V_{aw} = \widehat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\lambda} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\lambda}. \quad (18)$$

Простые преобразования уравнения (18) приводят к уравнению

$$V_{aw} = \widehat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\lambda} - \chi \frac{dV_{aw}}{d\lambda} \frac{\lambda}{\chi} \approx V_0 + \frac{\Xi}{\theta}, \quad (19)$$

аналогичному ранее экспериментально полученной зависимости  $V_{aw}(\theta) \propto \theta^{-1}$ , если положить, что коэффициент деформационного упрочнения есть отношение двух структурных параметров  $\lambda$  и  $\chi \ll \lambda$  [14], т.е.  $\theta \approx \chi/\lambda$ .

#### 3.2. Дисперсия автоволн

Запишем уравнение (1) в форме



$$V_{aw} = \frac{\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta}{2\pi} k, \quad (20)$$

где  $\Theta = \widehat{Z}\chi V_t$ . Если  $V_{aw} = d\lambda/dT = d\omega/dk$ , то  $d\omega = (\Theta/2\pi)kdk$ . В этом случае

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{k-k_0} kdk. \quad (21)$$

Таким образом, если принять, что  $\Theta/4\pi \equiv \alpha$ , то закон дисперсии автоволн локализованного пластического течения приобретает квадратичную форму

$$\omega(k) = \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2, \quad (22)$$

существование которой ранее было установлено экспериментально [1].

### 3.3. Влияние структуры материала

Запишем уравнение (1) в форме

$$\lambda = \widehat{Z}\chi \frac{V_t}{V_{aw}}, \quad (23)$$

и примем во внимание, что скорости  $V_t$  и  $V_{aw}$  зависят от размера зерна  $\delta$  [15]. В таком случае дифференцирование соотношения (23) по  $\delta$  даёт

$$\frac{d\lambda}{d\delta} = \widehat{Z}\chi \frac{d}{d\delta} \left( \frac{V_t}{V_{aw}} \right) = \widehat{Z}\chi \left( \frac{V_{aw} dV_t/d\delta - V_t V_{aw}/d\delta}{V_{aw}^2} \right). \quad (24)$$

Преобразование уравнения (24) приводит к

$$d\lambda = \widehat{Z}\chi \left( \frac{dV_t}{d\delta} \frac{1}{V_{aw}} - V_t \frac{dV_{aw}}{d\delta} \frac{1}{V_{aw}^2} \right) d\delta = (a_1\lambda - a_2\lambda^2) d\delta, \quad (25)$$

где  $a_1 = \frac{1}{V_t} \frac{dV_t}{d\delta} = \frac{d \ln V_t}{d\delta}$  и  $a_2 = \frac{1}{\widehat{Z}\chi V_t} \frac{dV_{aw}}{d\delta}$ , поскольку  $V_{aw} = \widehat{Z}\chi V_t \frac{1}{\lambda}$ .

Решением уравнения (25) является логистическая функция

$$\lambda(\delta) = \lambda_0 + \frac{a_1/a_2}{1 + C \exp(-a_1\delta)}, \quad (26)$$

где  $\lambda_0 = \text{const}$ , а  $C$  — константа интегрирования. Зависимость (26)

экспериментально получена в [1] для размеров зерна  $5 \cdot 10^{-3} \leq \delta \leq 15$  мм в алюминии.

### 3.4. Масштабный эффект

Продифференцируем выражение для инварианта (1) по длине образцов  $L$

$$\frac{d}{dL}(\lambda V_{aw}) = \frac{d\lambda}{dL} V_{aw} + \lambda \frac{dV_{aw}}{dL} = \hat{Z} \frac{d}{dL}(\chi V_t) = 0. \quad (27)$$

В этом случае

$$\frac{d\lambda}{dL} = -\frac{\lambda}{V_{aw}} \frac{dV_{aw}}{dL}. \quad (28)$$

При условиях  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$  и  $\frac{dV_{aw}}{dL} \approx \frac{V_{aw}}{L}$  приходим к  $\frac{d\lambda}{dL} \approx \frac{\lambda_0}{V_{aw}} \frac{V_{aw}}{L}$

и  $d\lambda \sim dL/L$ , т.е. к экспериментально установленной ранее зависимости  $\lambda \sim \ln L$  [1].

### 3.5. Автоволновое уравнение

Запишем уравнение инварианта (1) в виде

$$\chi/\lambda = \hat{Z}(V_{aw}/V_t) \quad (29)$$

и примем, что  $\varepsilon \approx \lambda/\chi \gg 1$  — пластическая деформация. Применяя оператор  $\partial/\partial t = D_\varepsilon \partial^2/\partial x^2$ , в котором коэффициент  $D_\varepsilon$  имеет размерность  $L^2 T^{-1}$ , к левой и правой частям этого уравнения, соответственно, получаем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \hat{Z} D_\varepsilon \left( -V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + V_{aw}^{-1} \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} \right) = \hat{Z} D_\varepsilon \left[ -V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V_t/V_{aw})}{\partial x^2} \right]. \quad (30)$$

Скорость распространения ультразвука слабо зависит от деформации [15], так что можно положить, что  $V_t \approx \text{const}$ . Кроме того, в силу (29)  $V_t/V_{aw} \approx \hat{Z}^{-1} \lambda/\chi \approx \varepsilon$ . В этом случае

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\hat{Z} D_\varepsilon V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + D_\varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}, \quad (31)$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению для скорости деформации

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon, \sigma) + D_\varepsilon \varepsilon'' \quad (32)$$

Это — уравнение реакционно-диффузионного типа  $\dot{\zeta} = \varphi(\zeta) + D\zeta''$ , которое обычно возникает при добавлении нелинейной функции  $\varphi(\zeta)$  (точечной кинетики) в правую часть второго уравнения Фика для диффузии  $\dot{\zeta} = D\zeta''$  [16]. Такие уравнения используются при анализе автоволновых процессов в термодинамически открытых системах при адекватном выборе переменных. Из общей теории автоволновых процессов известно, что для строгого их описания в дополнение к уравнению типа (32) для автокаталитического фактора, которым в рассматриваемом случае является пластическая деформация [1], необходимо также уравнение кинетики демпфирующего фактора [1, 16]. Роль последнего в случае пластического течения играют упругие напряжения [1], а требуемое уравнение имеет вид  $\dot{\sigma} = g(\varepsilon, \sigma) + D_\sigma \sigma''$ , где  $g(\varepsilon, \sigma)$  — также нелинейная функция, задающая локальную скорость релаксации напряжений [1]. Используя систему уравнений для  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\sigma}$  при надлежащем выборе явного вида нелинейных функций  $f(\varepsilon, \sigma)$  и  $g(\varepsilon, \sigma)$ , удаётся правильно объяснить различия автоволновых режимов пластического течения, как это было сделано в [1]. Учитывая совпадение размерностей коэффициентов  $D$  и членов инварианта (1), можно предположить, что  $D_\varepsilon \equiv \lambda V_{aw}$  и  $D_\sigma \equiv \chi V_t$ .

### 3.6. Плотность подвижных дислокаций

Запишем инвариант (1) в виде  $D_\varepsilon = \hat{Z}D_\sigma$ . Используя соображения размерности, коэффициентам уравнений автоволновой пластичности можно придать вид  $D_\varepsilon = \frac{d}{dt}(\rho_m^{-1})$  и  $D_\sigma = (F/\rho)^{1/2}$ , где  $F$  — сила натяжения образца, а  $\rho$  — плотность материала. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\rho_m^{-1}) \approx \hat{Z}\sqrt{F/\rho} = \Omega \quad (33)$$

или

$$\frac{d}{dt}(\rho_m^{-1}) \approx -\rho_m^{-2} \frac{d\rho_m}{dt} = \Omega. \quad (34)$$

Отсюда следует

$$\rho_m^{-2} d\rho_m = -\Omega dt, \quad (35)$$

т.е.  $\rho_m \propto -t^{-1}$  или  $\rho_m \propto \varepsilon^{-1}$ . Аналогичная закономерность для области больших деформаций была установлена ранее [17, 18].

### 3.7. Уравнение дислокационной кинетики Тейлора–Орвана

Важнейшая проблема развиваемого автоволнового подхода к пластическому течению связана с необходимостью установить его связь с теорией дислокаций [8, 19]. Известно, что дислокационные теории пластичности базируются, главным образом, на использовании уравнения Тейлора–Орвана, определяющего скорость пластической деформации

$$\partial\varepsilon/\partial t = b\rho_m V_d. \quad (36)$$

Обозначения величин в уравнении (36) были даны выше. Сравнивая уравнения (36) и (31), получаем, что первый член в правой части уравнения (31)  $-\widehat{Z}D_\varepsilon V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2}$  аналогичен выражению  $b\rho_m V_d$  в уравнении Тейлора–Орвана (36). Действительно, пусть  $V_t \approx \chi\omega_D \approx b\omega_D$ , а  $D_\varepsilon = \widehat{Z}D_\sigma = \widehat{Z}\chi V_t$ . Примем также, что  $\frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} \approx \frac{V_{aw}^{-1}}{x^2}$ . Тогда, если дислокации распределены хаотически, то  $x^{-2} \approx l^{-2} \approx \rho_m$ , где  $l$  — пробег дислокаций. Следовательно

$$\widehat{Z}D_\varepsilon V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} \approx -\widehat{Z}^2 \chi V_t^2 b\omega_D \frac{V_{aw}^{-1}}{x^2} \approx -\widehat{Z}^2 b V_t \frac{V_t/V_{aw}}{l^2} \approx -\widehat{Z}^2 V^{*-1} b\rho V_t. \quad (37)$$

Скорость дислокаций  $V_d$ , согласно формуле (2), связана со скоростью  $V_t$ , так что  $V_t \approx V_d \Psi^{-1}$ . Окончательно имеем

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\widehat{Z}^2}{V^{*\Psi}} b\rho_m V_d + D_\varepsilon \partial^2\varepsilon/\partial x^2 = \alpha b\rho_m V_d + D_\varepsilon \partial^2\varepsilon/\partial x^2. \quad (38)$$

Заметим, что подобная связь автоволновых представлений с уравнением дислокационной кинетики была установлена нами ранее [20] на основании принципа непрерывности пластической деформации.

Уравнение (38) отличается от уравнения Тейлора–Орвана (36) наличием члена  $D_\varepsilon \partial^2\varepsilon/\partial x^2$  в правой части. Это означает, что уравнение Тейлора–Орвана является частным случаем общего уравнения дислокационной кинетики (38), которое включает «гидродинамическую»  $f(\varepsilon, \sigma) = b\rho_m V_d \propto V_d$  и «диффузионно-подобную»  $D_\varepsilon \partial^2\varepsilon/\partial x^2 \propto \partial^2\varepsilon/\partial x^2$  компоненты деформационного потока.

Можно утверждать, что автоволновая модель пластического течения и теория дислокаций взаимно дополнительные. При малых плотностях дислокаций использование уравнения (36) позволяет получить правильные результаты. Однако при больших пластиче-

ских деформациях и соответствующих им больших плотностях дефектов теория дислокаций становится нелинейной, и при решении конкретных задач [21] следует применять уравнение (38).

### 3.8. Объяснение возникновения автоволн

В рамках развиваемых представлений находится объяснение формирования автоволн локализованной пластической деформации. Если  $\dot{\varepsilon} = \alpha b \rho_m V_d$ , то задаваемое испытательной машиной условие  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$  может быть удовлетворено только при  $\rho_m V_d = \text{const}$ , т.е. оно требует достаточной плотности подвижных дислокаций и достаточной скорости их движения. Это условие может не выполняться из-за снижения плотности подвижных дислокаций при росте деформации в соответствии с уравнением (35), или за счёт падения скорости движения подвижных дислокаций при уменьшении эффективного напряжения, действующего на дислокацию, от  $\sigma$  до  $\sigma - Gb\sqrt{\rho_d}$  [19] при деформационном упрочнении. В таком случае постоянство скорости пластического течения обеспечивается включением в работу диффузионно-подобного механизма, который описывается членом  $D_\varepsilon \varepsilon''$  в уравнении (38) и порождает новые очаги локализованного пластического течения на расстоянии  $\sim \lambda$  от исходного. Это является причиной формирования автоволны локализованного пластического течения.

### 3.9. Коэффициент деформационного упрочнения

Используем два полученных выше соотношения для скорости распространения автоволны (19) и её дисперсии (22). На их основании можно записать равенство

$$\theta = \frac{\Xi}{2\pi\alpha} \lambda = \frac{\Xi}{2\pi Z \chi V_t} \lambda \approx \pi^{-1} \frac{\Xi}{V_t} \frac{\lambda}{\chi}, \quad (39)$$

из которого следует  $\theta \cong 3 \cdot 10^{-3}$ , что близко к экспериментально наблюдаемым значениям этой величины

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существование упругопластического инварианта деформации является следствием уменьшения энтропии деформируемой системы при генерации фазовой автоволны локализованного пластического течения.

Справедливость следствий из выражения для упругопластического инварианта позволяет рассматривать его как основное уравнение физической теории пластичности реальных сред, основанной на представлениях о макромасштабной локализации пластического течения. При этом автоволновая теория локализованного пластического течения и теория дислокаций являются взаимно дополнительными.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 16-19-10025.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Б. Зуев, В. И. Данилов, С. А. Баранникова, *Физика макролокализации пластического течения* (Новосибирск: Наука: 2008).
2. Е. П. Земсков, А. Ю. Лоскутов, *ЖЭТФ*, **134**, № 3: 406 (2008).
3. В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов, *Успехи физических наук*, **161**, № 1: 45 (1991).
4. Л. Б. Зуев, *Успехи физики металлов*, **16**, № 1: 35 (2015).
5. Л. Б. Зуев, *Известия РАН. Сер. физическая*, **78**, № 10: 1206 (2014).
6. Г. Кольский, *Волны напряжений в твёрдых телах* (Москва: Иностран. лит.: 1955).
7. Л. М. Шестопапов, *Деформирование металлов и волны пластичности в них* (Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР: 1958).
8. U. Messerschmidt, *Dislocation Dynamics during Plastic Deformation* (Berlin: Springer: 2010).
9. D. Caillard and J. L. Martin, *Thermally Activated Mechanisms in Crystal Plasticity* (Oxford: Elsevier: 2003).
10. Ю. Л. Климонтович, *Введение в физику открытых систем* (Москва: Янус-К: 2002).
11. Г. Хакен, *Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам* (Москва: URSS: 2014).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (Москва: Наука: 1988).
13. В. Л. Гиляров, А. И. Слуцкер, *ЖТФ*, **80**, № 5: 94 (2010).
14. А. Л. Ройтбурд, *Физика деформационного упрочнения монокристаллов* (Киев: Наукова думка: 1972), с. 5.
15. L. B. Zuev and V. S. Semukhin, *Philos. Mag. A*, **82**, No. 10: 1183 (2002).
16. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику* (Киев: Наукова думка: 1989).
17. J. J. Gilman, *J. Appl. Phys.*, **36**, No. 11: 2772 (1965).
18. В. З. Бенгус, Е. Д. Табачникова, В. Н. Островерх, *Физика твёрдого тела*, **15**, № 12: 3452 (1973).
19. А. М. Косевич, *Физическая механика реальных кристаллов* (Киев: Наукова думка: 1981).
20. L. B. Zuev and V. I. Danilov, *Philos. Mag. A*, **79**, No. 1: 43 (1999).

21. P. Landau, R. Z. Shneck, G. Makov, and A. Venkert, *Mat. Sci. Eng.*, **3**, No. 3: 012004 (2009).

## REFERENCES

1. L. B. Zuev, V. I. Danilov, and S. A. Barannikova, *Fizika Macrolokalizatsii Plasticheskogo Techeniya* [Plastic Flow Macrolocalization Physics] (Novosibirsk: Nauka: 2008) (in Russian).
2. E. P. Zemskov and A. Yu. Loskutov, *ZhETF*, **134**, No. 3: 406 (2008).
3. V. A. Davydov, V. S. Zykov, and A. S. Mikhailov, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, **161**, No. 1: 45 (1991) (in Russian).
4. L. B. Zuev, *Uspehi Fiziki Metallov*, **16**, No. 1: 35 (2015) (in Russian).
5. L. B. Zuev, *Bull. Rus. Acad. Sci. Physics*, **78**, No. 10: 957 (2014) (in Russian).
6. H. Kolsky, *Stress Waves in Solids* (Oxford: Dover Phoenix Edition: 2003).
7. L. M. Shestopalov, *Deformirovanie Metallov i Volny Plastichnosti v Nih* [Deformation of Metals and Plasticity Waves within Them] (Moscow–Leningrad: AS of USSR Publ.: 1958) (in Russian).
8. U. Messerschmidt, *Dislocation Dynamics during Plastic Deformation* (Berlin: Springer: 2010).
9. D. Caillard and J. L. Martin, *Thermally Activated Mechanisms in Crystal Plasticity* (Oxford: Elsevier: 2003).
10. Yu. L. Klimontovich, *Vvedenie v Fiziku Otkrytykh Sistem* [An Introduction of Open System Physics] (Moscow: Yanus-K Publ.: 2002) (in Russian).
11. H. Haken, *Information and Self-Organization* (Berlin: Springer: 1988).
12. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Gidrodinamika* [Hydrodynamics] (Moscow: Nauka: 1988) (in Russian).
13. V. L. Gilyarov and A. I. Slutsker, *ZhTF*, **80**, No. 5: 94 (2010).
14. A. L. Roytburd, *Fizika Deformatsionnogo Uprochneniya Monokristallov* (Kiev: Naukova Dumka: 1972), p. 5 (in Russian).
15. L. B. Zuev and B. S. Semukhin, *Philos. Mag. A*, **82**, No. 10: 1183 (2002).
16. A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, *Vvedenie v Nelineynuyu Fizicheskuyu Mekhaniku* [An Introduction of Nonlinear Physical Mechanics] (Kiev: Naukova Dumka: 1989) (in Russian).
17. J. J. Gilman, *J. Appl. Phys.*, **36**, No. 11: 2772 (1965).
18. V. Z. Bengus, E. D. Tabachnikova, and V. N. Ostroverkh, *Fizika Tverdogo Tela*, **15**, No. 12: 3452 (1973) (in Russian).
19. A. M. Kosevitch, *Fizicheskaya Mekhanika Real'nykh Kristallov* [The Physical Mechanics of Real Crystals] (Kiev: Naukova Dumka: 1981) (in Russian).
20. L. B. Zuev and V. I. Danilov, *Philos. Mag. A*, **79**, No. 1: 43 (1999).
21. P. Landau, R. Z. Shneck, G. Makov, and A. Venkert, *Mat. Sci. Eng.*, **3**, No. 3: 012004 (2009).