# Теорія оптимальних рішень

*Исследованы условия сходимости прямых методов непрерывной векторной оптимизации, которые не сводятся к скалярной оптимизации. Практические варианты этих методов предполагают дискретизацию допустимой области, аппроксимацию целевых функций и решение последовательности дискретных задач векторной оптимизации. При небольших размерностях пространства решений дискретные задачи могут быть решены перебором. Приведены достаточные условия, при которых локально Парето-оптимальные решения приближенных задач аппроксимируют локально Парето-оптимальные решения ис-ходной задачи (с некоторой точностью).*



УДК 519.8; 368; 65.0

Б.В. НОРКИН

## О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНОГО ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО ПОИСКА

**Введение.** Задача векторной оптимизации состоит в нахождении части или всего множества Парето-оптимальных решений. В работе изучаются условия сходимости прямых методов векторной оптимизации, не сводящихся к скалярной оптимизации, а порождающих последовательность недоминируемых приближений к Парето-оптимальному множеству задачи. Общая задача векторной оптимизации имеет вид

$$\vec{F}(x) = \{F_1(x), ..., F_m(x)\} \to \max_{x \in X \subset \mathrm{R}^n}, \quad (1)$$

где функции $f_i(x), i = 1, ..., m,$ предполагаются непрерывными на счетно компактном множестве $X$. Задача состоит (а) в нахождении отдельных элементов или (б) всего множества слабо Парето-оптимальных точек $X^* \subset X$, таких, что для любого $x \in X^*$ не существует $x' \in X$, $\vec{F}(x') > \vec{F}(x)$ (покомпонентно). Задачи векторной оптимизации имеют огромное поле приложений и существует большое число подходов к их решению [1 – 7]. Наиболее известные из них состоят максимизации одной из функций $F_i$ при ограничениях на значения других функций или в свертке критериев $F_i$ в один с помощью линейной или нелинейной функции полезности и решении получающихся задач оптимизации методами нелинейного программирования [1]. Однако для невыпуклых функций $F_i$ таким путем, вообще говоря, нельзя получить все Парето-оптимальные решения. Поэтому получили развитие и другие (прямые) подходы к решению задачи (1), не сводящиеся к оптимизации скалярного критерия, например, методы дискретного поиска [2], эволюционного программирования [3], методы покрытий [4], дифференциального локального спуска [5 – 7]. Прямые методы [2, 3] часто являются вариантами управляемого итерационного случайного поиска. В них на каждой итерации формируется приближенное дискретное решение $X_N^*$, состоящее из конечного числа точек; затем на основе информации $\vec{F}(X_N^*)$ о значениях целевых функций в точках $X_N^*$ некоторым образом генерируется новое поколение точек $Y^N$ и из множества $X^N = (X_N^*, Y^N)$ отбирается новое дискретное приближенное решение $X_{N+1}^*$, например, недоминируемых точек и т. д. Установление условий сходимости алгоритмов эволюционного программирования к множеству Парето-оптимальных точек представляет определенную проблему и является предметом активных исследований [8, 9]. Даже сходимость простейших алгоритмов этого типа исследована только для дискретных допустимых множеств $X$ [9]. Настоящая работа посвящена исследованию условий сходимости методов этого типа.

**Уточнение постановки задачи.** На практике постановка задачи векторной оптимизации может быть более сложной, чем (1). Например, в случае задачи стохастической векторной оптимизации функции $\vec{F}$ имеют вид математических ожиданий, $\vec{F}(x) = \mathrm{E}\vec{f}(x,\omega)$, где случайная переменная $\omega$ задана на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$, $E$ обозначает математическое ожидание (интеграл) по мере $\mathrm{P}$ [10, 11]. Обычно, в практических задачах математические ожидания невозможно вычислить аналитически, поэтому их приближенно оценивают численно с помощью квадратур или методом Монте-Карло [11]. В качестве компонент векторной целевой функции $\vec{F}(x)$ в (1) могут выступать квантили случайных величин $F_i(x,\omega)$, для вычисления которых существуют разнообразные приближенные методы. Тогда вместо задачи (1) приходится рассматривать последовательность приближенных задач векторной оптимизации вида

$$\vec{F}^N(x) = \{F_1^N(x), \dots, F_m^N(x)\} \to \max_{x \in X^N \subset \mathrm{R}^n}, \quad N = 1, 2, \dots , \tag{2}$$

где множество допустимых решений $X^N$, вообще говоря, также может меняться от задачи к задаче, например, множество $X^N$ может быть дискретной аппроксимацией исходного допустимого множества $X$ [2]. В последнем случае аппроксимирующие функции $F_1^N(x), \dots, F_m^N(x)$ могут быть определены только на дискретном множестве $X^N$. Очевидно, для конечного дискретного допустимого множества $X^N$ задача (2) поиска Парето-оптимальных точек $X_N^*$ легко разрешима. Проблема состоит в том, чтобы установить условия, при которых множество $X_N^*$ приближает множество решений $X^*$.

**Сходимость аппроксимаций задач векторной оптимизации.** Как отмечается в [2] вопрос о сходимости дискретной аппроксимации задачи (1) является непростым. В нашей постановке (2) он осложняется еще и тем, что аппроксимируются не только допустимое множество, но и целевые функции. Для формулировки результата о сходимости решений приближенных задач (2) к решению исходной задачи (1) нам понадобятся некоторые определения.

**Определение 1** [12, Sec. 4A]. Для последовательности множеств $\{Z_N \subset X,\ N=1,2,...\}$ определим такие предельные множества:

$$\limsup_{N\to\infty} Z_N = \{z : \exists\, z_{N_k} \in Z_{N_k},\ z=\lim_{k\to\infty} z_{N_k}\},$$

$$\liminf_{N\to\infty} Z_N = \{z : \exists\, z_N \in Z_N,\ z=\lim_{N\to\infty} z_N\},$$

$$\lim_{N\to\infty} Z_i = \liminf_{N\to\infty} Z_N = \limsup_{N\to\infty} Z_N .$$

**Определение 2** ($\vec{\varepsilon}$-оптимальные решения задач (1) и (2)). Множество $X^*(\vec{\varepsilon})$ называется $\vec{\varepsilon}$-оптимальным решением задачи (1), если для любого $x^* \in X^*(\vec{\varepsilon})$ не существует $x \in X$, такой, что $\vec{F}(x) > \vec{F}(x^*) + \vec{\varepsilon}$. Аналогично, множество $X_N^*(\vec{\varepsilon})$ называется $\vec{\varepsilon}$-оптимальным решением задачи (2), если для любого $x^* \in X_N^*(\vec{\varepsilon})$ не существует $x \in X^N$, такой, что $\vec{F}^N(x) > \vec{F}^N(x^*) + \vec{\varepsilon}$.

Сделаем следующие предположения о связи задач (1) и (2):

**П1.** Для любой последовательности $X^N \ni x^N \to x$ выполнено $\vec{F}^N(x^N) \to \vec{F}(x)$, $N \to \infty$.

**П2.** Последовательность допустимых множеств $\{X^N,\ N=1,2,...\}$ задачи (2) удовлетворяет условиям: $X^N \subseteq X$ и для некоторого $\vec{\varepsilon} \in \mathrm{R}^m$ выполнено $X^*(\vec{\varepsilon}) \subseteq \liminf_{N\to\infty} X^N$, т. е. к каждой точке $x \in X^*(\vec{\varepsilon})$ сходится некоторая последовательность допустимых точек $x^N \in X^N$.

**Теорема 1** ([14], о сходимости решений приближенных задач (2) к решениям исходной задачи (1)). Предположим, что вектор-функция $\vec{F}(x)$ непрерывна на компактном множестве $X$, выполнены условия П1-П2, и $\lim_{N\to\infty} \vec{\varepsilon}^N = \vec{\varepsilon} > 0$. Тогда для любого $\vec{\varepsilon}'$, $0 \le \vec{\varepsilon}' < \vec{\varepsilon}$, выполнено

$$X^* \subseteq X^*(\vec{\varepsilon}') \subseteq \liminf_{N\to\infty} X_N^*(\vec{\varepsilon}^N) \subseteq \limsup_{N\to\infty} X_N^*(\vec{\varepsilon}^N) \subseteq X^*(\vec{\varepsilon}).$$

**Замечание 1.** В работе [13] аналогичное теореме 1 утверждение доказано при предположении $\lim_{N\to\infty} X^N = X$. Если множество $X^N$ является дискретной аппроксимацией допустимого множества $X$, то условие П2 показывает, что для справедливости теоремы о сходимости решений $X_N^*(\vec{\varepsilon}^N)$ к $X^*(\vec{\varepsilon})$ достаточно улучшать аппроксимацию допустимого множества только в окрестности приближенно локально Парето-оптимальных точек $X^*(\vec{\varepsilon})$.

**Сходимость прямого локального Парето-оптимального поиска.** Локальный Парето-оптимальный поиск состоит в решении последовательности связанных задач (2) с некоторым образом связанными целевыми вектор-функциями $\vec{F}^N(\cdot)$ и определенным образом построенными допустимыми множествами $X^N$. В частности, все целевые функции $\vec{F}^N(\cdot)$ могут быть одинаковыми.

**Определение 3**. Под окрестным отображением $V: 2^X \to 2^X$ будем понимать произвольное монотонное не убывающее отображение, непрерывное относительно сходимости множеств, т. е. для которого из $\lim_{N\to\infty} Z_N = Z$ следует $\lim_{N\to\infty} V(Z_N) = V(Z)$, и такое, что $X' \subseteq V(X')$ для любого $X' \in 2^X$.

**Определение 4** (сходимость окрестных отображений). Последовательность окрестных отображений $V_N$ будем называть сходящейся к некоторому окрестному отображению $V$, если для любой последовательности сходящихся множеств $\{Z_N \to Z\}$ выполнено $\lim_{N\to\infty} V_N(Z_N) = V(Z)$.

Пусть $\{V_N\}$ – некоторая последовательность окрестных отображений, сходящихся к окрестному отображению $V$. Пусть последовательные задачи (2) связаны так, что $\vec{F}^N \equiv \vec{F}^{N-1}$, $X^N = V_N(x^*_{N-1})$, где $x^*_{N-1} \in X^*_{N-1}(\vec{\varepsilon}^{N-1})$ такова, что $\vec{F}^{N-1}(x^*_{N-1}) > \vec{F}^{N-1}(x^*_{N-2}) + \vec{\varepsilon}^{N-1}$, если $x^*_{N-2} \notin X^*_{N-1}(\vec{\varepsilon}^{N-1})$, и $\vec{F}^N$ – новая целевая функция, а $x^*_{N-1} \in X$ – любое, в противном случае; $x^*_1$ – произвольная начальная точка из допустимого множества $X$ исходной задачи (1).

Суть этого прямого алгоритма локального Парето-оптимального поиска состоит в том, что он стартует из произвольной начальной точки $x^*_1 \in X$ и с неизменной целевой функцией $\vec{F}^1$ доходит до первой $\vec{\varepsilon}^{N_1}$-недоминируемой точки $x^*_{N_1-1} \in X^*_{N_1}(\vec{\varepsilon}^{N_1})$, затем стартует из новой произвольной начальной точки $x^*_{N_1}$ (или, в частности, продолжает оптимизацию из $x^*_{N_1-1}$) и снова при новой неизменной функции $\vec{F}^{N_1}$ $(N_1 > 1)$ находит $\vec{\varepsilon}^{N_2}$-недоминируемую точку $x^*_{N_2-1} \in X^*_{N_2}(\vec{\varepsilon}^{N_2})$, и т. д.

**Теорема 2** (о сходимости локального Парето-оптимального поиска). Предположим, что функция $\vec{F}(x)$ непрерывна на секвенциально компактном множестве $X$, последовательность полунепрерывных сверху вектор-функций $\{\vec{F}^N\}$ равномерно сходится к целевой функции $\vec{F}$ на $X$, а окрестные отображения $\{V_N\}$ сходятся к отображению $V$ на $2^X$, $\lim_{N\to\infty} \vec{\varepsilon}^N = \vec{\varepsilon} > 0$. Тогда существует бесконечная подпоследовательность решений $\{X^*_{N_k}(\vec{\varepsilon}^{N_k})\}$, такая, что $x^*_{N_k-1} \in X^*_{N_k}(\vec{\varepsilon}^{N_k})$, и любая предельная точка $x'$ такой подпоследовательности $\{x^*_{N_k-1}\}$ является $\vec{\varepsilon}$-оптимальной (по Парето) в своей $V(x')$ окрестности, т. е. не существует другой точки $z' \in V(x')$, такой, что $\vec{F}(z') > \vec{F}(x') + \vec{\varepsilon}$.

*Доказательство***.** Предположим противное, что не существует бесконечной подпоследовательности $\{x^*_{N_k-1} \in X^*_{N_k}(\vec{\varepsilon}^{N_k})\}$, тогда $x^*_{N-1} \notin X^*_N(\vec{\varepsilon}^N)$ для всех достаточно больших $N \geq N'$. Из построения алгоритма следует, что тогда $\vec{F}^N(x^*_N) = \vec{F}^{N-1}(x^*_N) > \vec{F}^{N-1}(x^*_{N-1}) + \vec{\varepsilon}^{N-1}$ для всех $N \geq N'$, что невозможно в силу ограниченности $\vec{F}^N(\cdot)$ на $X$ и условия $\lim_{N\to\infty} \vec{\varepsilon}^N = \vec{\varepsilon} > 0$. Пусть $\{x^*_{N_k-1} \to x'\}$, такова, что $\{x^*_{N_k-1} \in X^*_{N_k}(\vec{\varepsilon}^{N_k}),\ \mathrm{k} = 1, 2, \ldots\}$. Предположим противное, что $x'$ не является $\vec{\varepsilon}$-оптимальной на множестве $V(x')$. Тогда найдется $z' \in V(x')$, такая, что $\vec{F}(z') > \vec{F}(x') + \vec{\varepsilon}$. Так как $x^*_{N_k-1} \to x'$ и $V_{N_k}(x^*_{N_k-1}) \to V(x')$, то существуют $V_{N_k}(x^*_{N_k-1}) \ni z_{N_k} \to z'$. Таким образом,

$$\vec{F}(z') = \lim_k \vec{F}^{N_k}(z_{N_k}) > \vec{F}(x') + \vec{\varepsilon} = \lim_k (\vec{F}^{N_k-1}(x^*_{N_k-1}) + \vec{\varepsilon}^{N_k-1})$$

и $\vec{F}^{N_k}(z_{N_k}) > \vec{F}^{N_k-1}(x^*_{N_k-1}) + \vec{\varepsilon}^{N_k-1}$, $z_{N_k} \in V_{N_k}(x^*_{N_k-1}) = X^{N_k}$, для всех достаточно больших $k$, т. е. $x^*_{N_k-1} \notin X^*_{N_k}(\vec{\varepsilon}^{N_k})$. Полученное противоречие доказывает теорему.

**Выводы.** В работе исследованы условия сходимости прямых методов векторной оптимизации, не сводящихся к скалярной оптимизации. Практические варианты этих методов предполагают дискретизацию допустимой области, аппроксимацию целевых функций и решение последовательности дискретных задач векторной оптимизации. Необходимость аппроксимаций целевых функций возникает в тех случаях, когда невозможно точно вычислить их значения за конечное (разумное) время и, поэтому приходится довольствоваться их аппроксимациями. Эта ситуация типична для задач стохастической многокритериальной оптимизации. Дискретная аппроксимация допустимого множества мотивируется тем, что получающаяся дискретная задача векторной оптимизации, в принципе, может быть точно решена перебором за конечное число шагов. Дискретная сетка может быть регулярной, случайной или другой квазирегулярной, заполняющей допустимую область. Подобный подход к векторной оптимизации широко применяется в инженерных приложениях. В случае локальной итерационной оптимизации поиск лучших точек происходит в некоторой, возможно, дискретной окрестности текущей точки и продолжается до получения недоминируемых (с некоторой точностью) точек.

*Б.В. Норкін*

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПРЯМИХ МЕТОДІВ НЕПЕРЕРВНОЇ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Досліджено умови збіжності прямих методів неперервної векторної оптимізації, які не зводяться до скалярної оптимізації. Практичні варіанти цих методів припускають дискретизацію допустимої області, апроксимацію цільових функцій і розв'язання послідовності дискретних задач векторної оптимізації. При невеликій вимірності простору рішень дискретні задачі можуть бути вирішені перебором. Наведено достатні умови, за яких локально Парето-оптимальні розв'язки наближених задач апроксимують локально Парето-оптимальні розв'язки вихідної задачі (з деякою точністю).

*B.V. Norkin*

ON CONVERGENCE OF DIRECT METHODS FOR CONTINUOUS VECTOR OPTIMIZATION

Direct methods for continuous vector optimization not reducible to a scalar optimization are studied. Practical implementations of these methods assume sampling the feasible region, approximation of the objective functions and solving a sequence of discrete vector optimization problems. With small dimensions of the solution space discrete problem can be solved by enumeration. We give sufficient conditions under which Pareto optimal solutions of approximate problems approximate the Pareto optimal solution of the original problem (with some accuracy).

1. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Дрофа, 2006. – 176 с.
2. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. – Chichester: John Willey & Sons, 2001. – 497 p.
3. *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.* Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью // Вычислительная математика и математическая физика. – 2013. – **53**, № 2. – С. 209 – 224.
4. *Fliege J., Svatier B.F.* Steepest descent methods for multicriteria optimization // Math. Methods Oper. Res. – 2000. – **51**, N 3. – P. 479 – 494.
5. *Ляшко С.І., Семенов В.В.* Алгоритми векторної оптимізації лінійних систем з узагальненим керуванням // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 35 – 41.
6. *Семенов В.В.* Методы градиентного типа для решения задач векторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2010. – С. 145 – 152.
7. *Li Z., Li Zhe., Rudolph G.* On the convergence properties of quantum-inspired multi-objective evolutionary algorithms. In: Advanced intelligent computing theories and applications. With aspects of contemporary intelligent computing techniques. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – P. 245 – 255.
8. *Laumanns M., Zenklusen R.* Stochastic convergence of random search methods to fixed size Pareto front approximations // European J. Oper. Res. – 2011. – **213.** – P. 414 – 421.
9. *Ben Abdelaziz F.* Solution approaches for the multiobjective stochastic programming // European J. Oper. Res. – 2012. – **216**. – P. 1 – 16.
10. *Gutjahr W., Pichler A.* Stochastic multi-objective optimization: a survey on non-scalarizing methods // Ann. Oper. Res. – 2013. – P. 1 – 25.
11. *Rockafellar R.T., Wets R.J-B.* Variational Analysis. – Berlin: Springer, 1998. – 734 p.
12. *Norkin B.V.* Sample approximations of multiobjective stochastic optimization problems // www://optimization-online.org. Electronic preprint. – November 2014. – Access: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/11/4655.html
13. *Norkin B.V.* On the approximation of vector optimization problems // Кибернетика и вычислительная техника. – Вып. 179. – К.: Академперіодика, 2015.

Получено 15.04.2015