

Конкретизация квадратичного критерия прочности ортотропного материала

В. А. Ромащенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложен новый квадратичный критерий прочности ортотропного материала, основанный на данных 21-го простейшего эксперимента на одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг. Показано, что в случае однонаправлено армированного (транстропного) композита количество независимых опытов до разрушения сокращается до десяти. Рассмотрены также некоторые другие часто встречающиеся на практике виды симметрии упругих и прочностных свойств.

Ключевые слова: ортотропия, критерии прочности, предельная поверхность, условия устойчивости и инвариантности, характеристики упругости и прочности.

Для оценки прочности композитных материалов (КМ), находящихся в сложном напряженном состоянии, необходимо знать критерии предельных состояний (критерии прочности), устанавливающие допустимые границы напряжений, в которых материал может работать при заданных условиях без разрушения. Предельными являются состояния, при которых КМ переходит от упругого либо упругопластического состояния к разрушению. Для оценки прочности КМ чаще всего используется феноменологический (макроструктурный) подход, согласно которому неоднородный композит рассматривается как сплошная, в общем случае анизотропная, среда. Математическая модель среды строится на основе экспериментально полученных результатов без объяснения механизмов, определяющих поведение композита. В данном случае феноменологический подход имеет большие преимущества перед другими подходами, так как можно использовать общее условие прочности для материалов, разных по составу и технологии изготовления, но одинаковых по симметрии свойств, а также для материалов со значительной анизотропией, для которых одно и то же напряженное состояние может привести к разным по природе предельным состояниям, если изменяются знаки напряжений или их ориентация.

Феноменологические критерии прочности не выводятся аналитически, они постулируются или предлагаются на основе обобщения экспериментальных данных. Из-за относительной свободы в формулировке критериев прочности во многих работах предпринимались попытки построения таких критериев [1–8]. Выбор того или иного критерия зависит от природы материала, его состава, степени анизотропии, выбранной концепции расчета, имеющегося объема экспериментальных данных. Большинство современных КМ вполне адекватно описывается моделью ортотропного тела либо теми или иными частными случаями этой модели.

В настоящее время широкую известность получили квадратичные критерии прочности ортотропных материалов [3, 9–11]. Они учитывают различие в пределах прочности при растяжении и сжатии, обладают максимально возможной гибкостью, не содержат избыточных параметров, позволяют легко определить главные оси прочности и др. [9, 10].

Естественно полагать, что главные оси анизотропии x , y , z ортотропного материала являются одновременно главными осями как для упругих, так и прочностных характеристик. Квадратичный критерий прочности в координатах x , y , z имеет вид [9–12]

$$\Phi \leq 1; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \sigma_x \left(\frac{1}{S_x^+} - \frac{1}{S_x^-} \right) + \sigma_y \left(\frac{1}{S_y^+} - \frac{1}{S_y^-} \right) + \sigma_z \left(\frac{1}{S_z^+} - \frac{1}{S_z^-} \right) + \\ & + \frac{\sigma_x^2}{S_x^+ S_x^-} + \frac{\sigma_y^2}{S_y^+ S_y^-} + \frac{\sigma_z^2}{S_z^+ S_z^-} + \frac{\tau_{xy}^2}{T_{xy}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{T_{yz}^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{T_{zx}^2} - \\ & - F_{xy} \sigma_x \sigma_y - F_{yz} \sigma_y \sigma_z - F_{zx} \sigma_z \sigma_x, \end{aligned} \tag{1a}$$

где σ_i , τ_{ij} – компоненты тензора напряжений; S_i^+ , S_i^- – пределы прочности при растяжении (+) и сжатии (–) в i -м главном направлении анизотропии; T_{ij} – пределы прочности при чистом сдвиге в соответствующих главных плоскостях ij анизотропии, $i, j = x, y, z, i \neq j$.

Критерий (1) конкретизирован на основе данных девяти простейших экспериментов: три на одноосное растяжение; три на одноосное сжатие и три на чистый сдвиг. Он тождественно удовлетворяет (становится равным единице) этим девяти экспериментальным (реперным) точкам в шестимерном пространстве напряжений при любых значениях параметров F_{ij} , удовлетворяющих необходимым условиям устойчивости для предельной поверхности прочности [9, 11, 12]:

$$|F_{ij}| < \frac{2}{\sqrt{S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^-}}. \tag{2}$$

Следует заметить, что даже в случае нарушения требований (2) критерий (1) будет удовлетворять вышеописанным данным девяти экспериментов, однако при этом предельная поверхность прочности теряет физический смысл: она может становиться многосвязной, незамкнутой, иметь бесконечные пределы прочности для некоторых видов напряженных состояний и пр. При выполнении условий (2) в шестимерном пространстве напряжений всегда будем иметь гладкую односвязную предельную поверхность ($\Phi = 1$). В зависимости от конкретного выбора формул для констант F_{ij} получаются те или иные квадратичные критерии прочности ортотропного КМ: модифицированный Цая–Ву (обобщенный Мизеса) [11–14] при

$$F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^-}}, \quad (3)$$

Хоффмана [9, 12, 13] при

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i^+ S_i^-} + \frac{1}{S_j^+ S_j^-} - \frac{S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^-}{S_x^+ S_x^- S_y^+ S_y^- S_z^+ S_z^-} \quad (4)$$

и др.

В ряде работ [9, 12, 15] неоднократно отмечалось, что для реальных композитов, характеризующихся существенной анизотропией и различной прочностью при растяжении и сжатии, очень трудно, а зачастую невозможно подобрать параметры F_{ij} в (1) в виде констант, независящих от вида напряженно-деформированного состояния (НДС), которые адекватно бы описывали прочность материала при различных условиях нагружения и видах НДС. Поэтому в работах [12, 15] параметры F_{ij} предлагалось рассматривать не как константы, а как функции:

$$F_{ij} = F_{ij}(\operatorname{sgn} \sigma_i, \operatorname{sgn} \sigma_j), \quad (5)$$

где $\operatorname{sgn}(\cdot)$ – сигнум-функция.

Таким образом, для конкретизации F_{ij} в общем случае ортотропного материала потребуются данные дополнительных 12 экспериментов. Получаемая при этом поверхность прочности сохранит непрерывность и односвязность в силу (2), но может стать кусочно-гладкой – иметь изломы при переходе через плоскости $\sigma_i = 0$.

В данной работе покажем, каким образом можно конкретизировать F_{ij} согласно (5) на основании дополнительных 12 простейших опытов, а именно: три на одноосное растяжение, три на одноосное сжатие и шесть на чистый сдвиг в направлениях и плоскостях, уже не совпадающих с главными направлениями и плоскостями анизотропии.

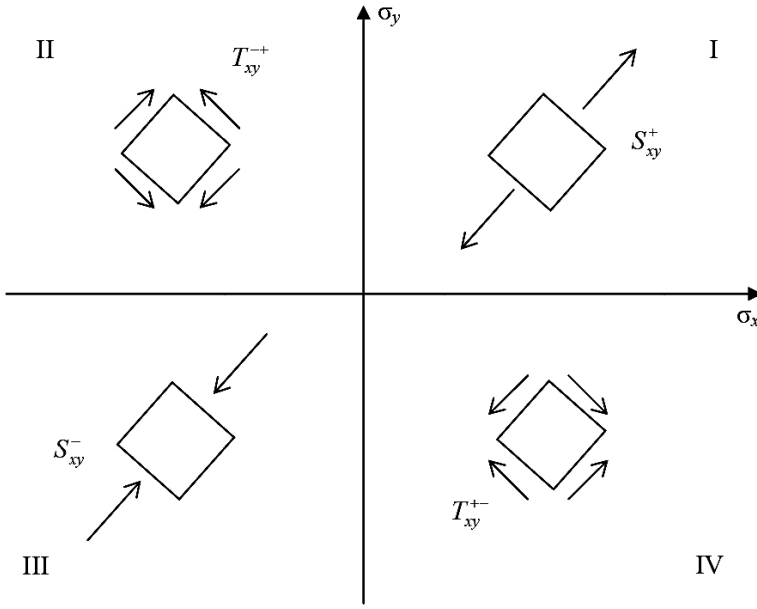
Рассмотрим плоское напряженное состояние (ПНС) в главной плоскости xu при $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Функция Φ из (1) при таком ПНС принимает вид

$$\Phi = \sigma_x \left(\frac{1}{S_x^+} - \frac{1}{S_x^-} \right) + \sigma_y \left(\frac{1}{S_y^+} - \frac{1}{S_y^-} \right) + \frac{\sigma_x^2}{S_x^+ S_x^-} + \frac{\sigma_y^2}{S_y^+ S_y^-} + \frac{\tau_{xy}^2}{T_{xy}^2} - F_{xy} \sigma_x \sigma_y. \quad (6)$$

Проведем четыре опыта до разрушения (рисунок), а именно:

1) на одноосное растяжение в диагональном направлении под углом 45° к главным осям x и y , в результате чего определим предельное S_{xy}^+ , при этом

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \frac{S_{xy}^+}{2}; \quad (7)$$



К конкретизации F_{xy} .

2) на одноосное сжатие с определением предельного S_{xy}^- , при этом

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = -\frac{S_{xy}^-}{2}; \quad (8)$$

3) на чистый сдвиг по площадкам, равнонаклоненным под углом 45° к осям x и y так, как показано во втором квадранте на рисунке, в результате чего определим предельное T_{xy}^{+-} , при этом

$$\sigma_x = -\sigma_y = -T_{xy}^{+-}, \quad \tau_{xy} = 0; \quad (9)$$

4) то же, но в противоположном направлении, как показано в четвертом квадранте на рисунке. Определим предельное T_{xy}^{+-} , при этом

$$\sigma_x = -\sigma_y = T_{xy}^{+-}, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (10)$$

Подставляя последовательно (7)–(10) в (6) и приравнявая полученное выражение к единице с учетом (5), получаем

$$F_{xy}(1, 1) = \frac{2}{S_{xy}^+} \left(\frac{1}{S_x^+} + \frac{1}{S_y^+} - \frac{1}{S_x^-} - \frac{1}{S_y^-} \right) + \frac{1}{S_x^+ S_x^-} + \frac{1}{S_y^+ S_y^-} + \frac{1}{T_{xy}^2} - \frac{4}{(S_{xy}^+)^2}; \quad (11a)$$

$$F_{xy}(-1, -1) = \frac{2}{S_{xy}} \left(\frac{1}{S_x^-} + \frac{1}{S_y^-} - \frac{1}{S_x^+} - \frac{1}{S_y^+} \right) + \frac{1}{S_x^+ S_x^-} + \frac{1}{S_y^+ S_y^-} + \frac{1}{T_{xy}^2} - \frac{4}{(S_{xy}^-)^2}; \quad (116)$$

$$F_{xy}(-1, 1) = \frac{1}{(T_{xy}^{-+})^2} - \frac{1}{S_x^+ S_x^-} - \frac{1}{S_y^+ S_y^-} - \frac{1}{T_{xy}^{-+}} \left(\frac{1}{S_y^+} - \frac{1}{S_y^-} - \frac{1}{S_x^+} + \frac{1}{S_x^-} \right); \quad (11в)$$

$$F_{xy}(1, -1) = \frac{1}{(T_{xy}^{+-})^2} - \frac{1}{S_x^+ S_x^-} - \frac{1}{S_y^+ S_y^-} - \frac{1}{T_{xy}^{+-}} \left(\frac{1}{S_x^+} - \frac{1}{S_x^-} - \frac{1}{S_y^+} + \frac{1}{S_y^-} \right). \quad (11г)$$

Поступая аналогично в двух оставшихся главных плоскостях (yz и zx), конкретизируем F_{yz} и F_{zx} . Выражения для них получаются из (11) путем циклической перестановки индексов $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Ввиду того что в силу (5) параметры F_{ij} , определяемые по формулам (11) и аналогичным им, отвечают за НДС только в своем вполне определенном октанте пространства напряжений, условия устойчивости (2) можно несколько ослабить:

$$F_{ij} \operatorname{sgn}(\sigma_i) \operatorname{sgn}(\sigma_j) < \frac{2}{\sqrt{S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^-}}. \quad (12)$$

Построенный таким образом критерий предельного состояния (1), (5), (11), (12) тождественно удовлетворяет уже не 9, а 21 экспериментальной реперной точке и поэтому является более точным, чем традиционно используемые (Цая–Ву, Хоффмана и др.).

Рассмотрим некоторые виды симметрии упругих и соответственно прочностных свойств КМ.

Ортотропное тело. Тело характеризуется девятью независимыми упругими константами (технические характеристики упругости – модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона в соответствующих главных направлениях и плоскостях) [16]: $E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}$. При этом должны выполняться три равенства:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}. \quad (13)$$

Прочность согласно предложенному критерию описывается 21 независимой предельной постоянной: $S_x^+, S_x^-, S_y^+, S_y^-, S_z^+, S_z^-, S_{xy}^+, S_{xy}^-, S_{yz}^+, S_{yz}^-, S_{zx}^+, S_{zx}^-, T_{xy}^+, T_{xy}^-, T_{xy}^{+-}, T_{yz}^+, T_{yz}^-, T_{yz}^{+-}, T_{zx}^+, T_{zx}^-, T_{zx}^{+-}$, т.е. для описания предельной поверхности разрушения такого материала необходимо провести 21 независимый эксперимент.

Ортотропное тело с двумя эквивалентными главными осями x и y . Имеем $E_x = E_y, G_{yz} = G_{zx}, \nu_{zx} = \nu_{yz} E_z / E_x$, и таким образом число независимых упругих характеристик равно $9 - 3 = 6$.

Для прочностных предельных параметров выполняются равенства $S_x^+ = S_y^+, S_x^- = S_y^-, T_{yz} = T_{zx}, T_{xy}^+ = T_{xy}^{+-}, T_{yz}^+ = T_{zx}^+, T_{zx}^- = T_{yz}^-, S_{yz}^+ = S_{zx}^+, S_{yz}^- = S_{zx}^-$, и таким образом количество независимых прочностных постоянных и соответственно необходимых опытов до разрушения составляет $21 - 8 = 13$.

Транстропное тело с плоскостью изотропии xy . Для упругих характеристик имеем $E_x = E_y, G_{yz} = G_{zx}, \nu_{zx} = \nu_{yz} E_z / E_x, G_{xy} = E_x / (2 + 2\nu_{xy})$, и таким образом количество независимых упругих констант равно $9 - 4 = 5$.

Для характеристик прочности имеем $S_x^+ = S_y^+ = S_{xy}^+, S_x^- = S_y^- = S_{xy}^-, T_{yz} = T_{zx}, T_{xy} = T_{xy}^+ = T_{xy}^{+-}, T_{yz}^+ = T_{zx}^+, T_{zx}^- = T_{yz}^-, S_{yz}^+ = S_{zx}^+, S_{yz}^- = S_{zx}^-$, и количество независимых предельных постоянных, как и необходимых опытов до разрушения, составляет $21 - 11 = 10$.

Ортотропное тело с тремя эквивалентными главными направлениями x, y и z (кубическая симметрия). Имеем $E_x = E_y = E_z, G_{yz} = G_{zx} = G_{xy}, \nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx}$, и количество независимых упругих констант равно $9 - 6 = 3$.

Для характеристик прочности имеем $S_x^+ = S_y^+ = S_z^+, S_x^- = S_y^- = S_z^-, S_{xy}^+ = S_{yz}^+ = S_{zx}^+, S_{xy}^- = S_{yz}^- = S_{zx}^-, T_{xy} = T_{yz} = T_{zx}, T_{xy}^+ = T_{yz}^+ = T_{zx}^+ = T_{xy}^{+-} = T_{yz}^{+-} = T_{zx}^{+-}$, и таким образом количество независимых характеристик прочности и необходимых экспериментов до разрушения равно $21 - 15 = 6$.

Изотропное тело. Имеем $E_x = E_y = E_z, G_{yz} = G_{zx} = G_{xy} = E_x / (2 + 2\nu_{xy}), \nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx}$, и количество независимых упругих констант равно $9 - 7 = 2$.

Для прочностных характеристик выполняются условия: $S_x^+ = S_y^+ = S_z^+ = S_{xy}^+ = S_{yz}^+ = S_{zx}^+, S_x^- = S_y^- = S_z^- = S_{xy}^- = S_{yz}^- = S_{zx}^-, T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = T_{xy}^+ = T_{yz}^+ = T_{zx}^+ = T_{xy}^{+-} = T_{yz}^{+-} = T_{zx}^{+-}$. Количество независимых предельных постоянных (количество необходимых испытаний до разрушения) равно $21 - 18 = 3$.

Заметим, что критерий прочности (11) построен так, чтобы условие инвариантности [10, 12]

$$F_{ij} = \frac{1}{T_{ij}^2} - \frac{2}{S_i^+ S_i^-} \quad (14)$$

в плоскости изотропии ij для транстропных (и тем более изотропных) композитов соблюдалось автоматически.

Все вышеизложенное относилось к КМ, неравнопрочных при растяжении и сжатии ($S_i^+ \neq S_i^-$). Для материалов, равнопрочных при растяжении и сжатии, имеем

$$S_i^+ = S_i^- = S_i; \quad S_{ij}^+ = S_{ij}^- = S_{ij}; \quad T_{ij}^{-+} = T_{ij}^{+-} = T_{ij}^{(45)}, \quad (15)$$

при этом в квадратичном критерии (1) все линейные члены обнуляются:

$$\Phi \leq 1; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\sigma_x^2}{S_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{S_y^2} + \frac{\sigma_z^2}{S_z^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{T_{xy}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{T_{yz}^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{T_{zx}^2} - \\ & - F_{xy}\sigma_x\sigma_y - F_{yz}\sigma_y\sigma_z - F_{zx}\sigma_z\sigma_x, \end{aligned} \quad (16a)$$

условия устойчивости (2) либо (12) можно записать так:

$$|F_{ij}| < \frac{2}{S_i S_j} \quad (17)$$

или

$$F_{ij} \operatorname{sgn} \sigma_i \operatorname{sgn} \sigma_j < \frac{2}{S_i S_j} \quad (18)$$

соответственно, условие инвариантности (14):

$$F_{ij} = \frac{1}{T_{ij}^2} - \frac{2}{S_i^2}. \quad (19)$$

Последнее равенство в (15) обусловлено тем, что нагружение по схемам второго и четвертого квадрантов (рисунок) приводит в обоих случаях к такому напряженному состоянию: $\sigma_x = -\sigma_y$; $\tau_{xy} = 0$, которое для равнопрочных при растяжении и сжатии материалов, очевидно, будет инвариантным по знаку σ_x для функции прочности.

Формулы (11) и им аналогичные в силу (15) также существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} F_{xy}(1, 1) = F_{xy}(-1, -1) &= \frac{1}{S_x^2} + \frac{1}{S_y^2} + \frac{1}{T_{xy}^2} - \frac{4}{S_{xy}^2}; \\ F_{xy}(-1, 1) = F_{xy}(1, -1) &= \frac{1}{(T_{xy}^{(45)})^2} - \frac{1}{S_x^2} - \frac{1}{S_y^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Количество необходимых независимых опытов до разрушения для такого ортотропного материала сократится до 12: это экспериментальное определе-

ние предельных значений $S_x, S_y, S_z, T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}, T_{xy}^{(45)}, T_{yz}^{(45)}, T_{zx}^{(45)}$.

Если для ортотропных равнопрочных при растяжении и сжатии КМ имеется два эквивалентных главных направления x и y , то $S_x = S_y, T_{yz} = T_{zx}, S_{yz} = S_{zx}, T_{yz}^{(45)} = T_{zx}^{(45)}$, при этом количество независимых прочностных характеристик (опытов) равно $12 - 4 = 8$. Если плоскость xy является также плоскостью изотропии (транстропный КМ), то $S_x = S_y = S_{xy}, T_{xy} = T_{xy}^{(45)}, T_{yz} = T_{zx}, S_{yz} = S_{zx}, T_{yz}^{(45)} = T_{zx}^{(45)}$, и количество независимых предельных констант равно $12 - 6 = 6$. Для равнопрочного при растяжении и сжатии тела с кубической симметрией (все три главных направления ортотропии эквивалентны) имеем $S_x = S_y = S_z, T_{xy} = T_{yz} = T_{zx}, S_{xy} = S_{yz} = S_{zx}, T_{xy}^{(45)} = T_{yz}^{(45)} = T_{zx}^{(45)}$, количество независимых прочностных постоянных равно $12 - 8 = 4$. Наконец, для изотропных равнопрочных при растяжении и сжатии материалов выполняются условия: $S_x = S_y = S_z = S_{xy} = S_{yz} = S_{zx}, T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = T_{xy}^{(45)} = T_{yz}^{(45)} = T_{zx}^{(45)}$, и таким образом имеем $12 - 10 = 2$ независимые прочностные характеристики. Если при этом соблюдается равенство $S_x = T_{xy}\sqrt{3}$, функция Φ из (16) становится пропорциональной квадрату интенсивности напряжений, в результате чего получим классическую четвертую теорию прочности – критерий удельной потенциальной энергии формоизменения [17].

Условие инвариантности (19) для равнопрочных при растяжении и сжатии транстропных либо изотропных тел согласно (20) также тождественно удовлетворяется. Вышеприведенные результаты представлены в таблице. Виды симметрии свойств № 2–5 являются частными случаями ортотропии, т.е. вида № 1.

Количество независимых упругих и прочностных характеристик для КМ с различной симметрией свойств

№ вида симметрии свойств	Количество независимых упругих констант	Количество независимых прочностных констант
1	$\frac{9}{9}$	$\frac{21}{12}$
2	$\frac{6}{6}$	$\frac{13}{8}$
3	$\frac{5}{5}$	$\frac{10}{6}$
4	$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{4}$
5	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$

Примечание. Над чертой приведены данные для неравнопрочных при растяжении и сжатии композитов, под чертой – для равнопрочных.

Поскольку предложенный критерий прочности (1), (5), (11), (12), как и его частный случай (16)–(20), тождественно удовлетворяет требованиям инвариантности (14) либо (19) соответственно по построению, использовать его в прочностных расчетах можно всегда [12], если нигде не нарушаются необходимые условия устойчивости (12) или (18). Нарушение этих условий будет означать либо некорректность используемых экспериментальных данных, либо принципиальную неприменимость квадратичного (или квадратичного без линейных членов) критерия прочности вида (1) (либо (16)) для рассматриваемого КМ. Например, для равнопрочных при растяжении и сжатии композитов, у которых хотя бы в одной главной плоскости анизотропии будет $S_{ij} \geq 2T_{ij}$, квадратичный критерий прочности типа (16) принципиально неприменим. Действительно, из (18) и (20) следует, что для такого материала требование по устойчивости для $F_{ij}(1, 1)$ и $F_{ij}(-1, -1)$ сводится к никогда невыполнимому условию $S_{ij}^2 T_{ij}^2 (S_i - S_j)^2 < S_i^2 S_j^2 (4T_{ij}^2 - S_{ij}^2)$. Ортотропный композит с такими свойствами рассматривался в [12, 18, 19]. Ранее [12] было показано, что формальное применение модифицированного критерия Цяя–Ву (3), который заведомо удовлетворяет необходимым условиям устойчивости по своей формулировке, но не использует экспериментальных данных по прочности в диагональных направлениях (под углом 45° к главным осям анизотропии), давало расхождение до 500% по сравнению с критерием Ашке-нази [15], где S_{ij} фигурируют.

В случае удовлетворения необходимым условиям устойчивости (12) либо (18) всегда будем получать непрерывную односвязную кусочно-гладкую предельную поверхность прочности в шестимерном пространстве напряжений, которая может иметь изломы при переходе через плоскости $\sigma_i = 0$. Для того чтобы предельная поверхность при этом была еще и в каждом октанте выпуклой (эллиптическая), (12) либо (18) необходимо усилить до (2) или (17) и потребовать выполнения дополнительного условия [20]

$$\frac{F_{xy}^2}{S_z^+ S_z^-} + \frac{F_{yz}^2}{S_x^+ S_x^-} + \frac{F_{zx}^2}{S_y^+ S_y^-} + F_{xy} F_{yz} F_{zx} < \frac{4}{S_x^+ S_x^- S_y^+ S_y^- S_z^+ S_z^-} \quad (21)$$

либо

$$\left(\frac{F_{xy}}{S_z}\right)^2 + \left(\frac{F_{yz}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{F_{zx}}{S_y}\right)^2 + F_{xy} F_{yz} F_{zx} < \frac{4}{(S_x S_y S_z)^2} \quad (22)$$

соответственно.

Одновременное выполнение условий (2) и (21) (или (17) и (22) для равнопрочных при растяжении и сжатии КМ) также обеспечивает замкнутость поверхности ($\Phi = 1$). Вопросы математически строгого обоснования необходимых и достаточных условий устойчивости, выпуклости, односвязности, замкнутости либо открытости, возможных и допустимых геометрических форм шестимерной предельной поверхности прочности ортотропного материала (1) в настоящее время недостаточно изучены и находятся на стадии разработки.

Преимущества предложенных критериев прочности ортотропного КМ перед традиционно используемыми (Цая–Ву, Хоффмана и пр.) заключаются в следующем:

более высокая точность – тождественное удовлетворение большему числу экспериментальных (реперных) точек;

большая корректность – тождественное удовлетворение требованиям инвариантности в случае плоскости изотропии по своему построению;

меньшая степень ограничений по устойчивости – достаточно удовлетворяют ослабленным условиям устойчивости в каждом октанте (этот пункт, естественно, не касается критериев типа (1), заведомо устойчивых по своей формулировке, например модифицированного критерия Цая–Ву (3)).

Недостаток предложенных критериев состоит в необходимости проведения большего количества независимых экспериментов для определения соответствующих предельных характеристик. Однако следует заметить, что все эксперименты относятся к классу простейших – это испытания на одноосное растяжение или сжатие либо чистый сдвиг в главных направлениях и плоскостях анизотропии, а также под углом 45° к этим направлениям и плоскостям.

Резюме

Запропоновано новий квадратичний критерій міцності ортотропного матеріалу, що базується на даних 21-го найпростішого експерименту на одновісний розтяг, стиск і чистий зсув. Показано, що у випадку однонаправлено армованого (транстропного) композита кількість незалежних експериментів до руйнування скорочується до десяти. Розглянуто також деякі інші види симетрії пружних і міцнісних властивостей, які досить часто зустрічаються на практиці.

1. *Icardi U., Locatto S., and Longo A.* Assessment of recent theories for predicting failure of composite laminates // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**. – P. 76 – 86.
2. *Thom H.* A review of the biaxial strength of fibre-reinforced plastics // *Composites. Part A: Appl. Sci. Manufact.* – 1998. – **29**. – P. 869 – 886.
3. *Yu Mau-hong.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *Appl. Mech. Rev.* – 2002. – **55**. – P. 169 – 218.
4. *Failure Criteria in Fibre-Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise.* – Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; New York; Oxford; Paris; San Diego; San Francisco; Singapore; Sydney; Tokyo: Elsevier, 2004. – 1255 p.
5. *Michopoulos J. G.* On the reducibility of failure theories for composite materials // *Compos. Struct.* – 2008. – **86**. – P. 165 – 176.
6. *Orifici A. C., Herszberg I., and Thomson R. S.* Review of methodologies for composite material modeling incorporating failure // *Ibid.* – P. 194 – 210.

7. *Garnich M. R. and Akula V. M. K.* Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites // *Appl. Mech. Rev.* – 2009. – **62**. – P. 1 – 33.
8. *Liu P. F. and Zheng J. Y.* Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review // *Mater. Design.* – 2010. – **31**. – P. 3825 – 3834.
9. *Бу Э. М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока; Пер. с англ. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендечки. – Т. 2. – М.: Мир, 1978. – С. 401 – 491.
10. *Tsai S. W. and Wu E. M.* A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.* – 1971. – **5**. – P. 58 – 80.
11. *Kollar L. P. and Springer G. S.* Mechanics of Composite Structures. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 480 p.
12. *Ромащенко В. А.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропного материала // *Пробл. прочности.* – 2012. – № 4. – С. 42 – 57.
13. *Onkar A. K., Upadhyay C. S., and Yadav D.* Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method // *Compos. Struct.* – 2007. – **77**. – P. 79 – 91.
14. *Zhao G. P. and Cho C. D.* Damage initiation and propagation in composite shells subjected to impact // *Ibid.* – **78**. – P. 91 – 100.
15. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
16. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
17. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
18. *Кривошеина М. Н., Радченко А. В., Кобенко С. В.* Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2001. – **7**, № 1. – С. 95 – 102.
19. *Кривошеина М. Н., Кобенко С. В., Туч Е. В.* Усреднение свойств композиционных анизотропных материалов при численном моделировании их разрушения // *Физ. мезомеханика.* – 2010. – **13**, № 2. – С. 55 – 60.
20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

Поступила 17. 04. 2012