

Свободные колебания пологой оболочки в жидкости при геометрически нелинейном деформировании

И. Д. Бреславский^а, Е. А. Стрельникова^{а,б}, К. В. Аврамов^{а,б}

^а Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

^б Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Предложен метод расчета нелинейных колебаний пологих оболочек в жидкости. Определены собственные формы и частоты линейных колебаний в жидкости, затем нелинейные колебания оболочки раскладываются в ряд по найденным собственным формам системы. Для полученной модели оболочки с конечным числом степеней свободы определяются нелинейные нормальные формы Шоу–Пьерра.

Ключевые слова: геометрически нелинейное деформирование пологих оболочек, взаимодействие оболочек с жидкостью, нелинейные нормальные формы колебаний.

Введение. Известны многочисленные литературные источники, посвященные взаимодействию оболочек с жидкостью. Однако в них преимущественно рассматриваются оболочки при одностороннем контакте с жидкостью [1, 2]. Колебаниям пологих оболочек, погруженных в жидкость, уделяется значительно меньше внимания. В основном такие исследования проводились в связи с анализом колебаний лопастей гидротурбин [3–5]. Так, в работе [6] анализируются частоты свободных колебаний лопастей гидротурбин, находящихся в жидкости. В [7] исследуются линейные колебания консольных пластин, частично погруженных в жидкость. Формы колебаний в жидкости находились как линейные комбинации форм колебаний в вакууме, которые определялись методом конечных элементов. В [8] описано несколько методов расчета колебаний пологих оболочек в жидкости.

В данной работе предлагается метод исследования колебаний пологих оболочек переменной толщины, погруженных в жидкость, при их геометрически нелинейном деформировании. Предполагается, что часть контура пологой оболочки закреплена, остальная – свободна. Решение этой задачи проводится следующим образом. Анализ нелинейной динамики ограничивается исследованием свободных колебаний, так как в области резонанса амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний “облегает” скелетную кривую свободных колебаний. При расчете свободных колебаний задаются уровень энергии в системе или параметр амплитуды колебаний. Если они малы, то вклад геометрической нелинейности незначителен, и колебания являются линейными. При увеличении уровня энергии в системе геометрическая нелинейность начинает существенно влиять на характеристики колебаний, которые в дальнейшем могут быть использованы при анализе вынужденных колебаний.

Постановка задачи и основные уравнения линейной теории. Рассматривается полая оболочка сложной формы в плане с переменной толщиной (рис. 1). Сдвиговые деформации оболочки не учитываются. Такая система может моделировать лопасть гидротурбины. При достаточно высоком уровне энергии колебаний некоторая часть (область) оболочки может совершать колебания с амплитудами, соизмеримыми с ее толщиной. В этой области перемещения будут умеренными, деформации – малыми, связь между деформациями и перемещениями – нелинейной. Отметим, что остальная часть оболочки при этом может совершать линейные колебания, удовлетворяя уравнениям геометрически нелинейной теории. Предполагается, что оболочка находится в покоящейся идеальной несжимаемой жидкости, а ее свободные колебания возбуждают движение жидкости. Динамика оболочки исследуется в цилиндрической системе координат. Тогда ее перемещения характеризуются вектором

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (u_r(\mathbf{x}, t), u_\theta(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)),$$

где \mathbf{x} – вектор координат точки; $w(\mathbf{x}, t)$ – перемещения срединной поверхности оболочки по направлению к нормали; $u_r(\mathbf{x}, t)$, $u_\theta(\mathbf{x}, t)$ – перемещения в радиальном и окружном направлениях соответственно.

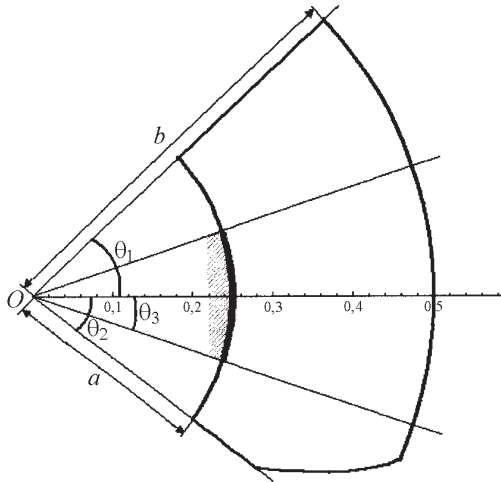


Рис. 1. Модель лопасти ПЛЛ-495.

Движения нелинейной системы представим в виде комбинации собственных форм линейных колебаний оболочки в жидкости [2]. Определим эти формы методом, предложенным в [8]. Систему уравнений линейных колебаний оболочки запишем в операторном виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_\alpha, \quad (1)$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{U})$, $\mathbf{M}(\mathbf{U})$ – дифференциальные операторы упругих и массовых сил; \mathbf{P}_α – давление жидкости на оболочку.

Поскольку рассматриваются периодические линейные колебания, предположим, что зависимость перемещений от времени имеет вид $\mathbf{U} = \mathbf{u} \exp(i\Omega t)$.

Первые три собственные формы колебаний в жидкости будем искать в виде линейной комбинации первых трех собственных форм в вакууме \mathbf{U}_k :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{U}_k, \quad (2)$$

которые удовлетворяют следующим уравнениям в операторном виде:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}_k) = \Omega_k^2 \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{U}_k), \quad (\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{U}_k), \mathbf{U}_j) = \delta_{kj}, \quad (3)$$

где оператор $\tilde{\mathbf{M}}$ не содержит дифференцирования по времени; Ω_k – k -я собственная частота линейных колебаний в вакууме; δ_{kj} – символ Кронекера.

Вычисление скалярного произведения (3) предусматривает интегрирование по плану оболочки. Далее будем полагать, что жидкость является идеальной, т.е. создает только нормальное давление на поверхность оболочки: $\mathbf{P}_\alpha = (0, 0, P)$.

Решим вспомогательную задачу, которая состоит в определении перепада давлений жидкости на поверхностях оболочки. Предположим, что движение жидкости безвихревое. Тогда существует потенциал скоростей Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$. Давление жидкости на оболочку определяется из интеграла Коши–Лагранжа [9]:

$$P = -\rho_2 \left(\frac{\partial\Phi^+(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^-(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right), \quad (4)$$

где ρ_2 – плотность жидкости; Φ^+ и Φ^- – предельные значения потенциала скоростей у поверхностей оболочки.

На поверхностях оболочки должны выполняться равенства скоростей жидкости и скоростей оболочки, которые называются условиями непротекания:

$$\left. \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S^\pm} = \left. \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{S^\pm}. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы вдали от оболочки движение жидкости, индуцированное колебаниями оболочки, затухало. Это условие называется условием Зоммерфельда [8] и имеет следующий вид:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla\Phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

При периодических колебаниях системы потенциал скоростей зависит от времени: $\Phi = \phi \exp(i\Omega t)$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$P = -i\rho_2\Omega(\phi^+ - \phi^-)\exp(i\Omega t). \quad (6)$$

Задача об определении собственных форм линейных колебаний сводится к нахождению функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\phi(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \Omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) &= (0, 0, -i\rho_2 \Omega (\phi^+ - \phi^-))^T; \\ \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0; \quad \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S^\pm} &= i\Omega w(\mathbf{x}); \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

К уравнениям (7) добавляются граничные условия оболочки. Поскольку собственные частоты продольных колебаний оболочки значительно выше изгибных, при анализе ее линейных колебаний пренебрегаем продольными смещениями. Тогда уравнение системы (7) преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{L}(w) + \Omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(w) = -i\rho_2 \Omega (\phi^+ - \phi^-). \quad (8)$$

Анализ линейных колебаний. При колебаниях оболочки по k -й собственной форме $W_k(\mathbf{x})$ на ее поверхности наблюдается перепад давлений $\Gamma_k(\mathbf{x})$, который определяется так [9, 10]:

$$\Gamma_k(\mathbf{x}) = \phi_k^+(\mathbf{x}) - \phi_k^-(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где $\phi_k(\mathbf{x})$ находится из уравнения

$$\left. \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S^\pm} = i\Omega_k W_k(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Как известно [8, 9], гармонические функции, удовлетворяющие условию Зоммерфельда и имеющие непрерывную нормальную производную при переходе через поверхность S , могут быть представлены в виде потенциала двойного слоя:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right) dS_\xi. \quad (11)$$

Более того, потенциал (11) обладает свойством $\Gamma = \phi^+ - \phi^-$ [10]. Потребуем, чтобы функция (11) удовлетворяла условию непротекания [9]:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left(\frac{\partial}{|\mathbf{x} - \xi|} \right) dS_\xi = i\Omega w(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Динамический прогиб оболочки имеет вид

$$w = \sum_{k=1}^N c_k W_k(\mathbf{x}), \quad (13)$$

где $W_k(\mathbf{x})$ – собственные формы линейных изгибных колебаний в вакууме.

Собственная форма колебаний оболочки индуцирует перепад давлений на ее поверхности, что выражается гиперсингулярным интегральным уравнением [3]:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma_k(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\zeta} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \zeta|} \right) dS_\zeta = W_k(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Заметим, что функция $\Gamma_k(\zeta)$ пропорциональна перепаду давлений $\phi_k^+ - \phi_k^-$. Уравнение (8) решаем методом Бубнова–Галеркина с учетом (3):

$$\left[c_j + \rho_2 \sum_{k=1}^3 c_k (\Gamma_k(\mathbf{x}), W_j(\mathbf{x})) \right] = c_j \Omega_j^2, \quad j=1, \dots, 3. \quad (15)$$

Уравнение (15) описывает собственные значения, используемые для определения частот и форм колебаний оболочки в жидкости.

Для определения $\Gamma_k(\zeta)$ из гиперсингулярного интегрального уравнения (14) воспользуемся методом граничных элементов [8]. После расчета функций $\Gamma_k(\mathbf{x})$, $k=1, \dots, 3$ можно решить проблему собственных значений (15).

В качестве примера исследуем колебания модели лопасти гидротурбины ПЛ-495 с такими параметрами [11]: плотность материала лопасти $\rho = 7850$ кг/м³, модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; геометрические параметры: $a = 0,25$ м, $b = 0,5$ м, $\theta_1 = -0,65$, $\theta_2 = 0,75$, $\theta_3 = 0,35$. Значение толщины лопасти, используемое для приведения системы к безразмерным параметрам, $\bar{h} = 0,05$ м. Собственные формы линейных колебаний лопасти в вакууме определяются методом Рэлея–Ритца. Первые три собственные частоты колебаний оболочки в вакууме таковы: 2015,7; 2987; 3703 рад/с.

Исследуем собственные формы и частоты линейных колебаний лопасти в идеальной несжимаемой жидкости. Первая собственная форма колебаний оболочки в жидкости близка к таковой в вакууме, что следует из значений коэффициентов c_k разложения (13): $c_1 = 1$; $c_2 = -0,0175$; $c_3 = 0,0021$. Для второй формы колебаний оболочки эти коэффициенты принимают значения: $c_1 = 0,0447$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0,1504$, для третьей: $c_1 = -0,0288$; $c_2 = -0,235$; $c_3 = 1$. Вторая и третья формы колебаний в жидкости заметно отличаются от таковых в вакууме. Однако, несмотря на такое различие между собственными формами, узловые линии для всех трех форм колебаний оболочки в воде и в вакууме близки.

Собственные частоты колебаний оболочки в жидкости имеют следующие значения: 980,64; 1833,25 и 2460,09 рад/с, что составляет 49; 62,6 и 66,6% соответственно частот колебаний в вакууме. Эти результаты в процентах хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в работе [12].

Следует подчеркнуть, что учет присоединенных масс приводит к изменению соотношения между частотами. Это может вызвать появление или исчезновение внутренних резонансов в системе, что качественно и количественно изменяет динамику системы.

Анализ нелинейных колебаний. Для вывода уравнений нелинейных колебаний оболочки воспользуемся методом уравнений Лагранжа. Потенциальную энергию оболочки запишем в следующем виде [13]:

$$\Pi = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_S \left\{ \frac{1}{1-\mu} ((\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2)h(r, \theta) + \frac{h^3(r, \theta)}{12}(\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2)) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{12}^2 h(r, \theta) + \frac{1}{3} \tau^2 h^3(r, \theta) \right) \right\} r dr d\theta, \quad (16)$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_r}{\partial r} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \quad \chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \chi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r};$$

$$\tau = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta};$$

$k_1(r, \theta)$, $k_2(r, \theta)$ – главные кривизны; $h(r, \theta)$ – переменная толщина оболочки; (r, θ) – полярные координаты.

Кинетическую энергию оболочки представим так:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S (\dot{w}^2 + \dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2) h(r, \theta) r dr d\theta, \quad (17)$$

кинетическую энергию жидкости [14] –

$$K = \frac{1}{2} \rho_2 \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} r dr d\theta. \quad (18)$$

Изгибные перемещения оболочки $w(\mathbf{x}, t)$ раскладываются по собственным формам линейных колебаний в жидкости:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(t) \bar{W}_j(\mathbf{x}), \quad (19)$$

а продольные перемещения $u_r(\mathbf{x}, t)$, $u_\theta(\mathbf{x}, t)$ – по собственным формам линейных колебаний в вакууме:

$$u_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_{i+3}(t) U_{r,i}(\mathbf{x}), \quad u_\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_{i+6}(t) U_{\theta,i}(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Для колебаний оболочки $\varphi_k(t) \overline{W}_k(\mathbf{x})$ индуцированный перепад давлений представим в виде $\dot{\varphi}_k(t) \overline{\Gamma}_k(\mathbf{x})$, где $\overline{\Gamma}_k(\mathbf{x})$ удовлетворяет (14) с $\overline{W}_k(\mathbf{x})$ в правой части. Кинетическую энергию жидкости запишем следующим образом:

$$K = \frac{1}{2} \rho_2 \int_S \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\varphi}_i(t) \dot{\varphi}_j(t) \overline{\Gamma}_i(\mathbf{x}) \overline{W}_j(\mathbf{x}) \right) r dr d\theta. \quad (21)$$

Теперь соотношения (19) и (20) подставим в (16), (17), (21) и произведем необходимое интегрирование. Составим уравнения Лагранжа, пренебрегая инерционными членами по u_r , u_θ . Получим шесть линейных алгебраических уравнений относительно $(\varphi_4, \dots, \varphi_9)$ и три обыкновенных дифференциальных уравнения. Решения линейных алгебраических уравнений подставим в дифференциальные уравнения. В результате получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $(\varphi_1, \dots, \varphi_3)$, которую запишем относительно безразмерных переменных и параметров:

$$\tau = \Omega_1 t, \quad q_i(\tau) = \frac{\varphi_i(t)}{h}, \quad i = 1, \dots, 3,$$

где Ω_1 – первая собственная частота линейных колебаний в жидкости.

Полученную динамическую систему колебаний оболочки представим относительно модальных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 так:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_k &= f_k(\xi_1, \dots, \xi_3) = -\overline{\Omega}_k^2 \xi_k - \\ &- \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 l_{kij} \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{g=1}^3 l_{kijg} \xi_i \xi_j \xi_g, \quad k = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\overline{\Omega}_k$ – безразмерные частоты колебаний в жидкости. В дальнейшем черту над $\overline{\Omega}_k$ будем опускать.

Динамическая система (22) исследуется методом нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера [15]. Выделим одну обобщенную координату, например, ξ_1 , которая определяет движение по нормальной форме. Нелинейную нормальную форму (инвариантное многообразие) представим следующим образом:

$$\xi_k = X_k(\xi_1, \dot{\xi}_1); \quad \dot{\xi}_k = Y_k(\xi_1, \dot{\xi}_1), \quad k = 2, 3. \quad (23)$$

Нормальная форма (23) удовлетворяет уравнениям в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial X_k}{\partial \dot{\xi}_1} f_1(\xi_1, X_2, \dots, X_N) &= Y_k; \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial Y_k}{\partial \dot{\xi}_1} f_1(\xi_1, X_2, \dots, X_N) &= f_k(\xi_1, X_2, \dots, X_N), \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (24)$$

Функции X_k, Y_k ($k = 2, 3$) представим в виде укороченного ряда Тейлора:

$$X_k(\xi_1, \dot{\xi}_1) = \sum_{D \in M} a_{kD} U^D, \quad Y_k(\xi_1, \dot{\xi}_1) = \sum_{D \in M} b_{kD} U^D, \quad k = 2, 3, \quad (25)$$

где $U^D = \xi_1^{d_1} \dot{\xi}_1^{d_2}$; $D = (d_1, d_2)$; M – множество векторов, компоненты которых удовлетворяют неравенствам $2 \leq d_1 + d_2 \leq 3$; d_1, d_2 – натуральные числа.

Подставим полиномы (25) в (24) и приравняем коэффициенты при $\xi_1^{d_1} \dot{\xi}_1^{d_2}$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (25), решая которую находим эти коэффициенты. Нелинейную нормальную форму (23), (25) подставим в первое уравнение системы (22). Теперь движение по нелинейной нормальной форме описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\xi}_1 = f_1(\xi_1, X_2, X_3) = F_1(\xi_1, \dot{\xi}_1). \quad (26)$$

Устойчивость движений на нормальных формах исследуется с помощью уравнений в вариациях. Рассчитывается матрица монодромии, собственные значения которой являются мультипликаторами [16]. По величинам мультипликаторов оценивается устойчивость движения.

Ниже представлен анализ нелинейных нормальных форм колебаний модели лопасти ПЛ-495. Исследовали два одномерных многообразия со следующими фазовыми координатами $(\xi_1, \dot{\xi}_1)$ и $(\xi_2, \dot{\xi}_2)$ в качестве независимых переменных. Движение по нормальной форме, которая описывается одним уравнением вида (26), исследуется с помощью метода гармонического баланса. Решение представляется в виде $A_0 + A_1 \cos(\Omega\tau)$. На рис. 2,а приведена амплитудно-частотная характеристика первой нелинейной нормальной формы с независимыми переменными $(\xi_1, \dot{\xi}_1)$. По оси ординат представлен размах колебаний $2R_1 = \max(\xi_1(\tau)) - \min(\xi_1(\tau))$. Устойчивые колебания на скелетной кривой показаны сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной. Точками отмечены результаты прямого численного моделирования системы (22) с начальными значениями, взятыми из данных анализа системы методом гармонического баланса.

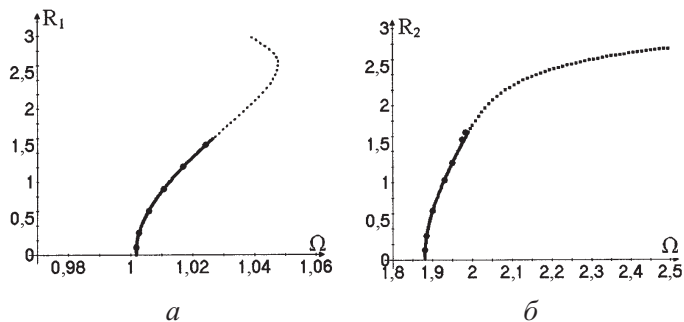


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики нормальных форм.

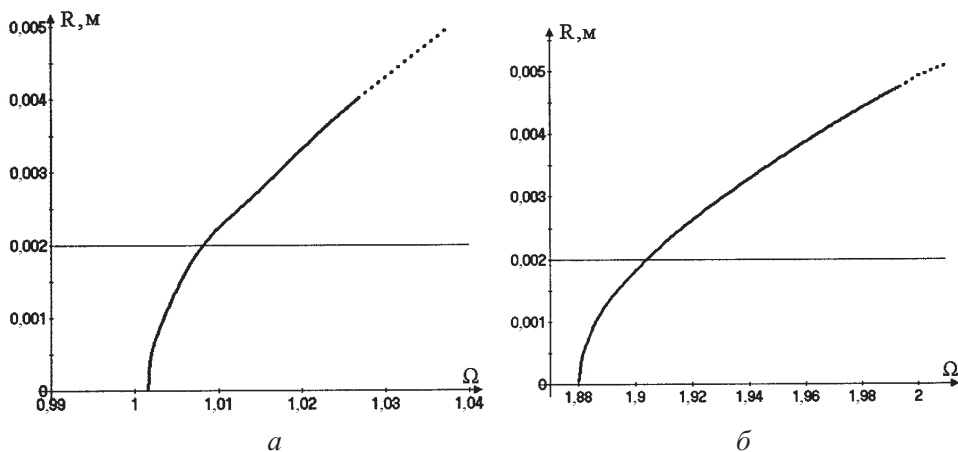


Рис. 3. Скелетные кривые точки (b, θ_2) лопасти при движении по нормальным формам.

На рис. 2,б представлена амплитудно-частотная характеристика второй нелинейной нормальной формы с независимыми переменными $(\xi_2, \dot{\xi}_2)$. Подчеркнем, что полученные скелетные кривые существенно отличаются от скелетных кривых в вакууме. Это связано с изменением соотношения между частотами, вызванным наличием присоединенных масс жидкости.

Рассмотрим перемещения $w(x)$ лопатки гидротурбины (13). Проведенные исследования показывают, что только один сектор лопасти совершает колебания с умеренными амплитудами, остальная часть лопасти имеет малые амплитуды. Заметим, что во всех найденных режимах колебания с наибольшим отношением амплитуды к толщине совершает угол лопатки с координатами $(r, \theta) = (b, \theta_2) = (0,5; 0,75)$, что согласуется с известными данными [11]. Скелетная кривая первой нормальной формы для колебаний в вакууме приведена на рис. 3,а, скелетная кривая второй нормальной формы – на рис. 3,б. Толщина оболочки в этой точке составляет 0,002 м. На рис. 3 показан размах перемещений угловой точки срединной поверхности модели лопасти, горизонтальными прямыми обозначена толщина лопасти в данной точке.

Заключение. Из результатов анализа геометрически нелинейных колебаний пологой оболочки в воде и в вакууме следует, что даже при амплитудах колебаний, соизмеримых с толщиной оболочки на незначительном участке

лопасти, такие движения становятся неустойчивыми. Вследствие потери устойчивости в системе может реализоваться другой режим колебаний, не исследованный в этой работе.

Резюме

Запропоновано метод розрахунку нелінійних коливань пологих оболонок у рідині. Знайдено власні форми і частоти лінійних коливань у рідині, потім нелінійні коливання оболонки розкладаються в ряд за отриманими власними формами системи. Для отриманої моделі оболонки зі скінченим числом ступенів вільності визначаються нелінійні нормальні форми Шоу–П'єрра.

1. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 4. – С. 3 – 34.
2. Atabili M., Pellicano F., and Paidoussis M. P. Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid // J. Fluids Struct. – 1998. – No. 12. – P. 883 – 918.
3. Кантор Б. Я., Науменко В. В., Стрельникова Е. А. Определение частот и форм свободных колебаний консольных пластин в жидкости методом интегральных уравнений: Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2001. – № 6. – С. 44 – 49.
4. Hu X. X. and Tsuiji T. Free vibration analysis of curved and twisted cylindrical thin panels // J. Sound Vibr. – 1999. – 219, No. 1. – P. 63 – 68.
5. Sakiyama T., Hu X. X., Matsuda H., and Morita C. Vibration of twisted and curved cylindrical panels with variable thickness // Ibid. – 2002. – 254, No. 3. – P. 481 – 502.
6. Moffatt S. and He L. On decoupled and fully-coupled methods for blade forced response prediction // J. Fluids Struct. – 2005. – No. 20. – P. 217 – 234.
7. Ergin A. and Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Ibid. – 2003. – No. 17. – P. 927 – 939.
8. Кантор Б. Я., Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков: Новое слово, 2005. – 253 с.
9. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 480 с.
10. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 416 с.
11. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
12. Явиц С. Н. Исследование частотных характеристик лопастей рабочих колес ПЛ гидротурбин // Энергомашиностроение. – 1970. – № 8. – С. 25 – 28.

13. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
14. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.; Л.: Госнаучтехиздат, 1948. – 536 с.
15. Shaw S. W. and Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. Sound Vibr. – 1993. – **164**. – P. 58 – 124.
16. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.

Поступила 18. 06. 2009