

Параметры смешанных форм деформирования с учетом кривизны вершины трещины

В. Н. Шлянников, С. Ю. Кислова

Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, Казань, Россия

Разработан и реализован метод расчета полей параметров напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины при смешанных формах нагружения с учетом членов высших порядков. Показано влияние конечного радиуса кривизны вершины трещины на параметры, характеризующие смешанные формы разрушения в условиях плоской деформации. По результатам расчетов установлен характер влияния условий смешанных форм нагружения и геометрии трещины на поведение безразмерных угловых характеристик второго члена разложения напряжений в пластической области вершины трещины. Получены зависимости между параметрами смешанности, стеснения и трехосности в полном диапазоне смешанных форм деформирования.

Ключевые слова: смешанные формы деформирования, пластическая область вершины трещины, члены высших порядков, метод конечных элементов, параметры смешанности и стеснения.

Обзор литературных источников показывает, что специалисты уделяют особое внимание задачам о наклонных трещинах, которые в механике разрушения относятся к разделу смешанных форм деформирования. Смешанными формами разрушения принято называть случаи, когда наклонные трещины развиваются не в направлении их исходной ориентации. Влияние вида нагружения реализуется через зону пластической деформации в области вершины трещины, что предполагает проведение исследований в упругопластической постановке. В этой связи актуальной становится разработка критериев и параметров механики трещин при сложном напряженном состоянии, основанных на упругопластическом анализе области вершины трещины при соответствующем учете граничных условий.

В последнее время обсуждение проблемы эффектов стеснения занимает особое место. Параметр стеснения представляет собой корректирующую функцию полей напряженно-деформированного состояния (НДС), как правило, через члены высших порядков. Предполагалось, что напряжения и перемещения в области вершины трещины с достаточной точностью можно описать на основе одночленного асимптотического представления типа Хатчинсона–Райса–Розенгрена (ХРР) [1–4]. Однако применение однопараметрического подхода ХРР-типа к определению НДС отражает не полную картину происходящего и может содержать существенные погрешности. В связи с этим возникает необходимость моделировать состояние в вершине наклонной трещины с конечным радиусом кривизны с учетом членов высших порядков на основе дву- или трехчленного разложения параметров НДС в ряд по радиусу.

Целью работы являются разработка и обоснование модели НДС наклонных трещин с конечным радиусом кривизны в упругопластическом материале и анализ эффектов стеснения в полном диапазоне смешанных форм дефор-

мирования для плоской задачи. Для этого необходимо провести численное и аналитическое исследование полей параметров НДС в области вершины трещины.

Объектом исследований служила пластина, нагруженная системой взаимно перпендикулярных нормальных напряжений и ослабленная внутренней сквозной центральной произвольно ориентированной прямолинейной трещиной (рис. 1).

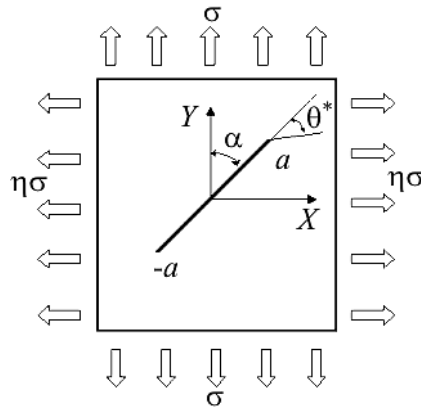


Рис. 1. Пластина с центральной наклонной трещиной: α – угол исходной ориентации трещины; θ^* – угол направления роста трещины; a – полудлина трещины; η – коэффициент двухосности номинальных напряжений.

Классической моделью аналитического исследования состояния в пластической области вершины трещины в деформационно-упрочняющемся материале является ХРР-модель. Отметим, что ХРР-решение относится только к случаю нормального отрыва или чистого сдвига и описывает поля компонент напряжений, деформаций и перемещений в пластической области вершины трещины в материалах, соответствующих деформационной теории пластичности.

Связь между напряжениями и деформациями у вершины трещины в ХРР-модели представлена степенным законом упрочнения в следующем виде (модель Рамберга–Осгуда):

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma} + \bar{\alpha}\bar{\sigma}^n, \tag{1}$$

где $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_T$; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_T$; $\varepsilon_T = \sigma_T/E$; σ_T – предел текучести при растяжении; ε_T – соответствующая этому напряжению деформация; E – модуль упругости; $\bar{\alpha}$ и n – постоянные материала. Зависимость (1) справедлива только при монотонном возрастании напряжения, т.е. при условии отсутствия разгрузки. В этой модели рассматривается область, расположенная достаточно близко к вершине трещины, где преобладают пластические деформации по сравнению с упругими.

При сложном напряженном состоянии эквивалентной уравнению (1) является зависимость

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (1 + \nu)S_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3}\bar{\sigma}_{pp}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\bar{\alpha}\bar{\sigma}_e^{n-1}S_{ij}, \tag{2}$$

где ν – коэффициент Пуассона; S_{ij} – девиатор напряжений; $\bar{\sigma}_{pp}$ – гидростатическое напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера.

В плоской задаче тождественно удовлетворить уравнения равновесия можно путем введения функции напряжений Эри:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \end{cases} \quad (3)$$

где r и θ – полярные координаты с началом в вершине трещины.

Однако, как уже отмечалось, ХРР-решение является одночленным асимптотическим представлением параметров напряженно-деформированного состояния и не может в полной мере описать поля напряжений и деформаций в пластической области вершины наклонной трещины. Из литературных источников известно, что воздействие геометрии тела с трещиной и условий его нагружения в основном реализуется через второй и третий члены разложений. Отсюда возникает необходимость удержания в полях параметров НДС членов высших порядков. Решение задачи с использованием членов высших порядков рассматривалось в работах [5–9]. Анализ смешанных форм нелинейного деформирования при плоской деформации (ПД) для математического разреза выполнен впервые Ч. Ф. Ши в 1973 г. для упрочняющихся материалов и условий идеальной пластичности. Им введены дополнительные параметры, характеризующие вид смешанных форм для упругого M_e и упругопластического M_p деформирования в области вершины трещины.

Порядок расчетов в настоящей работе основан на численном определении распределений всех компонент полных напряжений в окрестности вершины трещины с конечным радиусом кривизны ρ для различных видов смешанных форм деформирования. Найденная по этим распределениям угловая координата θ^* максимума окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ принимается как направление роста трещины согласно критерию максимальных нормальных напряжений [10, 11].

При этом предполагается, что общая структура модели напряженно-деформированного состояния в пластической области вершины трещины содержит аналитическую и численную составляющие полного решения. Общий алгоритм решения представлен в виде блок-схемы (рис. 2). За основу принята известная [2, 3] методология доопределения аналитического решения ХРР-типа слагаемыми более высоких порядков, имеющих смысл параметра стеснения. Для задач смешанных форм деформирования удержание более двух первых слагаемых в разложениях параметров НДС невозможно из-за проблематичности построения аналитического решения по определению угловых функций распределений компонент напряжений.

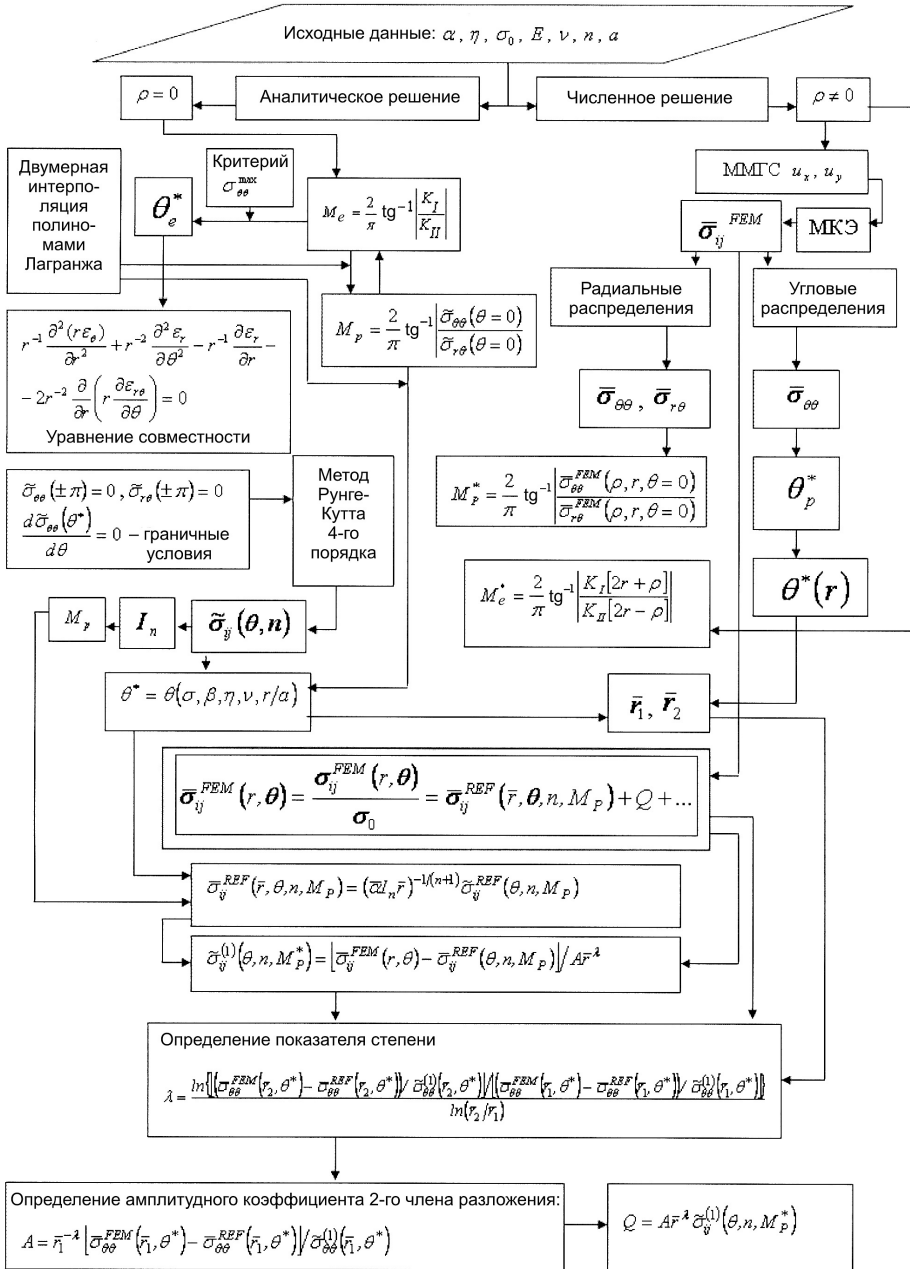


Рис. 2. Общий алгоритм расчета полей параметров НДС в области вершины трещины с конечным радиусом кривизны.

В этой связи полное решение плоской задачи приведено в виде двучленного разложения: напряжения

$$\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta) = \frac{\bar{r}^{-k} K_M^p \tilde{\sigma}_{ij}^{FEM}}{\sigma_0} = \bar{\sigma}_{ij}^{REF}(\bar{r}, \theta, n, M_p) + Q + \dots, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{REF} &= \left[\left(\frac{1}{\alpha \varepsilon_0 I_n} \right) \left(\frac{J}{\sigma_0 r} \right) \right]^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta, n, M_p) = \\ &= \bar{r}^{-1/(n+1)} K_M^p \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta, n, M_p), \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_n(\theta, M_p, n) = \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(n, \theta) d\theta, \quad (6)$$

$$Q = A \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right)^\lambda \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta, n, M_p^*) = A \bar{r}^\lambda \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta, n, M_p^*); \quad (7)$$

деформации

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij}^{FEM}(r, \theta) &= \frac{\varepsilon(r, \theta)}{\alpha \varepsilon_0} = \left[\left(\frac{1}{\alpha \varepsilon_0 I_n} \right) \left(\frac{J}{\sigma_0 r} \right) \right]^{n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}(\theta, n, M_p) + \\ &+ A^{(1-n)/(n+1)} \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right)^{\lambda-(n-1)/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(\theta, n, M_p^*) = \\ &= \bar{r}^{-n/(n+1)} (K_M^p)^n \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}(\theta, n, M_p) + \\ &+ \bar{r}^{\lambda-(n-1)/(n+1)} A^{(1-n)/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(\theta, n, M_p^*) + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}^{FEM}$ – численное решение полей напряжений и деформаций, полученное методом конечных элементов (МКЭ) на основании модифицированного метода граничного слоя (ММГС); σ_0 , ε_0 – напряжение и деформация текучести; r , θ – полярные координаты; $\bar{\sigma}_{ij}^{REF}$ – аналитическое решение для задач смешанных форм деформирования типа математического разреза с нулевым радиусом кривизны; n – показатель деформационного упрочнения; K_M^p – упругопластический коэффициент интенсивности напряжений; M_p – пластический параметр смешанности для трещины с нулевым радиусом кривизны; Q – второй член разложения, или параметр стеснения; A и λ – амплитудный коэффициент и показатель степени второго члена; $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}$ – безразмерные угловые функции компонент напряжений и деформаций первого члена разложения; $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ – безразмерные угловые функции компонент напряжений и деформаций второго члена разложения; M_p^* – пластический параметр смешанности для трещины с конечным радиусом кривизны.

Для трещины с конечным радиусом кривизны ρ при определении упругого параметра смешанности M_e^* используем формулы для полей напряжений в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \\ &+ \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + T; \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \\ &+ \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\ &+ \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \right]. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Как это принято в упругопластическом анализе, радиальная координата r нормирована соответствующим значением J -интеграла:

$$\bar{r} = \frac{r\sigma_0}{J}, \quad (10)$$

где компоненты J -интеграла определяются следующими формулами [12]:

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2 + J_y^2}; & J_x &= \frac{(1-\nu)(1+\chi)}{4E} (K_1^2 + K_2^2); \\ J_y &= -\frac{(1+\nu)(1+\chi)}{2E} K_1 K_2; & \chi &= 3 - 4\nu; \\ K_1 &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2} [(1+\eta) - (1-\eta)\cos 2\alpha]; & K_2 &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2} [(1-\eta)\sin 2\alpha] \end{aligned} \quad (11)$$

(a – полудлина трещины; η – коэффициент двухосности; α – угол начального наклона трещины; K_1 и K_2 – упругие коэффициенты интенсивности напряжений).

В предложенной модели (4) первый член разложения является аналитическим решением для задач смешанных форм деформирования типа математического разреза с нулевым радиусом кривизны, в котором безразмерные угловые функции получены аналитически в результате решения нелинейного дифференциального уравнения совместности деформации четвертого порядка по методу Рунге-Кутты. Второй член разложения трактуется как параметр стеснения и именно он воспроизводит характер различий в поведении математического разреза (по одночленной модели ХРР-типа) и трещины с конеч-

ным радиусом кривизны при произвольном двухосном нагружении в полном диапазоне смешанных форм упругопластического деформирования.

В качестве полного решения в разложении (4) выступают стоящие в левой части поля напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{FEM}$, полученные МКЭ на основе модифицированного метода граничного слоя. Таким образом, неизвестными в предлагаемой структуре полей напряжений являются следующие параметры: безразмерные угловые функции компонент напряжений второго члена $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$, показатель степени λ и амплитудный коэффициент A .

Аналитическая часть задачи. Исследование задачи строится на основании решения уравнений совместности деформаций в частных производных

$$r^{-1} \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} + r^{-2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r^{-1} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - 2r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (12)$$

путем исключения из него деформаций, уравнений эквивалентных напряжений для плосконапряженного состояния (ПНС) и плоской деформации, а также зависимостей между напряжениями и деформациями.

После соответствующих подстановок и преобразований нелинейное дифференциальное уравнение совместности деформаций становится однородным относительно полярного угла θ . Способы задания граничных условий изложены в работах [12, 13].

В настоящей работе рассматриваются поля в вершине произвольно ориентированной трещины при изменении полярного угла θ в интервале $-180 \dots 180^\circ$. Удовлетворяя граничным условиям, что берега трещины свободны от напряжений, можем записать следующее:

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm 180^\circ. \quad (13)$$

Также введены дополнительные граничные условия согласно критерию максимальных нормальных напряжений [12, 14], которые имеют вид

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta^*)}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2 \sigma_{\theta\theta}(\theta^*)}{d\theta} \leq 0. \quad (14)$$

Таким образом, учитывая все граничные условия, можно разрешить нелинейное дифференциальное уравнение совместности деформаций четвертого порядка по методу Рунга-Кутты и аналитически определить безразмерные угловые функции первого члена разложения $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta, n, M_p)$ в решении (4).

В рамках аналитической части исследования задачи для первого слагаемого модели (4), относящегося к математическому разрезу, найдены угловые безразмерные распределения компонент напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$ и деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}$ (рис. 3). В результате последовательного перебора дискретных значений угла начального роста трещины θ^* в интервале $-75 \dots 0^\circ$ воспроизведен полный

диапазон смешанных форм нагружения от условий нормального отрыва до чистого сдвига для различных значений показателя деформационного упрочнения.

По этим данным, в свою очередь, рассчитаны упругопластические коэффициенты интенсивности напряжений K_{M_p} , параметры смешанности M_p и константы смешанных форм I_n (рис. 4) для математического разреза в полном диапазоне условий нагружения с учетом пластических свойств материала. Из рис. 4,б следует, что по мере приближения к случаю идеальной пластичности ($n \rightarrow \infty$) влияние смешанных форм деформирования становится менее значимым.

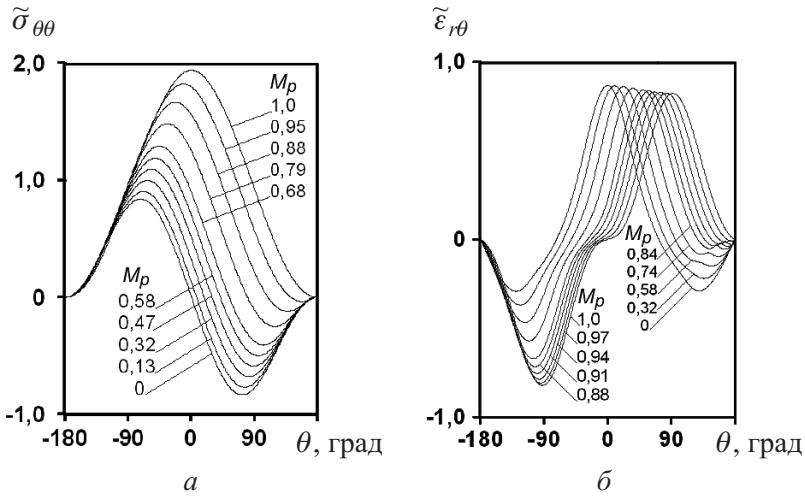


Рис. 3. Угловые распределения упругопластических напряжений (а) и деформаций (б) для трещины в виде математического разреза.

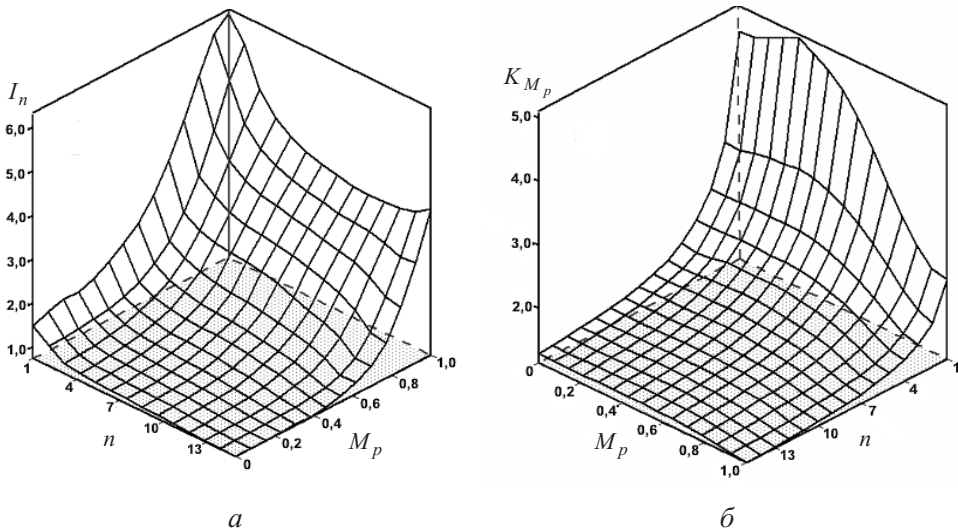


Рис. 4. Поведение параметров смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза.

Численная часть задачи. Численная составляющая решения поставленной задачи согласно блок-схеме на рис. 2 состоит в расчете действующих упругопластических компонент напряжений на основании инженерного компьютерного комплекса программ ANSYS, реализующего метод конечных элементов. Рассматривался ряд расчетных схем для трещин с конечным радиусом кривизны ρ . Согласно модифицированному методу задания граничных условий все изменения исследуемых условий нагружения воспроизводились через граничные перемещения, которые задавались на контуре выделенной области (рис. 5,а).

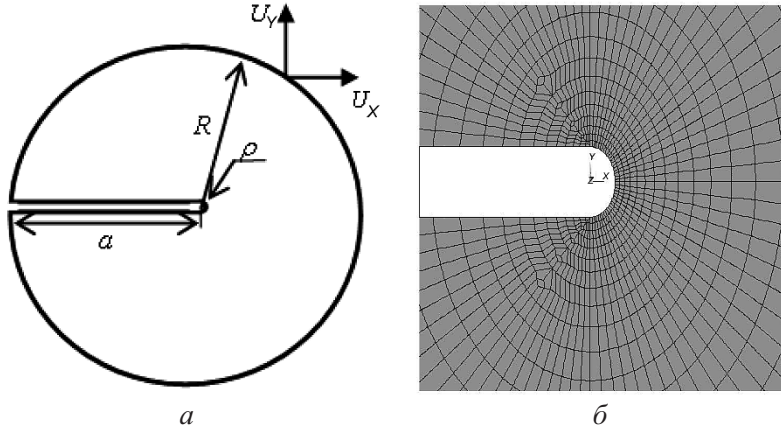


Рис. 5. Выделенная область вершины трещины с граничными перемещениями (а) и расчетная схема МКЭ (б).

В соответствии с этим для расчета полных напряжений в левой части основного модельного уравнения (4) сформирована расчетная схема, моделирующая область вершины трещины (рис. 5,б). Поля граничных перемещений заданы в граничных узлах этой расчетной схемы, расположенных на внешнем контуре выделенной круговой области с шагом по углу $\theta = 4,5^\circ$. Таким образом, при решении задачи для каждого отдельного случая смешанных форм деформирования при двухосном нагружении задается свое поле граничных упругих перемещений, которое определяется по формулам [15]:

$$u_x = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(k-1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_2}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(k+1) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{(1-\eta)\sigma}{8G} \{ r[\cos(\theta+2\alpha) + k \cos(\theta-2\alpha) - 2 \sin \theta \sin 2\alpha] + (k+1)a \cos 2\alpha \}; \quad (15a)$$

$$u_y = \frac{K_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(k+1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_2}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(1-k) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{(1-\eta)\sigma}{8G} \{ r[\sin(2\alpha-\theta) + k \sin(2\alpha+\theta) - 2 \sin \theta \cos 2\alpha] + (k+1)a \sin 2\alpha \}, \quad (15b)$$

где r, θ – полярные координаты с центром в вершине трещины; G – модуль сдвига; $k = (3 - 4\nu)$ и $k = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ – для плоской деформации и плоского напряженного состояния соответственно; σ – значение номинальных напряжений; K_1 и K_2 определяются по формулам (11).

Данные формулы для перемещений позволяют в явном виде учитывать влияние уровня приложенных напряжений σ , угла начальной ориентации трещины α , длины трещины a и коэффициента двухосности η . В качестве исходных данных принимаем радиус кривизны вершины трещины ρ , угол начальной ориентации трещины α , коэффициент двухосности номинальных напряжений η и упругопластические константы материала ν, E, σ_0, n . Все численные расчеты с привлечением МКЭ проводились для упругопластического материала со следующими основными механическими характеристиками: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\sigma_0 = 380$ МПа; $n = 5$ при трех значениях коэффициента двухосности η : 0; 0,5; -1 . Количественными характеристиками условий нагружения и состояния в подобных задачах являются упругие и пластические параметры смешанности, которые определяются через соответствующие компоненты напряжений на линии продолжения трещины ($\theta = 0$):

$$M_e = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{\sigma_{\theta\theta}^e(\theta=0)}{\sigma_{r\theta}^e(\theta=0)} \right| = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{K_1}{K_2} \right|; \quad M_p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{\sigma_{\theta\theta}^p(\theta=0)}{\sigma_{r\theta}^p(\theta=0)} \right|. \quad (16)$$

Воспроизвести полный диапазон возможных сочетаний форм отрыва и сдвига в плоской задаче можно различными способами. Как следует из упругого анализа (11) и (16), моделирование условий полного диапазона смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига для идеализированных условий состояния тела при плоской деформации или плоском напряженном состоянии может быть достигнуто при фиксировании коэффициента двухосности номинальных напряжений $\eta = -1$ и варьировании углом исходной ориентации трещины от $\alpha = 45^\circ$ ($M_e = M_p = 0$) до $\alpha = 90^\circ$ ($M_e = M_p = 1$).

Сформированы три расчетные схемы МКЭ (рис. 5,б) с разными радиусами кривизны вершины трещины: $\rho/a = 2 \cdot 10^{-3}$, 10^{-3} и 10^{-4} . Для каждого из трех вышеуказанных соотношений рассчитывались полярные распределения компонент напряжений и амплитудные коэффициенты по МКЭ.

Согласно общей последовательности расчетов (рис. 2), определялись радиальные (на продолжении трещины) и угловые распределения компонент напряжений, деформаций и перемещений для каждого сочетания угла исходной ориентации трещины α , коэффициента двухосности η , относительного радиуса кривизны ρ/a и уровня номинальных напряжений σ для материала с показателем упрочнения $n = 5$.

При анализе численных результатов полных полей упругопластических напряжений установлены эффекты влияния двухосности номинальных напряжений, величины радиуса кривизны вершины трещины и условий смешанных форм нагружения на полярные распределения напряжений. Анализ эффектов влияния вида двухосного напряженного состояния на примере окружной компоненты напряжений показывает, что наибольшие расхождения в распре-

делениях имеют место при переходе от положительных к отрицательным коэффициентам двухосности напряжений η . В то же время оценка влияния радиуса кривизны вершины трещины ρ/a на угловые распределения полей полных напряжений свидетельствует о том, что поведение компонент напряжений зависит от типа смешанных форм деформирования. В наибольшей степени это влияние проявляется при нормальном отрыве ($M_p = 1, \alpha = 90^\circ$). Получено, что вариация смешанных форм деформирования от чистого сдвига ($\alpha = 45^\circ, \eta = -1$) до нормального отрыва ($\alpha = 90^\circ, \eta = -1$) приводит к монотонному изменению полей окружных напряжений $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}$. По координатам максимумов $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}$ определялся угол направления дальнейшего роста трещины θ^* в зависимости от вида смешанных форм деформирования согласно критерию максимальных нормальных напряжений. Результаты численных расчетов показывают, что распределения компонент напряжений для различных расстояний от вершины трещины \bar{r}_i не совпадают между собой, и это свидетельствует о зависимости полярных угловых распределений компонент напряжений от положения рассматриваемого кругового сечения.

В ходе расчетов также определялись радиальные распределения компонент напряжений. Интерпретация этих результатов отнесена к сечениям, расположенным на продолжении трещины при $\theta = 0$ (рис. 6). Представленные на рис. 6 распределения нормальных и сдвиговых напряжений использовались в дальнейшем для расчета параметров смешанности M_p^* на продолжении трещины.

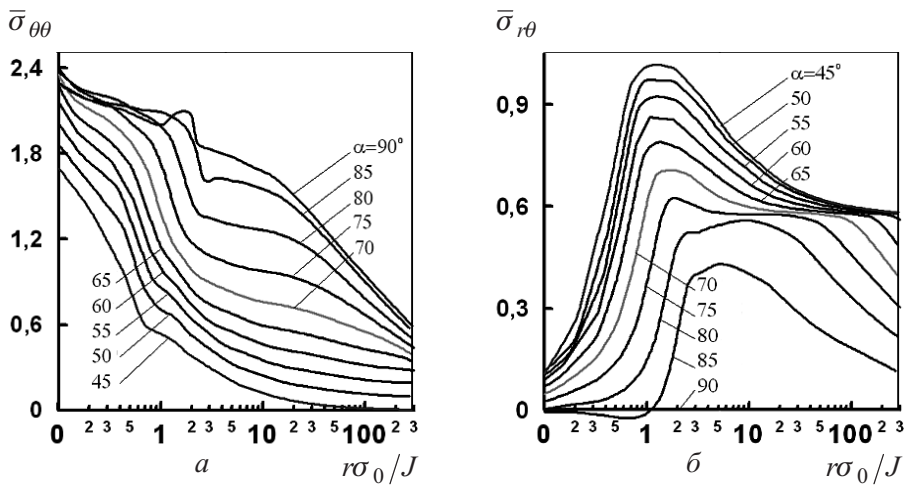


Рис. 6. Радиальные распределения компонент напряжений на продолжении трещины.

Согласно структуре (4) и блок-схеме на рис. 2, угловые безразмерные распределения напряжений второго члена $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ предлагается определять как разность между полным МКЭ-решением и аналитическим:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta, n, M_p^*) = \frac{1}{A\bar{r}^\lambda} [\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta) - \bar{\sigma}_{ij}^{REF}(\bar{r}, \theta, n, M_p^*)]. \quad (17)$$

В уравнении (17) произведение неизвестных пока величин $A\bar{r}^\lambda$ является масштабным множителем, который подбирается так, чтобы безразмерная интенсивность напряжений второго члена $\tilde{\sigma}_e^{(1)}$ имела максимальное значение $\tilde{\sigma}_e^{(1)} = 1$ на всем интервале интегрирования от $-\pi$ до π .

С учетом найденной функции $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$ амплитудный коэффициент A при втором члене асимптотического разложения напряжений определяется по следующей формуле:

$$A = \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\bar{r}_1, \theta^*) - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{REF}(\bar{r}_1, \theta^*)}{\bar{r}_1^\lambda \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\bar{r}_1, \theta^*)}. \quad (18)$$

Согласно принятому предположению, что угловая координата максимума окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ является направлением роста трещины θ^* , показатель степени второго члена разложения можно найти по компонентам напряжений для двух расстояний от вершины трещины \bar{r}_1 и \bar{r}_2 , причем $\bar{r}_2 > \bar{r}_1$:

$$\lambda = \frac{1}{\ln(\bar{r}_2/\bar{r}_1)} \ln \left\{ \frac{[\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\bar{r}_2, \theta^*) - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{REF}(\bar{r}_2, \theta^*)]/\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\bar{r}_2, \theta^*)}{[\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\bar{r}_1, \theta^*) - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{REF}(\bar{r}_1, \theta^*)]/\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\bar{r}_1, \theta^*)} \right\}. \quad (19)$$

Зная угловые распределения напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ и показатель степени второго члена разложения λ , можно вычислить значение параметра стеснения Q по формуле (7).

Общее решение (4) построено на предположении, что полные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$ и напряжения, относящиеся к первому $\bar{\sigma}_{ij}^{REF}$ и второму Q слагаемым, имеют экстремум в одной и той же точке по угловой координате, определяющей направление роста трещины θ^* . При этом использование различных сочетаний исходной ориентации трещины и вида двухосного нагружения дает одно и то же значение угла дальнейшего роста трещины.

В результате выполненных численных расчетов установлено, что максимальные значения окружных напряжений располагаются не на контуре вершины трещины, а на некотором удалении от нее, т.е. имеется некоторый подслоный максимум. В этой связи рассматривались зависимости направления роста трещины θ^* в диапазоне расстояний от вершины трещины (рис. 7).

На основании сравнения полученных численных результатов с экспериментальными данными [13] (рис. 7) обоснован выбор расстояний \bar{r}_i от вершины трещины при нахождении угловых распределений второго члена разложения (4) $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta^*)|_{\bar{r}=\bar{r}_i}$ для соответствующих сочетаний $\theta^* = \theta^*(\rho/a, \alpha, \eta)$. На рис. 7 в качестве примера предлагаемого подхода приведена горизонтальная линия, ордината которой $\theta^* = 73^\circ$ соответствует эксперименту по определению направления роста трещины для случая чистого сдвига при $\eta = -1$, $\alpha = 45^\circ$ и $M_p = 0$. Светлыми стрелками показан вид излома образца для

данного типа нагружения. Горизонтальная линия, соответствующая экспериментальному значению $\theta^* = 73^\circ$, пересекает расчетную кривую, полученную численно МКЭ в двух точках \bar{r}_1 и \bar{r}_2 . Таким образом, в дальнейших расчетах для трещин с конечным радиусом кривизны использовались безразмерные угловые распределения $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\theta^*)|_{\bar{r}=\bar{r}_1}$ и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\theta^*)|_{\bar{r}=\bar{r}_2}$ для концентрических окружностей, расположенных соответственно на расстояниях \bar{r}_1 и \bar{r}_2 от вершины трещины. Подобная процедура нахождения $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(\theta^*)$ и $\bar{r}_2 = \bar{r}_2(\theta^*)$ повторялась также для других вариантов смешанных форм нагружения. Соответствие экспериментальных данных расчетным зависимостям для каждого конкретного вида нагружения показано темными стрелками на рис. 7.

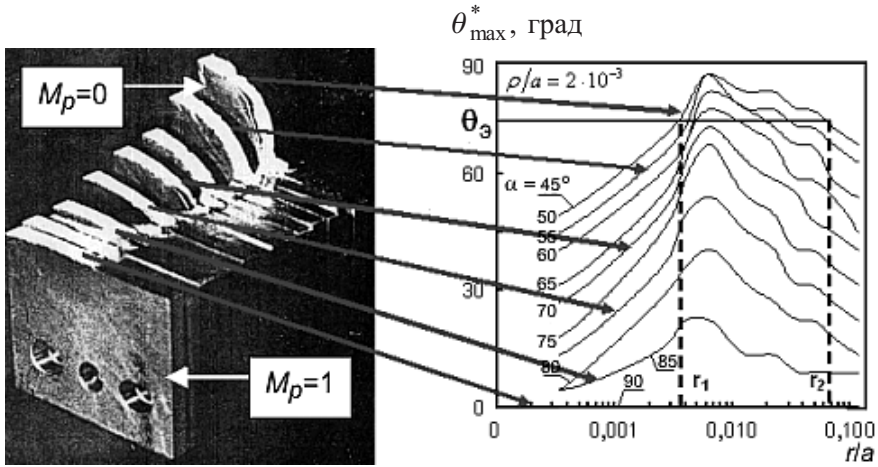


Рис. 7. Обоснование выбора радиальной координаты направления роста трещины по экспериментальным данным.

Описанная выше процедура нахождения \bar{r}_1 и \bar{r}_2 является фрагментом предложенной общей блок-схемы всего комплекса расчетов (рис. 2), которая позволяет по известным значениям угловых распределений второго члена разложения $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta^*)|_{\bar{r}=\bar{r}_1}$ и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta^*)|_{\bar{r}=\bar{r}_2}$ определить показатель степени λ и амплитуду A для каждого вида смешанных форм нагружения по уравнениям (18) и (19).

В настоящей работе состояние тела с наклонной трещиной с конечным радиусом кривизны характеризуется параметрами смешанности M_e^* и M_p^* для условий сочетания форм нормального отрыва и поперечного сдвига:

$$M_e^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left| \frac{K_I [2r + \rho]}{K_{II} [2r - \rho]} \right| = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left| \frac{[(1 + \eta) - (1 - \eta) \cos 2\alpha] (2r + \rho)}{[(1 - \eta) \sin 2\alpha] (2r - \rho)} \right|; \quad (20)$$

$$M_p^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^p(\theta = \theta^*)}{\bar{\sigma}_{r\theta}^p(\theta = \theta^*)} \right|. \quad (21)$$

Эти параметры при упругом (M_e) и пластическом (M_p) деформировании определялись отношением соответствующих компонент нормальных $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ и сдвиговых $\bar{\sigma}_{r\theta}$ напряжений. Параметры смешанности рассчитывались в двух направлениях: на продолжении плоскости ориентации исходной трещины при $\theta = 0$ и в направлении ее роста, определяемом $\theta = \theta^*$ и зависящем от вида смешанных форм нагружения.

Результаты аналитических расчетов показывают, что для распределений упругого параметра смешанности $M_e^*(\theta = 0)$ – рис. 8,а характерна, а для пластического $M_p^*(\theta = 0)$ – рис. 8,б очевидна тенденция к возникновению условий, близких к нормальному отрыву на криволинейном контуре вершины трещины в плоскости ее исходной ориентации, т.е. при $\bar{r} = 0$ и $\theta = 0$.

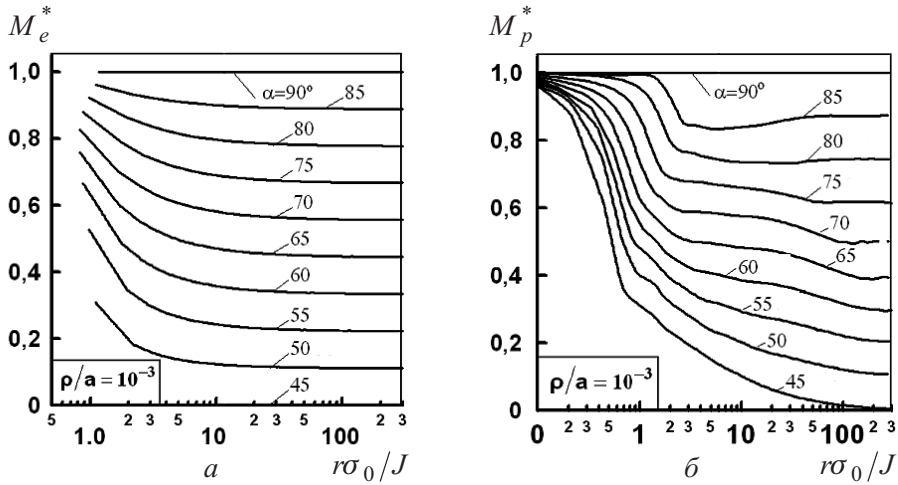


Рис. 8. Поведение параметров смешанности для различной геометрии вершины трещины.

На основании выполненных расчетов установлены зависимости между упругим M_e^* и пластическим M_p^* параметрами в полном диапазоне смешанных форм разрушения для фиксированного отношения радиуса кривизны к длине трещины. На значительном удалении от вершины трещины $\bar{r} > 100$, где влияние радиуса кривизны мало и пластические деформации сопоставимы с упругими, зависимость между M_e^* и M_p^* близка к линейной, что является граничным условием рассматриваемой задачи.

В случае распределений пластического $M_p^*(\theta = \theta^*)$ параметра смешанности в направлении роста трещины для различных значений радиуса кривизны ρ/a отмечается близость его значений к единице в полном диапазоне смешанных форм нагружения, что еще раз доказывает применимость критерия $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ в настоящих расчетах [14]. Получено, что распределения данного параметра для трех различных соотношений ρ/a во всех случаях зависят от угла исходной ориентации и радиуса кривизны вершины трещины.

Согласно общей концепции модели (4), все члены уравнения имеют экстремум в одной и той же точке по угловой координате, определяющей

направление роста трещины θ^* . При этом различные сочетания исходного угла трещины α и условий двухосного нагружения η могут давать одно и то же значение угла дальнейшего роста трещины θ^* . Особенность аналитического решения при определении полей напряжений состоит в том, что оно не идентифицировано по отношению к условиям двухосного нагружения и имеет один управляющий параметр θ^* . С другой стороны, МКЭ в силу своей формулировки представляет результаты напряженно-деформированного состояния для вполне конкретного заданного вида нагружения или четкой модельной ситуации. Результаты сравнения численного решения МКЭ с аналитическим доказывают, что путем надлежащего подбора комбинаций условий двухосного нагружения η и угла исходной ориентации трещины α обеспечивается совпадение положений максимумов $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\theta^*)$ и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}(\theta^*)$ и профилей распределений окружных напряжений. Из этого следует, что исходя из аддитивной декомпозиции напряжений согласно предложенной модели второе слагаемое (4) должно иметь экстремум (максимум) для окружных напряжений $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}$ в том же направлении $\theta = \theta^*$, что и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(\theta = \theta^*)$ и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}(\theta = \theta^*)$ (или $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{REF}$ для математического разреза). Тем самым обеспечивается согласование распределений окружной компоненты напряжений для трещины с конечным радиусом кривизны, математического разреза и второго члена разложения (4).

Согласно полученным угловым распределениям полей напряжений второго члена разложения $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}|_{r_1}$ и $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}|_{r_2}$, диапазон изменения значения направления роста трещины от $\theta^* = 0$ до -75° , определяемый по координатам максимумов для компоненты окружных напряжений $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}$, совпадает с диапазоном изменения θ^* при угловых распределениях первого члена разложения (4). Это подтверждает предположение, что полные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$ и напряжения, относящиеся к первому $\bar{\sigma}_{ij}^{REF}$ и второму Q слагаемым, имеют экстремум в одной и той же точке по угловой координате, определяющей направление роста трещины θ^* .

С учетом найденной функции $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ амплитудный коэффициент A при втором члене асимптотического разложения напряжений рассчитывается по формуле (18). В свою очередь, показатель степени λ при втором члене разложения определяется через компоненты напряжений для двух расстояний от вершины трещины \bar{r}_1 и \bar{r}_2 ($\bar{r}_2 > \bar{r}_1$) для каждого варианта смешанных форм нагружения и геометрии вершины трещины. По совокупности этих расчетов для $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$, A , λ по формуле (7) рассчитываются значения параметра стеснения Q или корректирующей функции полей НДС в полном диапазоне смешанных форм разрушения. Зависимости между параметрами стеснения Q и смешанности M_p^* приведены на рис. 9,а для рассматриваемых относительных радиусов кривизны вершины трещины.

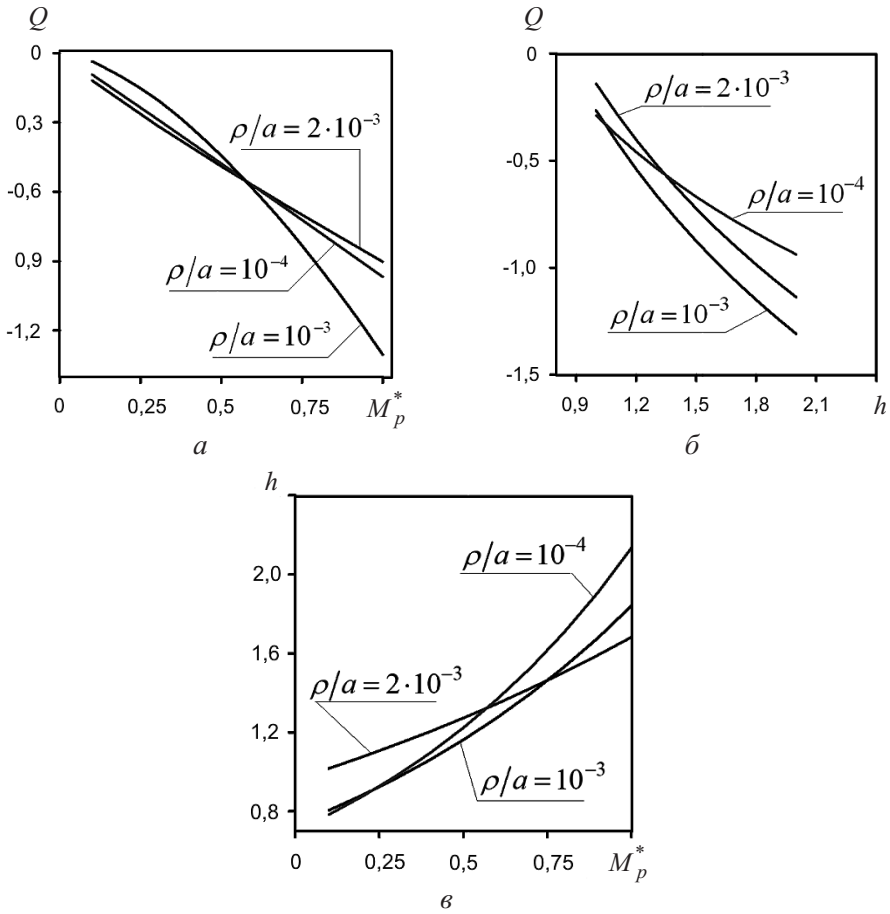


Рис. 9. Зависимости между параметрами смешанности, стеснения и трехосности для трещин с конечным радиусом кривизны.

Одним из параметров, характеризующих перераспределение напряжений при сложном напряженном состоянии, является параметр трехосности h [16]. Данный параметр определяется как отношение первого инварианта тензора напряжений σ_{kk} и второго инварианта тензора-девиатора напряжений σ_e :

$$h = \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_e} = \frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)}{3\bar{\sigma}_e}, \quad (22)$$

где $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$ – главные напряжения; $\bar{\sigma}_e$ – эквивалентные по Мизесу напряжения.

Параметр трехосности h действующих напряжений, часто используемый при интерпретации результатов для задач сложного напряженного состояния, определяется по рассчитанным полям полных упругопластических напряжений $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$. Кроме того, необходимость рассмотрения альтернативного параметра стеснения h обусловлена тем, что структура решения и результаты для второго члена разложения (4) зависят от выбора $\bar{\sigma}_{ij}^{REF}$. Параметр h свободен

от этой неопределенности и является обобщенной характеристикой НДС, не связанной с теми или иными модельными представлениями. Поэтому в настоящем исследовании имело смысл влияние смешанных форм нагружения M_p^* поставить в соответствие двум различным вариантам параметров стеснения Q и h .

Известно, что увеличение абсолютных значений параметра трехосности h , как следует из уравнения (22), сопровождается уменьшением запаса пластичности, что повышает склонность материала к хрупкому разрушению.

Найденные значения коэффициента трехосности напряжений h поставлены в соответствие значениям параметра стеснения Q (рис. 9,б) для исследованных вариантов нагружений и геометрии вершины трещины.

Следствием корреляции между Q и h являются установленные зависимости между параметрами смешанности M_p^* и трехосности упругопластических напряжений h в области вершины трещины различной геометрии (рис. 9,в). Можно отметить взаимное соответствие между тремя рассматриваемыми характеристиками Q , M_p^* , h , отражающими влияние условий нагружения на состояние в пластической области вершины трещины с конечным радиусом кривизны.

Для аналитического описания полученных численных результатов, отражающих зависимость параметра стеснения Q от исследованных факторов нагружения и геометрии трещины, предложено обобщенное аппроксимационное уравнение:

$$Q = -0,1184 - \frac{0,0759(M_p^*)^{1,495}}{951,627 \rho/a - 1,31 \cdot 10^6 (\rho/a)^2 + 4,28 \cdot 10^8 (\rho/a)^3} \cdot \quad (23)$$

Полученные результаты позволяют количественно оценить вклады первого и второго членов разложения (4) в общее решение $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$. Установлено, что вклад второго слагаемого в уравнении (4), или параметра стеснения Q по сравнению с первым членом разложения $\bar{\sigma}_{ij}^{REF}$ достигает 40% (таблица).

Вклад параметра стеснения в общее решение $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$

| Геометрия трещины ρ/a | Вклад параметра стеснения в общее решение, %, при α , равном | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | 8 | 12 | 17 | 20 | 21 | 26 | 22 | 28 | 25 | 31 |
| 10^{-3} | 6 | 12 | 18 | 19 | 24 | 24 | 27 | 30 | 32 | 38 |
| 10^{-4} | 12 | 13 | 15 | 19 | 22 | 23 | 23 | 27 | 24 | 28 |

На примере радиальных распределений окружных напряжений (рис. 10) определена область доминантности предлагаемой модели НДС по отношению к известным классическим упругим и пластическим решениям для

трещин различной геометрии. Результаты, представленные на рис. 10, относятся к ситуации нормального отрыва. Подобный характер влияния членов высших порядков сохраняется также при других видах нагружения.

Отметим, что при $r\sigma_0/J=100$ аналитические и численные решения сходятся в одной точке $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = 1$, соответствующей переходу из упругого состояния в пластическое. Результаты аналитического упругого решения ($\bar{\sigma}_{ij}^e + \bar{T}$) приведены с учетом несингулярного члена \bar{T} и конечного радиуса кривизны вершины трещины и поэтому лучше согласуются с численными данными МКЭ в упругой области. Результаты расчета по ХРР-модели σ_{ij}^{REF} в пластической области меньше согласуются с численными данными ввиду отсутствия возможности учета условий нагружения. Как следует из рис. 10, область определения решений с учетом членов высших порядков ограничена диапазоном $1 \leq \bar{r} \leq 1000$ за областью разгрузки, примыкающей непосредственно к вершине трещины с конечным радиусом кривизны.

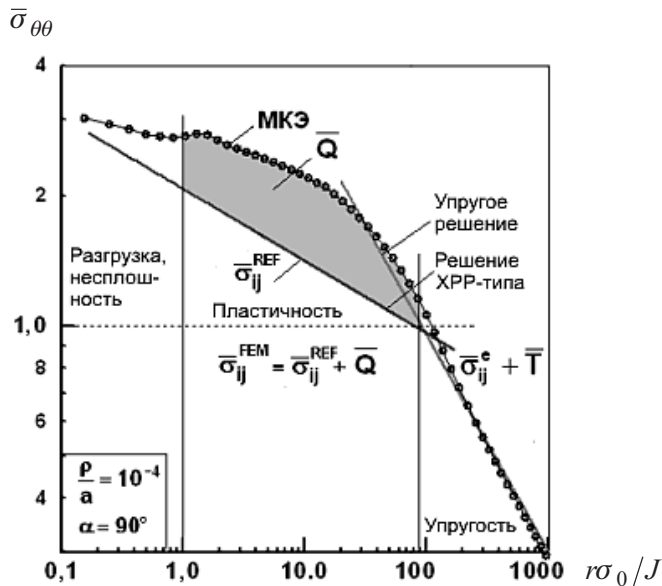


Рис. 10. Область доминантности предлагаемого решения.

Сопоставление классических модельных представлений с численным решением по МКЭ (точки на рис. 10) дает погрешность, которая может возникнуть, если не учитывать влияние параметра Q и игнорировать члены высших порядков. Данные на рис. 10 свидетельствуют о предпочтительности двучленного представления по сравнению с аналитическим решением ХРР-типа для смешанных форм нагружения.

Таким образом, выполненные расчеты позволяют установить качественные и количественные эффекты влияния нагружения и геометрии вершины трещины на параметры НДС при смешанных формах разрушения, что предполагает необходимость модельных представлений с учетом членов высших порядков.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” при финансовой поддержке Рособразования по гранту № П2454 и ФАНИ по гранту № 02.740.11.0205.

Резюме

Розроблено і реалізовано метод розрахунку полів параметрів напружено-деформованого стану в області вістря тріщини при змішаних формах навантаження з урахуванням членів вищих порядків. Показано вплив скінченного радіуса кривизни вістря тріщини на параметри, що характеризують змішані форми руйнування в умовах плоскої деформації. За результатами розрахунків встановлено характер впливу умов змішаних форм навантаження і геометрії тріщини на поведінку безрозмірних кутових характеристик другого члена розкладання напруження в пластичній області вістря тріщини. Отримано залежності між параметрами змішаності, стиснення і тривісності в повному діапазоні змішаних форм деформування.

1. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусума Х.* Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
2. *Hutchinson J. W.* Plastic stress and strain fields at a crack tip // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1968. – **16.** – P. 337 – 347.
3. *Hutchinson J. W.* Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // *Ibid.* – P. 13 – 31.
4. *Rice J. R. and Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *Ibid.* – P. 1 – 12.
5. *Li Y. and Wang Z.* High-order asymptotic field of tensile plane-strain nonlinear crack problems // *Scientia Sinica.* – 1986. – **29A.** – P. 941 – 955.
6. *Sharma S. M. and Aravas N.* Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1991. – **39.** – P. 1043 – 1072.
7. *O’Dowd N. P. and Shih C. F.* Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter. I. Structure of fields // *Ibid.* – P. 989 – 1015.
8. *Shih C. F.* Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem // *Fracture Analysis.* – ASTM STP 560. – P. 187 – 210.
9. *Betegon C. and Hancock J. W.* Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields // *J. Appl. Mech.* – 1991. – **58.** – P. 104 – 110.
10. *Erdogan F. and Sih G. C.* On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // *Trans. ASME, J. Basic Eng.* – 1963. – Ser. D. – **85.** – P. 519 – 527.
11. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
12. *Долгоруков В. А., Шлянников В. Н.* Упругопластические функции напряжений для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения*, 1988. – С. 49 – 55.

13. *Shlyannikov V. N.* Elastic-Plastic Mixed Mode Fracture Criteria and Parameters. – Berlin: Springer, 2003. – 248 p.
14. *Шлянников В. Н., Кислова С. Ю.* Расчетно-экспериментальное обоснование критерия направления роста трещины // Завод. лаб. – 2009. – **75**, № 10. – С. 41 – 45.
15. *Eftis J. and Subramonian N.* The inclined crack under biaxial load // Eng. Fract. Mech. – 1978. – **10**. – P. 43 – 67.
16. *Henry D. S. and Luxmoore A. R.* The stress triaxiality constraint and the Q -value as ductile fracture parameter // Ibid. – 1997. – **57**. – P. 375 – 390.

Поступила 10. 09. 2009