УДК 539.3:519.6

Идентификация параметров задач упругого деформирования

И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Представлены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами Алифанова различных параметров ряда задач напряженно-деформированного состояния многокомпонентных тел с включениями.

Ключевые слова: многокомпонентные тела, напряженно-деформированное состояние, идентификация параметров, градиентные методы.

Введение. В настоящее время при анализе напряженно-деформированного состояния разных технических объектов зачастую используются результаты различных вычислительных экспериментов, что требует задания исходных данных с высокой точностью.

В силу старения материалов, предварительного напряженно-деформированного состояния и других факторов часто сложно обеспечить вычислительный эксперимент достаточно точными исходными данными по отдельным составляющим тел или параметрами внешних воздействий на определенных участках поверхностей исследуемых тел и др.

В работах [1, 2] на основе теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [3, 4] предложена технология построения явных выражений градиентов J'_{u_n} функционалов-невязок для идентификации различных параметров задач теплопроводности многокомпонентных тел с помощью градиентных методов Алифанова [5, 6], хорошо зарекомендовавших себя при идентификации различных параметров задач теплопроводности.

В работе [7] эта технология представлена для идентификации различных параметров задач термоупругости многокомпонентных тел, а в [8] – для идентификации параметров составных стержневых систем. Эффективность градиентных методов [5, 6], использующих предложенные явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации различных параметров (в том числе нескольких одновременно) при различных предположениях относительно их поведения, проиллюстрирована на результатах вычислительных экспериментов [9, 10].

В данной работе представлены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации параметров (как констант, функций, линейной комбинации функций и их комбинаций) ряда задач напряженно-деформированного состояния многокомпонентных тел с включениями.

1. **Восстановление поверхностных сил на участке границы тела при известных смещениях на ее части**. Пусть на ограниченной связной строго липшицевой области $\Omega \in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия [11]:

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\widetilde{f}_i(x), \qquad i=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где $x=(x_1, x_2, x_3)$; $\sigma_{ki}=\sigma_{ik}(y)=\sum\limits_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)$; σ_{ik}, ε_{lm} – соответственно элементы тензоров напряжений и деформаций; $\varepsilon_{lm}=\varepsilon_{lm}(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_m}+\frac{\partial y_m}{\partial x_l}\right)$; $y=(y_1(x), y_2(x), y_3(x))$ – вектор смещений; $y_i(x)$ – его проекция на i-ю ось декартовой системы координат; $\widetilde{f}=\{\widetilde{f}_i(x)\}_{i=1}^{3}$ – вектор массовых сил.

Упругие постоянные подчинены симметрии $c_{iklm}=c_{lmik}=c_{kiml}$ и удовлетворяют условию

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{lm}\geq\alpha_0\sum_{i,k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2, \qquad \alpha_0=\mathrm{const}>0. \tag{1$'$}$$

На частях Γ_1, γ_0 границы $\partial\Omega$ области Ω заданы условия:

$$y=\varphi, \qquad x\in\Gamma_1; \tag{2}$$

$$y=f_0, \qquad x\in\gamma_0\subset\Gamma_2, \tag{3}$$

где $\partial\Omega=\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$; $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$; φ, f_0 – известные функции.

Предполагаем, что на части $\Gamma_2=\Gamma\setminus\Gamma_1$ заданы напряжения, которые считаем неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j=u_i, \qquad i=\overline{1,3}, \tag{4}$$

где n_j – j-я компонента единичного внешнего вектора n (внешней нормали) к поверхности $\Gamma=\partial\Omega$.

Тем самым получена задача (1)–(4), состоящая в нахождении вектор-функции $u=\{u_i\}_{i=1}^{3}\in U=(L_2(\Gamma_2))^3$, при которой решение $y=y(u)=y(u;x)$ краевой задачи (1), (2), (4) удовлетворяет равенствам (3). Вместо классического решения краевой задачи (1), (2), (4) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in U$ обобщенным решением краевой задачи (1), (2), (4) называется функция $y=y(u;x)\in V$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,w)=l(u;w), \tag{5}$$

где

$$V=\{v(x)\in(W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1}=\varphi\}; \qquad V_0=\{v(x)\in(W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1}=0\};$$

$$a(y,w)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)\varepsilon_{ik}(w)dx, \qquad l(u;\, w)=(\tilde{f},\, w)+(u,\, w)_{L_2(\Gamma_2)};$$

$W_2^1(\Omega)$ – пространство функций Соболева.

Введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u)=\frac{1}{2}\left\| Au-f_0\right\|_{L_2(\gamma_0)}^2, \tag{6}$$

где $Au=y(u;\,x)\big|_{\gamma_0}$, $y(u;\,x)$ – решение задачи (5) при фиксированном $u\in U$.

Вместо задачи (1)–(4) будем рассматривать задачу (5), (6), которая состоит в нахождении элемента u, минимизирующего на U функционал (6) при выполнении ограничения (5).

Задачу (6), (5) будем решать приближенно с помощью градиентных методов Алифанова [5, 6], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} решения $u\in U$ находим с помощью итерационного процесса

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n, \qquad n=0,1,\dots,n^*, \tag{7}$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0\in U$, причем направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются такими выражениями:

для метода минимальных ошибок

$$p_n=J'_{u_n}, \qquad \beta_n=\frac{\left\| e_n\right\|^2}{\left\| J'_{u_n}\right\|^2}; \tag{8}$$

для метода скорейшего спуска

$$p_n=J'_{u_n}, \qquad \beta_n=\frac{\left\| J'_{u_n}\right\|^2}{\left\| AJ'_{u_n}\right\|^2}; \tag{9}$$

для метода сопряженных градиентов

$$p_n=J'_{u_n}+\gamma_n p_{n-1}, \qquad \gamma_0=0, \qquad \gamma_n=\frac{\left\| J'_{u_n}\right\|^2}{\left\| J'_{u_{n-1}}\right\|^2}, \qquad \beta_n=\frac{(J'_{u_n},\, p_n)}{\left\| Ap_n\right\|^2} \tag{10}$$

(J'_{u_n} – градиент функционала $J(u)$ в точке $u=u_n$; $e_n=Au_n-f_0$; $Au_n=$ $=y(u_n;\,x)\big|_{\gamma_0}$).

Аналогично [3, 12] введем в рассмотрение обозначения

$$\pi(u, v) = (\bar{Y}(u) - \bar{Y}(0), \bar{Y}(v) - \bar{Y}(0))_{L_2(\gamma_0)};$$
$$L(v) = (f_0 - \bar{Y}(0), \bar{Y}(v) - \bar{Y}(0))_{L_2(\gamma_0)}, \tag{11}$$

где $\forall v \in U \quad \bar{Y}(v) = y(v; x)\big|_{\gamma_0}$; $y(v; x)$ – решение задачи (5) при $u = v$.

Легко видеть, что

$$2J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \left\| f_0 - \bar{Y}(0) \right\|^2_{L_2(\gamma_0)}. \tag{12}$$

Пусть $u, v \in U$. При $\lambda \in (0, 1)$ получим $z = \lambda v + (1 - \lambda)u = u + \lambda(v - u) \in \in U$ и имеет место выражение

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} = \pi(u, v - u) - L(v - u) =$$

$$= (\bar{Y}(u) - f_0, \bar{Y}(v) - \bar{Y}(u))_{L_2(\gamma_0)} = J'(u; v - u). \tag{13}$$

Следовательно, $J(u)$ имеет производную $J'(u; v - u)$ в точке u по направлению $z = v - u$ [13]. Известно [13], если существует такой элемент $u^* \in U^*$, что $\forall z \in U$

$$J'(u; z) = \left\langle u^*, z \right\rangle, \tag{14}$$

то функционал J, дифференцируемый по Гато в точке u, и $u^* = J'_u$ – производная по Гато функционала $J(u)$ в точке u (слабая производная функционала J в точке u).

Для каждого приближения $u_n \in U$ задачи (5), (6) введем в рассмотрение следующую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad x \in \Omega; \quad \psi\big|_{\Gamma_1} = 0; \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad x \in \Gamma_2 \setminus \gamma_0; \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad x \in \gamma_0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi).$$

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (15) называется функция $\psi \in V_0$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \tag{16}$$

где

$$l_\psi(y(u_n); w) = (y(u_n) - f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{17}$$

Выбирая в тождестве (16) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (5) имеем

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) =$$

$$= l(u_{n+1}; \psi) - l(u_n; \psi) = (\Delta u_n, \psi)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{18}$$

На основании (13), (18) получим

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = (\Delta u_n, \psi)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{19}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}, \tag{20}$$

где

$$\tilde{\psi} = \psi\big|_{\gamma_0}, \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \left\| \tilde{\psi} \right\|^2_{\gamma_0}.$$

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет реализовать метод минимальных ошибок (7), (8) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (5), (6).

Решив задачу вида (5), где примем $u = J'_{u_n}$, получим вектор AJ'_{u_n}, что позволяет использовать метод скорейшего спуска (7), (9) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (5), (6).

Определив направление спуска с помощью выражений (10) и решив задачу вида (5), где примем $u = p_n$, получим вектор Ap_n. Это позволяет использовать метод сопряженных градиентов (7), (10) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} искомого решения $u \in U$ задачи (5), (6).

2. **Параметрический способ восстановления поверхностной нагрузки**. На основании равенства (19) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда все или часть восстанавливаемых проекций u_i, $i = \overline{1, 3}$, представляются в виде линейной комбинации соответствующих систем линейно независимых функций.

Пусть

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \varphi_{ij}(x), \qquad i = \overline{1, 3}, \qquad x \in \gamma_0, \tag{21}$$

где $\alpha_{ij} \in R$, R – множество вещественных чисел; $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ – система линейно независимых функций при каждом i, $i=\overline{1,3}$.

На основании (19) с учетом (21) получим выражение (20), где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3; \qquad \widetilde{\psi}_n^i = \{\widetilde{\psi}_{nj}^i\}_{j=1}^{m_i}; \qquad \widetilde{\psi}_{n_j}^i = (\varphi_{ij}, \psi)_{L_2(\gamma_0)};$$

$$\left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{m_i} (\widetilde{\psi}_{nj}^i)^2.$$

3. **Восстановление нормальной нагрузки на тело при отсутствии касательных напряжений**. Пусть в задаче (1)–(4) вместо (4) имеем

$$\sigma_n(y) = u, \qquad \tau_s(y) = 0, \qquad x \in \Gamma_2, \tag{22}$$

где σ_n, τ_s – соответственно нормальная и касательная составляющие вектора напряжений.

Таким образом получена задача (1)–(3), (22), которая состоит в нахождении скалярной функции $u \in U = L_2(\Gamma_2)$, при которой решение $y = y(u;\, x)$ краевой задачи (1), (2), (22) удовлетворяет равенствам (3).

Определение 3. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (1), (2), (22) называется функция $y = y(u) = y(u;\, x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u;\, w), \tag{23}$$

где $l(u;\, w) = (\widetilde{f}, w) + (u, w_n)_{L_2(\Gamma_2)}$; w_n – нормальная составляющая вектора w.

Функционал-невязка имеет вид (6). Для каждого n-го приближения u_n решения $u \in U$ задачи (6), (23) сопряженная задача имеет вид (15), а соответствующая ей задача в слабой постановке определена тождеством (16).

На основании тождества (16) с учетом (23) получим

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = (\Delta u_n, \psi_n)_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi} = \psi_n$; ψ_n – нормальная составляющая на Γ_2 решения ψ задачи (16);

$$\left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \int_{\Gamma_2} \psi_n^2 d\Gamma_2.$$

4. **Идентификация касательного напряжения на части Γ_2, расположенной на плоскости** $x_3 = \text{const}$. Пусть в задаче (1)–(4) часть Γ_2^1 границы $\Gamma = \partial\Omega$ тела Ω расположена на плоскости $x_3 = \text{const}$, на которой вместо (4) заданы краевые условия:

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j = u_i, \qquad i=1,2, \qquad x\in\Gamma_2^1; \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j = g_i, \qquad i=\overline{1,3}, \qquad x\in\Gamma_2\setminus\Gamma_2^1; \tag{24$'$}$$

$$y_3 = 0, \qquad x\in\Gamma_2^1, \tag{25}$$

где неизвестными выступают u_1, u_2 – первые компоненты поверхностной плотности сил трения; $\Gamma_2^1 = \{x\in\Gamma_2 : x_3 = 0\}$. Условие (25) отражает отсутствие вертикальных смещений.

Полученная задача (1)–(3), (24), (24′), (25) состоит в нахождении вектора $u=(u_1, u_2)\in U = L_2(\Gamma_2^1)\times L_2(\Gamma_2^1)$, при котором решение краевой задачи (1), (2), (24) (24′), (25) удовлетворяет равенствам (3).

Определение 4. При каждом фиксированном $u\in U$ обобщенным решением краевой задачи (1), (2), (24) (24′), (25) называется функция $y = y(u) = y(u;\, x)\in V$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u;\, w), \tag{26}$$

где

$$V = \{v(x)\in(W_2^1(\Omega_i))^3 : v\big|_{\Gamma_1} = \varphi,\ v_3\big|_{\Gamma_2^1} = 0\};$$

$$V_0 = \{v(x)\in(W_2^1(\Omega_i))^3 : v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ v_3\big|_{\Gamma_2^1} = 0\};$$

$$l(u;\, w) = (\tilde{f}, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2\setminus\Gamma_2^1)} + \sum_{i=1}^{2}(u_i, w_i)_{L_2(\Gamma_2^1)}. \tag{27}$$

Вместо задачи (1)–(4), (24), (24′), (25) будем рассматривать задачу (26), (6), которая состоит в нахождении вектор-функции u, минимизирующей на U функционал (6) при ограничении (26). Задачу (6), (26) будем решать приближенно с помощью градиентных методов (7).

Для каждого приближения u_n решения $u\in U$ задачи (6), (26) сопряженную задачу определим следующим образом:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Omega; \\ \psi\big|_{\Gamma_1} = 0; \quad \psi_3\big|_{\Gamma_2^1} = 0; \end{cases} \tag{28a}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2 \setminus (\Gamma_2^1 \cup \gamma_0); \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in \Gamma_2^1; \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0, \end{cases} \tag{28б}$$

где

$$\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi).$$

Определение 5. Обобщенным решением краевой задачи (28) называется функция $\psi \in V_0$, которая $\forall w \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \tag{29}$$

где форма $l_\psi(\cdot\,;\cdot)$ определена выражением (17).

Выбирая в тождестве (29) вместо функции w разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (26) получаем

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = \sum_{i=1}^{2} (\Delta u_{in}, \psi_i)_{L_2(\Gamma_2^1)}.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}, \tag{30}$$

где

$$\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^{2}; \qquad \tilde{\psi}_i = \psi_i \big|_{\Gamma_2^1}, \qquad i = 1, 2.$$

Наличие градиента J'_{u_n} (30) позволяет реализовать градиентные методы (7) для идентификации касательных напряжений на участке Γ_2^1.

5. **Идентификация коэффициента “податливости” оболочки, ограничивающей тело** Ω. Пусть на области Ω определена система уравнений (1). На границе Γ тела Ω заданы краевые условия [14]:

$$\tau_s(y) = 0; \tag{31}$$

$$\sigma_N + u y_N = 0; \tag{32}$$

$$y = f_0, \qquad x \in \gamma_0, \tag{33}$$

где $\gamma_0 \subset \Gamma$; σ_N, y_N – нормальные составляющие вектора напряжений и вектора смещений соответственно.

Задача (1), (31)–(33) состоит в нахождении элемента $u \in U = C_+(\gamma_0) = \{v(x)\big|_{\gamma_0} \in C(\gamma_0)\colon v > 0\}$, при котором решение $y = y(u; x)$ краевой задачи (1), (31), (32) удовлетворяет равенству (33). Вместо классического решения краевой задачи (1), (31), (32) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 6. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (1), (31), (32) называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; y, w) = l(w), \tag{34}$$

где

$$V = V_0 = (W_2^1(\Omega))^3;$$

$$a(u; y, w) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(w) dx + \int_\Gamma u y_N w_N d\Gamma; \qquad l(w) = (\widetilde{f}, w).$$

Поскольку $\forall y \in V$ при каждом фиксированном $u \in U$ имеет место неравенство [14]

$$a(u; y, y) \geq c_0(y, y), \tag{35}$$

где $c_0 = c_0(u) = \text{const} > 0$, в силу леммы Лакса–Мильграма [15] задача (34) имеет единственное решение $y = y(u) \in V$. Функционал-невязка имеет вид (6).

Задачу (34), (6) будем решать приближенно с помощью итерационного процесса (7).

Приращение $\theta = \Delta y$ решения $y(u)$ задачи (34), соответствующее приращению Δu элемента $u \in U$ при пренебрежении членами второго порядка малости, на основании (34) определим как решение задачи: найти функцию $\theta \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \theta, w) = -(\Delta u_n y_N(u_n), w_N)_{L_2(\Gamma)}. \tag{36}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (6), (34) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega; \\ \sigma_N(\psi) + u_n \psi_N = y_N(u_n) - f_{0N}, \quad x \in \gamma_0; \\ \tau_s(\psi) = y_s(u_n) - f_{0s}, \quad x \in \gamma_0; \\ \sigma_N(\psi) + u_n \psi_N = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma_0; \quad \tau_s(\psi)\big|_{\Gamma \setminus \gamma_0} = 0. \end{cases} \tag{37}$$

***Определение** 7*. Обобщенным решением краевой задачи (37) называется функция $\psi \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \tag{38}$$

где

$$l_\psi(y(u_n); w) = (y(u_n) - f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{38$'$}$$

Выбирая вместо функции w тождества (38) разность $\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (36) получаем

$$(y(u_n) - f_0, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} =$$

$$= a(u_n; \psi, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)) = -(\Delta u_n y_N(u_n), \psi_N)_{L_2(\Gamma)}, \tag{39}$$

где функция $\tilde{y} = \tilde{y}(u_{n+1})$ определена как решение задачи: найти функцию $\tilde{y} \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \tilde{y}, w) = l(w) - \int_\Gamma \Delta u_n y_N(u_n) w_N \, d\Gamma.$$

На основании (39) имеем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx -(\Delta u_n y_N(u_n), \psi_N)_{L_2(\Gamma)}. \tag{39$'$}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}, \tag{40}$$

где

$$\tilde{\psi} = -y_N(u_n)\psi_N\big|_\Gamma; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \| \tilde{\psi} \|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Замечание 1. Если восстанавливаемый коэффициент u постоянный по всей границе Γ, т.е. если $U = R_+$, то на основании (39$'$) получим

$$\tilde{\psi} = -\int_\Gamma y_N(u_n)\psi_N \, d\Gamma; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \tilde{\psi}^2.$$

6. **Параметрический способ идентификации коэффициента “податливости” оболочки, ограничивающей тело** Ω. Пусть в задаче (6), (34) восстанавливаемая функция u имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) > 0, \tag{41}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ – система линейно независимых функций; $\alpha_i \in R_+$, т.е. $U = R_+^m$.

На основании (39′) получим

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi},$$

где

$$\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^m; \qquad \widetilde{\psi}_i = -(\varphi_i y_N(u_n), \psi_N)_{L_2(\Gamma)}; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \sum_{i=1}^m \widetilde{\psi}_i^2 .$$

7. **Восстановление коэффициента жесткости соприкасаемого тела**. Пусть на области Ω определена система уравнений упругого равновесия (1). На границе Γ тела заданы условия:

$$y\big|_{\Gamma_1} = \varphi; \tag{42}$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = g_i, \qquad i = \overline{1,3}, \qquad x \in \Gamma_2; \tag{43}$$

$$\tau_s\big|_{\Gamma_3} = 0, \qquad \sigma_N + u y_N = 0, \qquad x \in \Gamma_3; \tag{44}$$

$$y\big|_{\gamma_0} = f_0, \tag{45}$$

где $\gamma_0 \subset \Gamma_2$; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $i, j = \overline{1,3}$.

Получена задача (1), (42)–(45), состоящая в нахождении элемента $u \in U = C_+(\Gamma_3)$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (1), (42)–(44) удовлетворяет равенству (45).

Вместо классического решения краевой задачи (1), (42)–(44) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 8. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (1), (42)–(44) называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; y, w) = l(w), \tag{46}$$

где

$$V = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v\big|_{\Gamma_1} = \varphi\}; \qquad V_0 = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v\big|_{\Gamma_1} = 0\};$$

$$a(u; y, w) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(w) dx + \int\limits_{\Gamma_3} u y_N w_N d\Gamma_3,$$

$$l(w)=(\tilde{f}, w)+(g, w)_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Функционал-невязка имеет вид (6). Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ задачи (46), соответствующее приращению Δu элемента $u\in U$, определим как решение задачи: найти функцию $\theta\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;\theta, w)=-(\Delta u y_N(u), w_N)_{L_2(\Gamma_3)}. \tag{47}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in U$ задачи (6), (46) введем в рассмотрение следующую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k}=0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Omega; \\ \psi\big|_{\Gamma_1}=0; \\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Gamma_2\setminus\gamma_0; \\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=y_i(u_n)-f_{0i}, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\gamma_0; \\ \tau_s(\psi)\big|\Gamma_3=0; \quad \sigma_N(\psi)+u_n\psi_N=0, \quad x\in\Gamma_3. \end{cases} \tag{48}$$

Определение 9. Обобщенным решением краевой задачи (48) называется функция $\psi(x)\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\psi, w)=l_\psi(y(u_n); w), \tag{49}$$

где форма $l_\psi(\cdot\,;\cdot)$ определена выражением (38′).

Выбирая в тождестве (49) вместо функции w разность $\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (47) получаем

$$(y(u_n)-f_0, \tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=-(\Delta u_n y_N(u_n), \psi_N)_{L_2(\Gamma_3)}, \tag{50}$$

где $\tilde{y}(u_{n+1})$ – функция из V, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\tilde{y}, w)=l(w)-(\Delta u_n y_N, w_N)_{L_2(\Gamma_3)}.$$

Поскольку

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\left\langle J'_{u_n}, v-u\right\rangle\approx$$

$$\approx(y(u_n)-f_0, \tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)},$$

с учетом (50) имеем

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}, \tag{51}$$

где

$$\widetilde{\psi} = -y_N(u_n)\psi_N\Big|_{\Gamma_3}; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \int\limits_{\Gamma_3} \widetilde{\psi}^2 d\Gamma_3.$$

Если $U = R_+$, то на основании (51) получим $\widetilde{\psi} = -(y_N(u_n), \psi_N)_{L_2(\Gamma_3)}$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \widetilde{\psi}^2$. Наличие приближения $\widetilde{\psi}$ градиента J'_{u_n} в точке $u = u_n$ позволяет реализовать градиентные методы (7) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (6), (46).

8. **Восстановление коэффициента жесткости на сдвиг слабопрочного прослоя при известных смещениях и напряжениях на части границы составного тела**. Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1,\ \Omega_2 \in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия:

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \widetilde{f}_i(x), \qquad i = \overline{1,3}, \tag{52}$$

где

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(y) = \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y);$$

c_{iklm} – упругие постоянные, разные для тел $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$. На каждой из областей Ω_1, Ω_2 они удовлетворяют условию (1′). На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ $(\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \varnothing)$ тела $\overline{\Omega}$ заданы следующие краевые условия:

$$y\Big|_{\Gamma_1} = \varphi; \tag{53}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i, \qquad i = \overline{1,3}, \qquad x \in \Gamma_2; \tag{54}$$

$$y = f_0, \qquad x \in \gamma_0, \tag{55}$$

где $\gamma_0 \subset \Gamma_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

На разрезе γ области $\overline{\Omega}$ условия сопряжения слабопрочного прослоя имеют вид [16]

$$[y_N] = 0; \tag{56}$$

$$[\sigma_N(y)] = 0, \qquad [\tau_s(y)] = 0, \qquad \tau_s^{\pm}(y) = u[y_s] \tag{57}$$

и отражают непрерывность нормальных составляющих векторов смещений, напряжений, касательных составляющих вектора напряжений и пропорциональность касательных составляющих вектора напряжений скачку касательных составляющей вектора смещений на разрезе γ области $\overline{\Omega}$, где $[\varphi]= =\varphi^{+}-\varphi^{-}$, $\varphi^{+}=\{\varphi\}^{+}=\varphi(x)$ при $x\in\partial\Omega_2\cap\gamma$, $\varphi^{-}=\{\varphi^{-})=\varphi(x)$ при $x\in \in\partial\Omega_1\cap\gamma$, $[\varphi]$ – скачок функции φ на резрезе γ.

Таким образом получена задача: найти функцию $u\in U=C_{+}(\gamma)$, при которой решение $y=y(u)=y(u;x)$ краевой задачи (52)–(54), (56), (57) удовлетворяет равенству (55). Вместо классического решения этой краевой задачи будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 10. При каждом фиксированном $u\in U$ обобщенным решением краевой задачи (52)–(54), (56), (57) называется функция $y=y(u)= =y(u;x)\in V$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;y,w)=l(w), \tag{58}$$

где

$$V=\{v(x)\in\overline{V}: v|_{\Gamma_1}=\varphi, [v_N]|_{\gamma}=0\};$$

$$V_0=\{v(x)\in\overline{V}: v|_{\Gamma_1}=0, [v_N]|_{\gamma}=0\}; \qquad \overline{V}=\{v(x): v|_{\Omega_i}\in(W_2^1(\Omega_i))^3,\ i=1,2\};$$

$$a(u;y,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)\varepsilon_{ik}(w)dx+\int_{\gamma}u[y_3][w_s]d\gamma;$$

$$l(w)=(\widetilde{f},w)+(g,w)_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\left\|Au-f_0\right\|^2_{L_2(\gamma_0)}, \tag{59}$$

где $Au=y(u;x)\big|_{\gamma_0}$; $y(u;x)$ – решение задачи (58) при фиксированном $u\in U$.

Вместо задачи (52)–(57) будем рассматривать задачу (58), (59), состоящую в определении функции u, минимизирующей на U функционал (59) при ограничении (58). Эту задачу будем решать приближенно с помощью градиентных методов (7).

Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y(u)$ задачи (58), соответствующее приращению Δu элемента $u\in U$ при пренебрежении членами второго порядка малости, определим как решение задачи: найти функцию $\theta\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;\theta,w)=l_{\theta}(\Delta u;w), \tag{60}$$

где $l_{\theta}(\Delta u;w)=-(\Delta u[y_s(u)],[w_s])_{L_2(\gamma)}$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (58), (59) введем в рассмотрение следующую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega; \\ \psi\big|_{\Gamma_1} = 0; \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2 \setminus \gamma_0; \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0; \\ [\psi_N]\big|_\gamma = 0, \quad [\sigma_N(\psi)]\big|_\gamma = 0, \quad [\tau_s(\psi)]\big|_\gamma = 0; \\ \tau_s^{\pm}(\psi) = u_n[\psi_s], \quad x \in \gamma. \end{cases} \tag{61}$$

Определение 11. Обобщенным решением краевой задачи (61) называется функция $\psi \in V_0$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \psi, w) = l_\psi(y(u_n); w), \tag{62}$$

где

$$l_\psi(y(u_n); w) = (y(u_n) - f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}.$$

Выбирая в тождестве (62) вместо функции w разность $\tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (60) получаем

$$(y(u_n) - f_0, \tilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = -(\Delta u_n [y_s(u_n)], [\psi])_{L_2(\gamma)}, \tag{63}$$

где $\tilde{y}(u_{n+1})$ – функция из V, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \tilde{y}, w) = l(w) - (\Delta u_n [y_s(u_n)], [w_s])_{L_2(\gamma)}. \tag{62′}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}, \tag{63′}$$

где

$$\tilde{\psi} = -[y_s(u_n)][\psi_s]\big|_\gamma, \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \int_\gamma \tilde{\psi}^2 d\gamma.$$

Если $U = R_+$, то

$$\tilde{\psi} = -([y_s(u_n)], [\psi_s])_{L_2(\gamma)}, \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \tilde{\psi}^2.$$

Наличие приближения $\widetilde{\psi}$ градиента J'_{u_n} при $u = u_n$ позволяет реализовать градиентные методы (7) для определения $(u+1)$-го приближения решения $u \in U$ задачи (58), (59).

Замечание 2. Пусть в задаче (58), (59) искомая функция u имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0, \qquad x \in \gamma, \tag{64}$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ – система линейно независимых функций, $\alpha_i \in 0 \cup R_+$.

На основании (62′) получим $J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^m$; $\widetilde{\psi}_i = -(\varphi_i[y_s(u_n)], [\psi_s])_{L_2(\gamma)}$, $i = \overline{1, m}$.

9. **Восстановление коэффициента жесткости на сдвиг слабопрочного прослоя при известных смещениях на нескольких непересекающихся поверхностях**. Пусть в задаче (52)–(57) кроме поверхности $\gamma_0 \subset \Gamma_2$ имеется N поверхностей $\gamma_i \in \Omega$, на которых также известны смещения, заданные равенствами

$$y = f_i, \qquad x \in \gamma_i, \qquad i = \overline{1, N}. \tag{65}$$

Тем самым получена задача (52)–(57), (65), состоящая в нахождении элемента $u \in U = C_+(\gamma)$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (52)–(54), (56), (57) удовлетворяет равенствам (55), (65).

Определение 12. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (52)–(54), (56), (57) называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству (58), где множества V, V_0 определены в разд. 8.

Функционал-невязку зададим в виде

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \| A_i u - f_i \|^2_{L_2(\gamma_i)}, \tag{66}$$

где $A_i u = y(u; x)\big|_{\gamma_i}$, $i = \overline{0, N}$.

Вместо задачи (52)–(57), (65) будем рассматривать задачу (58), (66), состоящую в определении элемента u, минимизирующего на U функционал (66) при ограничении (58).

Приращение $\theta = \Delta y$ решения $y(u)$ задачи (58), соответствующее приращению Δu элемента $u \in U$ при пренебрежении членами второго порядка малости, определим как функцию $\theta \in V_0$, которая является решением задачи (60).

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (58), (66) введем в рассмотрение следующую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k}=0, \quad x\in\Omega_d=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\gamma_i; \\ \psi\big|_{\Gamma_1}=0; \\ \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Gamma_2\setminus\gamma_0; \\ \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=y_i(u_n)-f_{0i}, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\gamma_0; \\ [\psi_N]\big|_{\gamma}=0, \quad [\sigma_N(\psi)]\big|_{\gamma}=0; \quad [\tau_s(\psi)]\big|_{\gamma}=0; \\ \tau_s^{\pm}(\psi)=u_n[\psi_s], \quad x\in\gamma; \\ [\psi]\big|_{\gamma_i}=0, \quad [\sigma_N(\psi)]=-(y_N(u_n)-f_{iN}), \quad x\in\gamma_i; \\ [\tau_s]=-(y_s(u_n)-f_{is}), \quad x\in\gamma_i, \quad i=\overline{1,N}. \end{cases} \tag{67}$$

Определение 13. Обобщенным решением краевой задачи (67) называется функция $\psi(x)\in V_d$, которая $\forall w(x)\in V_{d_0}$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\psi,w)=l_\psi(y(u_n);w), \tag{68}$$

где

$$V_d=\{v(x)\in\overline{V}_d : v\big|_{\Gamma_1}=\varphi, [v_N]\big|_{\gamma}=0, [v]\big|_{\gamma_i}=0, i=\overline{1,N}\};$$

$$V_{d_0}=\{v(x)\in\overline{V}_d : v\big|_{\Gamma_1}=0, [v_N]\big|_{\gamma}=0, [v]\big|_{\gamma_i}=0, i=\overline{1,N}\};$$

$$\overline{V}_d=\{v(x) : v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i), i=\overline{0,N}\};$$

$$l_\psi(y(u_n);w)=\sum_{i=0}^{N}(y(u_n)-f_i, w)_{L_2(\gamma_i)}.$$

Области Ω_i образованы разбиением области Ω поверхностями $\gamma_i\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$.

Выбирая в тождестве (68) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, где $\widetilde{y}(u_{n+1})$ – решение задачи (62′), получаем

$$\sum_{i=0}^{N}(y(u_n)-f_i, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_i)}=-(\Delta u_n[y_s(u_n)],[\psi_s])_{L_2(\gamma)}.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi}=-[y_s(u_n)][\psi_s]\big|_{\gamma}$, $\left\|J'_{u_n}\right\|^2\approx\int_{\gamma}\widetilde{\psi}^2 d\gamma$.

10. **Восстановление постоянных Ламе**. Пусть на ограниченной связной строго липшицевой области $\Omega \in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(y)}{\partial x_k} = \tilde{f}_i, \qquad i = \overline{1, 3}, \tag{69}$$

где тело Ω – изотропное; $\sigma_{ij}(y) = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(y)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1, 3}$; λ, μ – упругие постоянные Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера.

На границе Γ тела Ω заданы краевые условия:

$$y|_{\Gamma_1} = \varphi; \tag{70}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i, \qquad i = \overline{1, 3}, \qquad x \in \Gamma_2; \tag{71}$$

$$y|_{\gamma_0} = f_0, \tag{72}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$; $\gamma_0 \subset \Gamma_2$.

Пусть упругие постоянные являются неизвестными. Положим $u_1 = \lambda$, $u_2 = \mu$. Тем самым получена задача (69)–(72), состоящая в определении вектора $u = (u_1, u_2) \in U = R_+^2$, при котором решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (69)–(71) удовлетворяет равенству (72). Вместо классического решения краевой задачи (69)–(71) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 14. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (69)–(71) называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; y, w) = l(w), \tag{73}$$

где

$$a(u; y, w) = \int_{\Omega} \left\{ u_1 \operatorname{div} y \operatorname{div} w + 2u_2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(y) \varepsilon_{ij}(w) \right\} dx;$$

$$l(w) = (\tilde{f}, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2)}; \qquad g = \{g_i\}_{i=1}^{3};$$

$$V = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1} = \varphi\};$$

$$V_0 = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\left\| Au-f_0\right\|^2_{L_2(\gamma_0)}, \tag{74}$$

где $Au=y(u;\,x)\big|_{\gamma_0}$; $y(u;\,x)$ – решение задачи (73) при фиксированном $u\in U$.

Приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ задачи (73), соответствующее приращению Δu элемента $u\in U$ при пренебрежении членами второго порядка малости, определим как решение задачи: найти функцию $\theta\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;\theta,w)=l_\theta(\Delta u;w), \tag{74′}$$

где $l_\theta(\Delta u;\,w)=-a(\Delta u;\,y(u),\,w)$.

Для каждого приближения u_n решения $u\in U$ задачи (73), (74) сопряженную задачу определим так:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k}=0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Omega;\\ \psi\big|_{\Gamma_1}=0;\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=0, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\Gamma_2\setminus\gamma_0;\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=y_i(u_n)-f_{0i}, \quad i=\overline{1,3}, \quad x\in\gamma_0, \end{cases} \tag{75}$$

где

$$\sigma_{ik}(\psi)=\sigma_{ik}(u_n;\,\psi)=u_{1n}\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\psi)\right)\delta_{ij}+2u_{2n}\varepsilon_{ij}(\psi);\;\; u_n=(u_{1n},u_{2n}).$$

Определение 15. Обобщенным решением краевой задачи (75) называется функция $\psi\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\,\psi,\,w)=l_\psi(y(u_n);\,w), \tag{76}$$

где $l_\psi(y(u_n);\,w)=(y(u_n)-f_0,\,w)_{L_2(\gamma_0)}$.

Выбирая в тождестве (76) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (74′) получаем

$$(y(u_n)-f_0,\,\widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=l_\theta(\Delta u_n;\,\psi)=-a(\Delta u_n;\,y(u_n),\,\psi), \tag{77}$$

где $\widetilde{y}(u_{n+1})$ – функция из V, которая $\forall w\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \widetilde{y}, w) = l(w) - a(\Delta u_n; y(u_n), w).$$

На основании (77) получим

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}, \tag{78}$$

где

$$\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^2; \qquad \widetilde{\psi}_1 = -\int_\Omega \operatorname{div} y(u_n) \operatorname{div} \psi dx;$$

$$\widetilde{\psi}_2 = -2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(y(u_n))\varepsilon_{ij}(\psi) dx; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \sum_{i=1}^2 \widetilde{\psi}_i^2.$$

11. **Восстановление начальных деформаций, вызванных предварительным температурным расширением**. Пусть на области $\Omega \in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия:

$$-\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}(y)}{\partial x_k} = \widetilde{f}_i, \qquad i = \overline{1, 3}, \tag{79}$$

где

$$\sigma_{ij}(y) = \lambda\left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(y)\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(y) - \lambda\left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}^0\right)\delta_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij}^0;$$

σ_{ij}^0 – компоненты тензора начальных напряжений [17],

$$\sigma_{ij}^0 = -\lambda\left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}^0\right)\delta_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij}^0;$$

ε_{ij}^0 – компоненты тензора начальных деформаций.

Следуя [17, 18], предположим $\varepsilon_{ij}^0 = \alpha T \delta_{ij}$, где α – коэффициент линейного температурного расширения; T – изменение температуры, соответствующее начальным деформациям.

На границе Γ заданы условия (70)–(72). Функционал-невязка имеет вид (74). Примем, что начальные деформации $\varepsilon_{ij}^0 = \alpha T \delta_{ij}$ – неизвестны. Тем самым получена задача (70)–(72), (79), состоящая в нахождении элемента $u \in U = C(\Omega)$ $(u = \alpha T)$, при котором решение краевой задачи (70), (71), (79) удовлетворяет равенству (72). При каждом фиксированном $u \in U$ вместо классического решения краевой задачи (70), (71), (79) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 16. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (70), (71), (79) называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,\, w) = l(u;\, w), \tag{80}$$

где

$$V = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 \colon v|_{\Gamma_1} = \varphi\}; \qquad V_0 = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 \colon v|_{\Gamma_1} = 0\};$$

$$a(y,\, w) = \int_\Omega \left\{ \lambda \operatorname{div} y \operatorname{div} w + 2\mu \sum_{i,\, j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(y) \varepsilon_{ij}(w) \right\} dx;$$

$$l(u;\, w) = (\tilde{f},\, w) + (g,\, w)_{L_2(\Gamma_2)} - \int_\Omega \sum_{i,\, j=1}^{3} \sigma_{ij}^0(u) \varepsilon_{ij}(w) dx.$$

Поскольку

$$\int_\Omega \sum_{i,\, j=1}^{3} \sigma_{ij}^0(u) \varepsilon_{ij}(w) dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii}^0(u) \varepsilon_{ii}(w) dx = -(3\lambda + 2\mu) \int_\Omega u \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w) dx,$$

получим

$$l(u;\, w) = (\tilde{f},\, w) + (g,\, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (3\lambda + 2\mu) \int_\Omega u \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w) dx. \tag{81}$$

Приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ задачи (80), соответствующее приращению Δu элемента $u \in U$, определим как решение задачи: найти функцию $\theta \in V_0$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\theta,\, w) = l_\theta(\Delta u;\, w), \tag{82}$$

где

$$l_\theta(\Delta u;\, w) = (3\lambda + 2\mu) \int_\Omega \Delta u \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w) dx.$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (74), (80) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega; \quad \psi|_{\Gamma_1} = 0; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2 \setminus \gamma_0; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0, \end{cases} \tag{83}$$

где

$$\sigma_{ij}(\psi)=\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\psi)\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\psi).$$

Определение 17. Обобщенным решением краевой задачи (83) называется функция $\psi\in V_0$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w)=l_{\psi}(y(u_n); w), \tag{84}$$

где $l_{\psi}(y(u_n); w)=(y(u_n)-f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}$.

Выбирая в тождестве (84) вместо функции w разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (82) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\right\rangle=(y(u_n)-f_0, y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=$$

$$=l_{\theta}(\Delta u_n; \psi)=(3\lambda+2\mu)\int_{\Omega}\Delta u_n\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx. \tag{84$'$}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}, \tag{85}$$

где

$$\widetilde{\psi}=(3\lambda+2\mu)\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)\Big|_{\Omega}; \qquad \left\|J'_{u_n}\right\|^2=\int_{\Omega}\widetilde{\psi}^2 dx.$$

Наличие градиента J'_{u_n} (85) позволяет реализовать градиентные методы (7) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in U$ задачи (74), (80).

Замечание 3. Если в задаче (74), (80) изменение температуры T известно, то $u=\alpha$, $u\in U=(0,+\infty)$. На основании (84$'$) имеем

$$\widetilde{\psi}=(3\lambda+2\mu)\int_{\Omega}T\varepsilon_{ii}(\psi)dx, \qquad \left\|J'_{u_n}\right\|^2=\widetilde{\psi}^2.$$

Замечание 4. В случае если тело $\overline{\Omega}$ состоит из нескольких составляющих, предложенная технология позволяет определить предварительное напряженно-деформированное состояние каждой из составляющих.

12. **Восстановление начальных деформаций составляющих Ω_1, Ω_2 тела Ω и коэффициента жесткости на сдвиг слабопрочного прослоя γ.** Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2\in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия:

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\sigma_k}=\widetilde{f}_i(x),\qquad i=\overline{1,3},\tag{86}$$

где

$$\sigma_{ij}(y)=\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(y)\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(y)-\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}^{0}\right)\delta_{ij}-2\mu\varepsilon_{ij}^{0};$$

$$\sigma_{ij}^{0}=-\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}^{0}\right)\delta_{ij}-2\mu\varepsilon_{ij}^{0};$$

σ_{ij}^{0} – компоненты тензора начальных напряжений; ε_{ij}^{0} – компоненты тензора начальных деформаций (различные для областей Ω_1, Ω_2).

Следуя [17], предположим $\varepsilon_{ij}^{0}=\alpha T\delta_{ij}$, где α – коэффициент температурного расширения; T – изменение температуры, соответствующее начальным деформациям (α, T могут быть различными для областей Ω_1, Ω_2).

На границе Γ заданы условия (70)–(72). На участке $\gamma=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2\neq\varnothing$ условия сопряжения слабопрочного прослоя таковы:

$$[y_N]=0;\tag{87}$$

$$[\sigma_N(y)]=0,\qquad[\tau_s(y)]=0,\qquad\tau_s^{\pm}(y)=r[y_s].\tag{88}$$

Функционал-невязка имеет вид (74). Предположим, что начальные деформации $\varepsilon_{ij}^{0}=\alpha T\delta_{ij}$ и коэффициент жесткости на сдвиг r прослоя γ неизвестны.

Полученная задача (70)–(72), (86)–(88) состоит в нахождении вектора $u\in U=(C(\Omega_1)\times C(\Omega_2))\times[0,+\infty]$, при котором решение $y=y(u)=y(u;x)$ краевой задачи (70), (71), (86)–(88) удовлетворяет равенству (72), где $u=$ $=(u_1,u_2)$; $u_1=\{u_1^i\}_{i=1}^{2}$; $u_1^i=u_1\big|_{\Omega_i}$; $u_1^i=\alpha T|_{\Omega_i}$, $i=1,2$; $u_2=r$.

Вместо классического решения краевой задачи (70), (71), (86)–(88) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 18. При каждом фиксированном $u\in U$ обобщенным решением краевой задачи (70), (71), (86)–(88) называется функция $y=y(u)=$ $=y(u;x)\in V$, которая $\forall w(x)\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;y,w)=l(u;w),\tag{89}$$

где множества V, V_0 определены в разд. 8;

$$a(u;y,w)=\int_{\Omega}\left\{\lambda\operatorname{div}y\operatorname{div}w+2\mu\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(y)\varepsilon_{ij}(w)\right\}dx+\int_{\gamma}u_2[y_s][w_s]d\gamma;$$

$$l(u;\, w) = (\widetilde{f}, w) + (g, w)_{L_2(\Gamma_2)} + \int_\Omega u_1 (3\lambda + 2\mu) \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w) dx.$$

Приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ задачи (89), соответствующее приращению Δu элемента $u \in U$ при пренебрежении членами второго порядка малости, определим как решение задачи: найти функцию $\theta \in V_0$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;\, \theta, w) = l_\theta(\Delta u;\, w), \tag{90}$$

где

$$l_\theta(\Delta u;\, w) = \int_\Omega (3\lambda + 2\mu) \Delta u_1 \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w) dx - \int_\gamma \Delta u_2 [y_s(u)][w_s] d\gamma.$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (74), (89) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega; \\ \psi\big|_{\Gamma_1} = 0; \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2 \setminus \gamma_0; \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0; \\ [\psi_N]\big|_\gamma = 0, \quad [\sigma_N(\psi)]\big|_\gamma = 0, \quad [\tau_s(\psi)]\big|_\gamma = 0, \quad \tau_s^{\pm}(\psi) = u_{2n}[\psi_s]\big|_\gamma, \end{cases} \tag{91}$$

где

$$u_n = (u_{1n}, u_{2n}); \qquad \sigma_{ij}(\psi) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\psi) \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\psi).$$

Определение 19. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (91) называется функция $\psi \in V_0$, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\, \psi, w) = l_\psi(y(u_n);\, w), \tag{92}$$

где $l_\psi(y(u_n);\, w) = (y(u_n) - f_0, w)_{L_2(\gamma_0)}$.

Выбирая в тождестве (92) вместо функции w разность $\widetilde{y}(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (90) получаем

$$(y(u_n)-f_0, \widetilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = l_\theta(\Delta u_n; w) =$$

$$= \int_\Omega (3\lambda+2\mu)\Delta u_{1n} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)dx - \int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma, \qquad (93)$$

где $\widetilde{y}(u_{n+1})$ – функция из V, которая $\forall w(x) \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n; \widetilde{y}, w) = l(u_n; w) + \int_\Omega (3\lambda+2\mu)\Delta u_{1n} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(w)dx -$$

$$-\int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][w_s]d\gamma.$$

На основании (93) получим

$$J'_{u_n} \approx \widetilde{\psi}, \qquad (94)$$

где

$$\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_j\}_{j=1}^2; \qquad \widetilde{\psi}_1 = \{\widetilde{\psi}_1^j\}_{j=1}^2; \qquad \widetilde{\psi}_1^j = (3\lambda+2\mu)\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)\Big|_{\Omega_j};$$

$$\widetilde{\psi}_2 = -\int_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma; \qquad \left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} (\widetilde{\psi}_1^i)^2 dx + \widetilde{\psi}_2^2.$$

Если $u_2 \in C(\gamma)$, то $\widetilde{\psi}_2 = -[y_s(u_n)[\psi_s]\big|_\gamma$.

При известном изменении распределения температуры T на областях Ω_1, Ω_2 получим

$$\widetilde{\psi}_1^j = \int_{\Omega_j} (3\lambda+2\mu)\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)dx, \qquad j=1, 2.$$

Наличие приближения $\widetilde{\psi}$ градиента J'_{u_n} позволяет использовать градиентные методы (7) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (74), (89).

Резюме

Представлено явні вирази градієнтів функціоналів-нев’язок для ідентифікації градієнтними методами Аліфанова різних параметрів деяких задач напружено-деформованого стану багатокомпонентних тіл із включеннями.

1. *Сергиенко И. В.*, *Дейнека В. С.* Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 3. – С. 21 – 48.

2. *Сергиенко И. В.*, *Дейнека В. С.* Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 48 – 71.
3. *Дейнека В. С.*, *Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
4. *Sergienko I. V. and Deineka V. S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
5. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
6. *Алифанов О. М.*, *Артюхин Е. А.*, *Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
7. *Сергиенко И. В.*, *Дейнека В. С.* Решение комплексных обратных задач термоупругости // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 5. – С. 64 – 87.
8. *Сергиенко И. В.*, *Дейнека В. С.* Идентификация параметров многокомпонентных стержневых систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 1. – С. 35 – 42.
9. *Дейнека В. С.*, *Вещунова Н. А.* Численное решение задач идентификации параметров параболических многокомпонентных систем // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 22 – 33.
10. *Дейнека В. С.*, *Вещунова Н. А.* Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластин // Там же. – № 2. – С. 32 – 43.
11. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
13. *Экланд И.*, *Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
14. *Дюво Г.*, *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
15. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
16. *Дейнека В. С.*, *Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
17. *Тимошенко С. П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
18. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.

Поступила 02. 02. 2009