

Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах

А. П. Бовсуновский, О. А. Бовсуновский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Колебания упругого тела с закрывающейся трещиной являются существенно нелинейными. Отличительная особенность таких колебаний заключается в проявлении так называемых нелинейных эффектов, в частности нелинейные, т.е. суб- и супергармонические резонансы и нелинейность колебаний при этих резонансах. Предлагаемый метод определения параметров трещины (размеры и местоположение) основывается на оценке нелинейности колебаний в окрестности супергармонического резонанса порядка $2/1$ и (или) субгармонического резонанса порядка $1/2$ при варьировании местом приложения вынуждающей силы, поскольку, как показывают численные и экспериментальные исследования, уровень нелинейности колебаний стержней с закрывающейся трещиной при нелинейных резонансах зависит не только от параметров трещины, но и от места приложения вынуждающей силы.

Ключевые слова: закрывающаяся трещина, суб- и супергармонические колебания, диагностика трещины, нелинейные эффекты.

Введение. Трещина усталости является одним из наиболее распространенных видов повреждения динамически нагружаемых машин и конструкций. Во многих экспериментальных и теоретических исследованиях показано, что трещина приводит к снижению их собственных частот и искажению форм колебаний. Взаимосвязь между параметрами трещины (размеры и местоположение) и изменениями собственных частот и форм колебаний была предметом большого количества исследовательских работ [1, 2]. Однако чувствительность методов диагностики трещин, основанных на изменениях собственных частот и форм колебаний, оказалась низкой. Позже было обнаружено, что более высокой чувствительностью к наличию трещины обладают так называемые нелинейные эффекты [3], т.е. суб- и супергармонические резонансы и существенная нелинейность колебаний при этих резонансах, а также характеристики демпфирования колебаний [4].

При исследованиях нелинейных эффектов для упрощения анализа исходят из предположения, что в моменты закрытия и открытия трещины происходит мгновенное изменение жесткости конструкции, которое обычно моделируют несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы. Аналитические исследования вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы с такой характеристикой восстанавливающей силы позволяют выявить суб- [5–14] и супергармонические [8, 9, 11, 13, 15, 16] резонансы различных порядков. Кроме того, в [3, 7, 8] показано, что нелинейные эффекты существенно зависят от диссипативных свойств системы: чем выше уровень демпфирования колебаний системы, тем ниже амплитуды нелинейных резонансов и уровень нелинейности колебаний при этих резонансах.

Данные экспериментальных работ [4, 17–19] свидетельствуют о том, что рост трещины усталости сопровождается значительным увеличением характеристик демпфирования колебаний образцов из различных материалов. Если пренебречь этим увеличением, то степень поврежденности колебательной системы, предсказанная на основании нелинейных эффектов, будет недооценена. Следовательно, взаимосвязь между параметрами трещины и нелинейными эффектами необходимо определять с учетом реального уровня демпфирования поврежденной системы, а не в предположении независимости демпфирования от размеров повреждения [11].

Вынужденным колебаниям конструкций и их элементов с закрывающейся трещиной посвящено небольшое количество исследований. Это обусловлено тем, что динамическое поведение механической системы с закрывающейся трещиной существенно нелинейное, что значительно затрудняет получение точного аналитического решения задачи. Кроме того, реальные трещины усталости являются трудно предсказуемыми и постоянно изменяющимися объектами.

Численные исследования вынужденных колебаний стержней с закрывающейся трещиной показывают, что главная отличительная их особенность – это проявление суб- [11] и супергармонических [11, 20–22] резонансов различного порядка. Важно отметить, что нелинейные резонансы могут возникать вследствие любого типа нелинейности колебательной системы, включая симметричную упругую нелинейность восстанавливающей силы [23–30], геометрическую нелинейность [11], нелинейное демпфирование [31]. Существует пороговое значение вынуждающей силы (мощности возбуждения колебаний), ниже которого невозможно возбудить субгармонический резонанс порядка $1/2$ [11, 25] и супергармонический резонанс порядка $2/1$ и $3/1$ [11].

При исследованиях вынужденных колебаний тел с повреждениями место приложения вынуждающей силы и уровень демпфирования колебаний предполагались неизменными. Наши исследования показывают, что нелинейные эффекты существенно зависят от места приложения вынуждающей силы. Это открывает возможности для разработки эффективного вибрационного метода диагностики повреждений, основанного на определении уровня нелинейности колебаний при нелинейных резонансах, возбуждаемых силой, которая прикладывается в различных местах конструкции. Этот подход позволяет избежать влияния на нелинейные эффекты таких факторов, как нелинейное демпфирование, геометрическая нелинейность и т.п., поскольку они заведомо не изменяются при варьировании местом приложения вынуждающей силы.

Цель настоящего исследования – установить, как место приложения вынуждающей силы влияет на нелинейность колебаний при суб- и супергармонических резонансных колебаниях стержней с закрывающейся трещиной и разработать на основании этого метод диагностики трещин усталости.

Влияние места приложения вынуждающей силы: результаты вычислений. Численные исследования по оценке влияния места приложения вынуждающей силы на нелинейность колебаний при супергармоническом резонансе порядка $2/1$ и субгармоническом резонансе порядка $1/2$ выполнены с помощью конечноэлементной модели стержня с закрывающейся трещиной [32].

Модель состоит из 21 элемента (рис. 1). Трещина моделируется укороченным элементом, длина которого составляет 10% длины обычного элемента, с уменьшенной жесткостью. Укороченный элемент позволяет более точно задавать местоположение трещины (L_c). Предполагалось, что стержень с трещиной имеет несимметричную кусочно-линейную характеристику восстанавливающей силы.

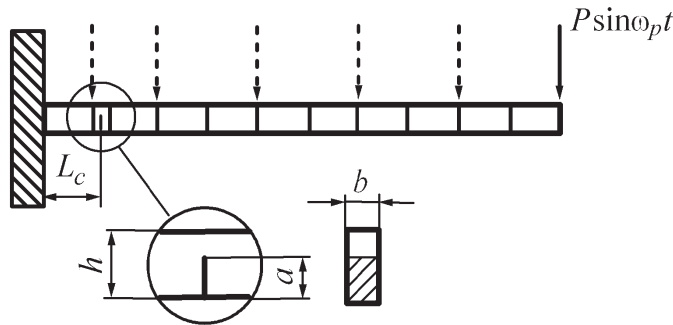


Рис. 1. Конечноэлементная модель консольного стержня.

Исследовали вынужденные изгибные колебания стержней по первой форме с различными граничными условиями и местоположением трещины, а именно: консольный ($L_c/L = 0,1$ и $0,5$), на двух опорах ($L_c/L = 0,1; 0,25$ и $0,5$) и защемленный с двух сторон ($L_c/L = 0,1; 0,25$ и $0,5$). Длина L , высота h и ширина сечения b консольного стержня соответственно равны $0,23$; $0,02$ и $0,004$ м. Размеры стержня на двух опорах и защемленного с двух сторон таковы: $L = 6$ м; $h = 0,5$ м; $b = 0,5$ м. Во всех случаях относительная глубина трещины составляет $a/h = 0,2$. Модуль упругости E , плотность ρ и логарифмический декремент колебаний δ материала соответственно приняты равными 206 ГПа, 7850 кг/м³ и $0,01$.

Суть методики вычислений следующая: к разным узлам модели последовательно прикладывалась сила (рис. 1) и в каждом случае выполнялся спектральный анализ колебательного процесса ускорения при суб- и супергармонических резонансных колебаниях стержня. Исследовался колебательный процесс конца консольного стержня, среднего сечения стержня на двух опорах и защемленного с двух сторон.

Колебания упругого тела при нелинейных резонансных колебаниях являются существенно нелинейными. Нелинейные искажения колебаний при этих резонансах обусловлены главным образом наличием гармоники в спектре колебаний, частота которой совпадает с частотой основного резонанса. Амплитуда этой гармоники значительно превышает амплитуду других гармоник, поэтому она получила название доминирующей. Например, при супергармоническом резонансе второго порядка доминирующей является вторая гармоника с амплитудой A_2 , при субгармоническом резонансе порядка $1/2$ – субгармоника с амплитудой $A_{1/2}$. Поэтому уровень нелинейности колебаний в этих случаях оценивается отношениями A_2/A_1 и $A_{1/2}/A_1$ соответственно (A_1 – амплитуда основной гармоники).

Как видно из рис. 2, нелинейность колебаний консольного стержня при обоих нелинейных резонансах существенно зависит от места приложения вынуждающей силы. Перелом на этих кривых указывает на местоположение трещины. Кроме того, после определения таким образом местоположения трещины можно оценить ее размеры, исходя из уровня нелинейности колебаний, поскольку между размерами трещины и уровнем нелинейности колебаний при нелинейных резонансах существует прямая, хотя и нелинейная, связь.

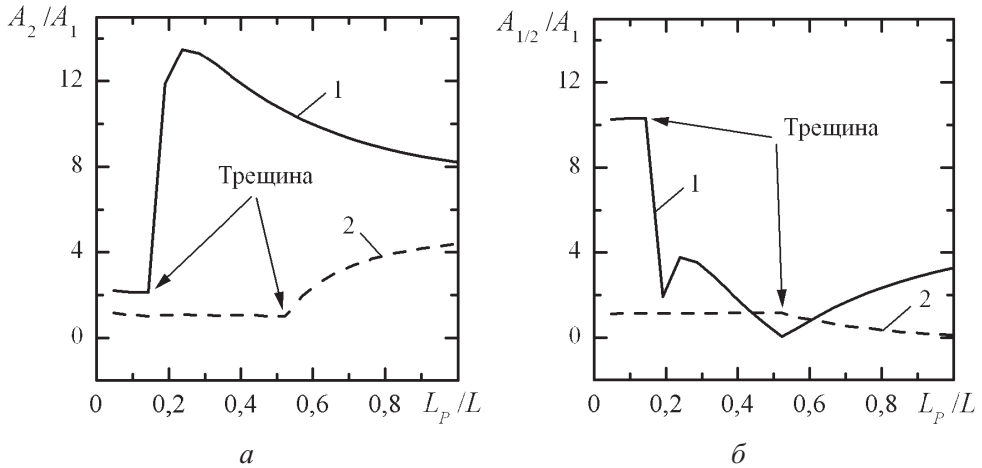


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (б) от места приложения вынуждающей силы для консольного стержня: 1 – $L_c/L = 0,1$; 2 – $L_c/L = 0,5$.

Для случая стержня на двух опорах местоположение трещины обнаруживается по экстремуму нелинейности (рис. 3). Это максимум нелинейности при супергармоническом резонансе и минимум – при субгармоническом. Исключением является случай для стержня с местоположением трещины в сечении $L_c/L = 0,1$. Как видно, субгармонический резонанс в этом случае является слабым, что обусловлено расположением трещины вблизи “узла напряжений” при изгибных колебаниях стержня по первой форме ($L_{node}/L = 0$). Вследствие этого уровень нелинейности системы слишком низкий, чтобы вызвать сильный субгармонический резонанс. Понятие “узел напряжений” введено ранее [33] по аналогии с понятием “узел колебаний”: это сечение, в котором напряжение при данной форме колебаний равно нулю. Необходимость в этом возникла ввиду того, что координаты узлов колебаний и узлов напряжений не всегда совпадают.

Практически такие же результаты получены для стержня, защемленного с двух сторон (рис. 4). При местоположении трещины $L_c/L = 0,25$ субгармонический резонанс стержня не возбуждается. Причина этого – близость трещины к узлу напряжений первой формы изгибных колебаний стержня ($L_{node}/L = 0,223$), вследствие чего нелинейность системы оказалась недостаточной для запуска субгармонического резонанса.

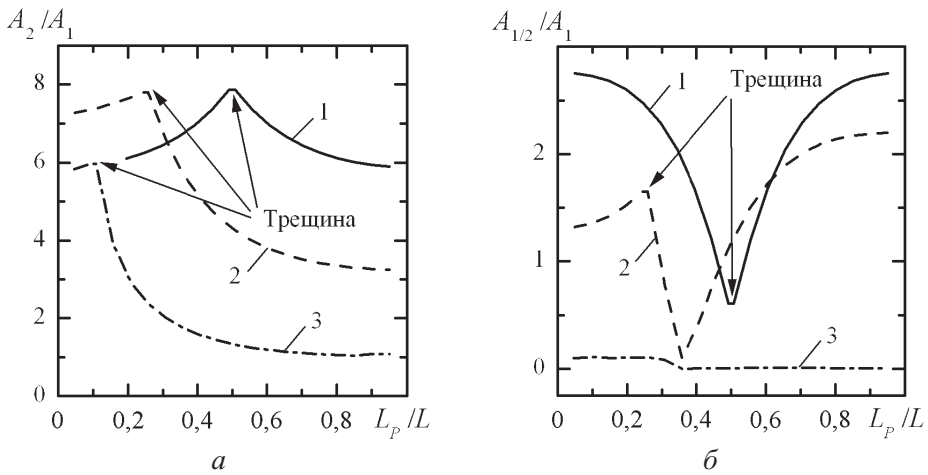


Рис. 3. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (б) от места приложения вынуждающей силы для стержня на двух опорах: 1 – $L_c/L = 0,5$; 2 – $L_c/L = 0,25$; 3 – $L_c/L = 0,1$.

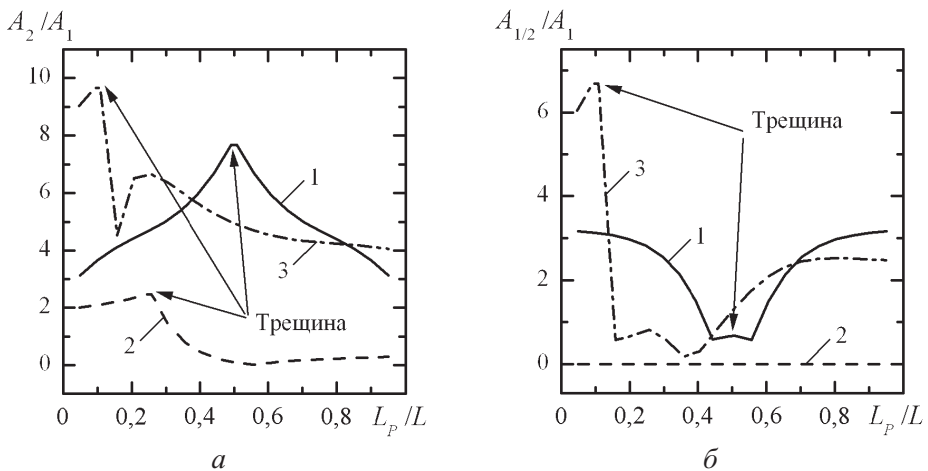


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (б) от места приложения вынуждающей силы для стержня, защемленного с двух сторон: 1 – $L_c/L = 0,5$; 2 – $L_c/L = 0,25$; 3 – $L_c/L = 0,1$.

Таким образом, закрывающаяся трещина, оказавшаяся в узле напряжений при любой форме колебаний (изгибных или продольных), не может быть обнаружена ни на основании нелинейных эффектов, ни по изменению собственной частоты этой формы колебаний или уровня демпфирования. Следовательно, для увеличения надежности вибрационных методов диагностики повреждения необходимо использовать несколько форм колебаний одновременно.

Некоторые кривые на рис. 2–4 имеют более чем один перелом. В этом случае, чтобы локализовать трещину, следует использовать данные об изменении сдвига фаз основной гармоники (φ_1) при субгармоническом резонансе

порядка 1/2 или второй гармонике (φ_2) при супергармоническом резонансе второго порядка.

Как видно из рис. 5, кривые $\varphi_1(L_P/L)$ и $\varphi_2(L_P/L)$ имеют только один перелом, который совпадает с местоположением трещины (в данном случае в сечении $L_c/L=0,1$). Это означает, что другие переломы кривых $A_{1/2}/A_1(L_P/L)$ не соответствуют местоположению трещины. Кривые $\varphi_1(L_P/L)$ и $\varphi_2(L_P/L)$ могут быть использованы самостоятельно для обнаружения местоположения трещины. Однако необходимо учитывать, что чувствительность изменения сдвига фаз к наличию трещины во многих случаях является слабой, например, как в случае субгармонического резонанса стержня на двух опорах с трещиной, расположенной в сечении $L_c/L=0,25$ (рис. 5,б). Поэтому данная характеристика вряд ли может быть использована для диагностики повреждения независимо от нелинейности колебаний при нелинейных резонансах.

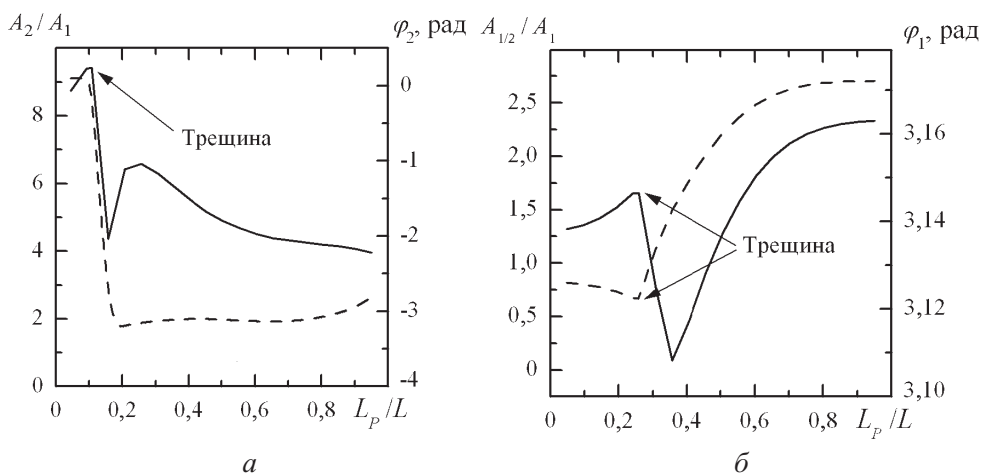


Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения (сплошные линии) и сдвига фаз (штриховые линии) при супергармоническом резонансе порядка 2/1 заземленного с двух сторон стержня (а) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 стержня на двух опорах (б).

Смешанный (экспериментально-аналитический) метод определения местоположения трещины. Описанный в предыдущем разделе метод позволяет определять местоположение трещины, основываясь лишь на результатах измерений нелинейности колебаний, т.е. без привлечения модели. Однако очевидно, что для его точного определения таким методом потребуется значительный объем измерений. Кроме того, в некоторых случаях, например, когда трещина находится недалеко от заземления или опоры стержня, следует возбуждать колебания достаточного для измерений уровня, прикладывая вынуждающую силу в непосредственной близости от этих мест, что на практике является проблематичным.

Исследования показывают, что количество измерений, необходимых для точного определения местоположения трещины, может быть уменьшено до двух, если использовать так называемый смешанный метод. Метод получил такое название, поскольку в нем одновременно используются данные измере-

ний и конечноэлементная модель стержня. Его суть состоит в том, что относительное изменение нелинейности колебаний при суб- и супергармонических резонансных колебаниях стержня с трещиной, определенное при приложении вынуждающей силы в двух разных местах, является инвариантным к размерам трещины и зависит лишь от ее местоположения.

Нелинейность суб- и супергармонических резонансных колебаний, например, свободного конца консольного стержня в общем случае зависит как от размера трещины, так и от ее местоположения (рис. 6), а относительные изменения этой нелинейности определяются местоположением трещины и практически не зависят от ее размера (табл. 1). В табл. 1 нелинейности колебаний свободного конца консольного стержня, вычисленные для случаев, когда вынуждающая сила прикладывалась в узлах 1–20 модели (места приложения силы обозначены соответственно $L_{P1} - L_{P20}$), отнесены к нелинейности колебаний, определенной при приложении силы в узле 21 (точка L_{P21}).

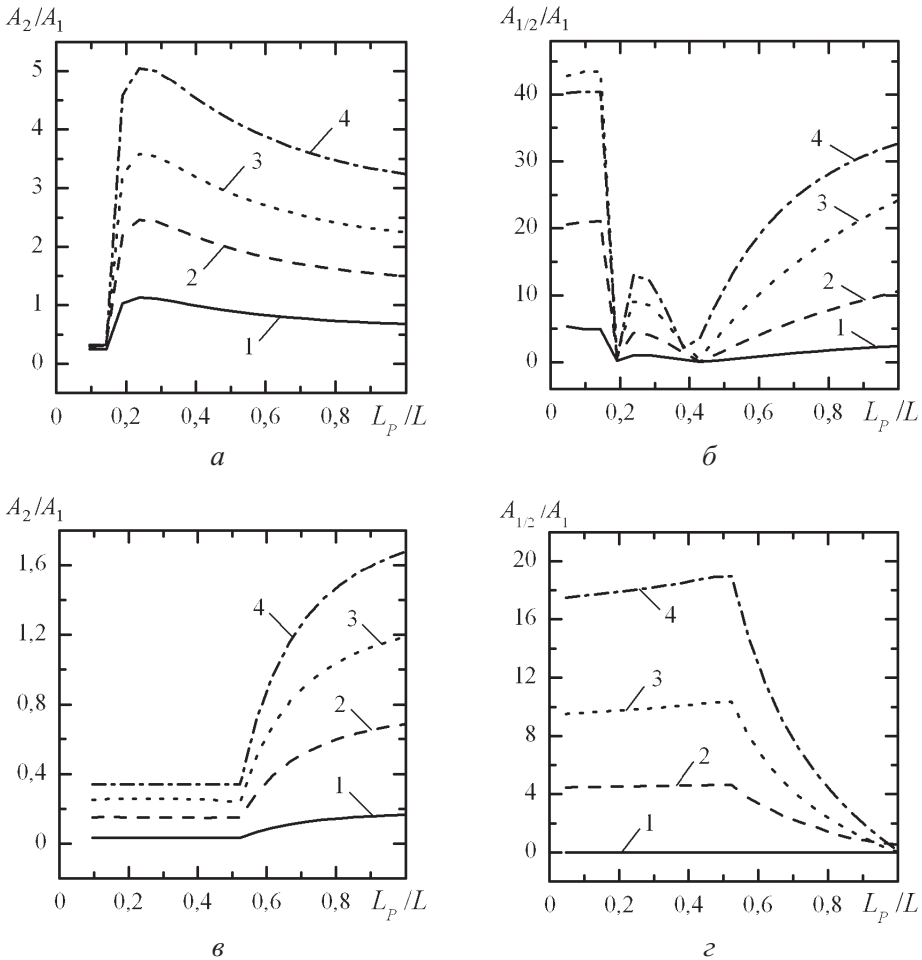


Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра перемещения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а, б) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (в, г) от места приложения вынуждающей силы для консольного стержня с местоположением трещины $L_c/L = 0,1$ (а, б) и $0,5$ (в, г): 1 – $a/h = 0,1$; 2 – $a/h = 0,2$; 3 – $a/h = 0,3$; 4 – $a/h = 0,4$.

Т а б л и ц а 1

Относительное изменение нелинейности колебаний конца консольного стержня при супергармоническом порядке 2/1 и субгармоническом порядке 1/2 резонансах

L_c/L	a/h	$\left(\frac{A_{2/1}}{A_1}\right)_{L_{P21}} / \left(\frac{A_{2/1}}{A_1}\right)_{L_{Pn}}$				$\left(\frac{A_{1/2}}{A_1}\right)_{L_{P21}} / \left(\frac{A_{1/2}}{A_1}\right)_{L_{Pn}}$			
		L_{P5}	L_{P10}	L_{P15}	L_{P21}	L_{P5}	L_{P10}	L_{P15}	L_{P21}
0,1	0,1	1,669	1,358	1,132	1,0	0,447	0,097	0,591	1,0
	0,2	1,646	1,349	1,129	1,0	0,413	0,111	0,597	1,0
	0,3	1,599	1,325	1,123	1,0	0,376	0,123	0,626	1,0
	0,4	1,563	1,312	1,119	1,0	0,402	0,127	0,768	1,0
0,5	0,1	0,218	0,217	0,767	1,0	–	–	–	1,0
	0,2	0,218	0,214	0,767	1,0	8,370	8,522	3,911	1,0
	0,3	0,217	0,205	0,769	1,0	9,830	10,335	3,898	1,0
	0,4	0,215	0,167	0,773	1,0	9,417	9,893	3,764	1,0

Примечание. Прочерки обозначают, что субгармонический резонанс при данных параметрах трещины не возникает.

Таким образом, чтобы определить местоположение трещины с помощью смешанного метода, необходимо провести два испытания, цель которых – измерение нелинейности колебаний определенной точки стержня при суб- или супергармоническом резонансе. Единственная разница между этими испытаниями – место приложения вынуждающей силы (проблема оптимального выбора этих мест является предметом отдельного исследования). В результате испытаний определяется величина относительного изменения нелинейности колебаний вследствие варьирования местом приложения вынуждающей силы. Этой информации достаточно для того, чтобы найти местоположение трещины с помощью модели стержня. Поскольку, как было показано выше, относительное изменение нелинейности колебаний не является функцией размеров трещины, этот параметр принимается постоянным при вычислениях. Затем в модели воспроизводятся условия нагружения, имевшие место при испытаниях, и выполняются два независимых расчета нелинейности колебаний определенной точки стержня (эта точка соответствует расположению датчика при измерениях) при суб- или супергармоническом резонансе. Единственный варьируемый параметр при вычислениях – местоположение трещины, которое считается найденным при условии, что измеренные при испытаниях и предсказанные моделью относительные изменения нелинейности совпадают с наперед заданной точностью.

Определение параметров трещины в стержне смешанным методом. Нелинейность колебаний при обоих нелинейных резонансах является значительной в отличие от амплитуд колебаний при этих резонансах. Поэтому в качестве главной характеристики рассматриваемых резонансов в экспериментальных и аналитических исследованиях принята нелинейность колебаний.

Эксперименты выполнялись на установке КД-1М, созданной в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины. Образец жестко

крепится в массивной станине (рис. 7). Колебания возбуждались бесконтактной электромагнитной системой, состоящей из двух электромагнитов, генератора сигналов и усилителя мощности. Электромагниты взаимодействовали с образцом посредством специальной ферромагнитной пластинки. Система измерения включала тензорезистор, акселерометр, АЦП и компьютер, с помощью которого производились запись и соответствующая обработка колебательных процессов. Трещины усталости выращивались из острого надреза в заданном месте образца. Глубина трещины измерялась оптическим микроскопом с абсолютной погрешностью $\pm 0,1$ мм.

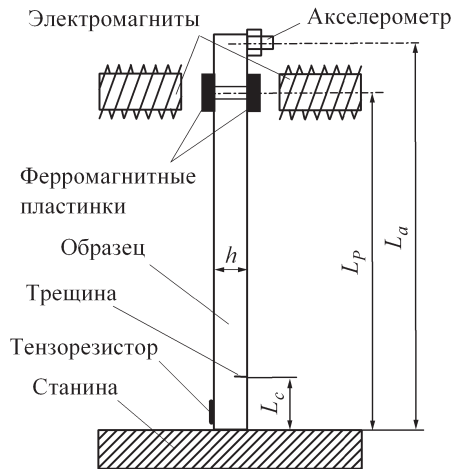


Рис. 7. Схема испытательной установки.

Испытывали образцы из титанового сплава ВТ3 и стали Ст. 3. Размеры образцов и механические характеристики материалов представлены в табл. 2, где L – длина образца; h и b – высота и ширина поперечного сечения образца соответственно; E – модуль упругости материала; ρ – его плотность; σ_{-1} – предел выносливости. Глубина a и местоположение L_c трещины, а также места расположения акселерометра (L_{ac}), тензорезистора (L_{str}), приложения вынуждающей силы (L_{P1} и L_{P2}) и логарифмический декремент колебаний δ приведены в табл. 3.

Ранее [3, 4, 19, 33] установлено, что трещина усталости существенно влияет на демпфирующие характеристики образцов. Поскольку нелинейные эффекты зависят от диссипативных свойств колебательных систем, особое внимание уделялось оценке уровня демпфирования колебаний образцов с трещиной. В качестве характеристики демпфирования использовался логарифмический декремент колебаний, зависимость которого от амплитуды напряжений σ_a определялась методом свободных затухающих колебаний.

Как видно из рис. 8, даже небольшие трещины усталости обуславливают увеличение декремента колебаний образцов из исследованных материалов в несколько раз. Очевидно, что столь значительное изменение демпфирования необходимо учитывать при исследовании нелинейных эффектов. Поэтому данные этих экспериментов использовались для назначения уровня демпфирования в модели стержня с трещиной.

Т а б л и ц а 2

Размеры образцов и механические характеристики материалов

Материал	L , мм	h , мм	b , мм	E , ГПа	ρ , кг/м ³	σ_{-1} , МПа
Титановый сплав ВТ3	230	20,0	4	110	4480	480
Сталь Ст. 3	230	19,5	4	200	7800	190

Т а б л и ц а 3

Параметры трещины, датчиков и вынуждающей силы в экспериментах

Материал	Нелинейный резонанс	a/h	L_c/L	L_{ac}/L	L_{str}/L	L_{P1}/L	L_{P2}/L	δ
Титановый сплав ВТ3	Супергармонический	0,11	0,05	0,97	–	0,78	0,42	0,009
	Субгармонический	0,24	0,05	–	0,06	0,79	0,55	0,003
Сталь Ст. 3	Супергармонический	0,26	0,06	0,97	–	0,80	0,43	0,020
	Субгармонический	0,41	0,06	0,97	–	0,79	0,43	0,020

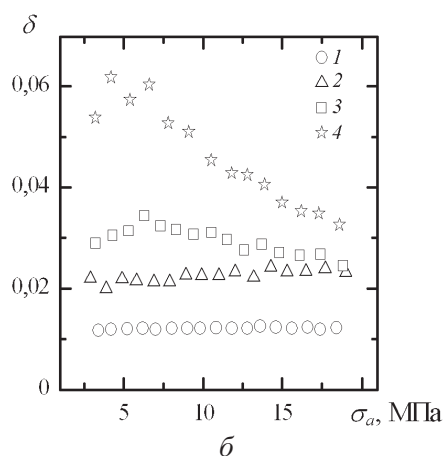
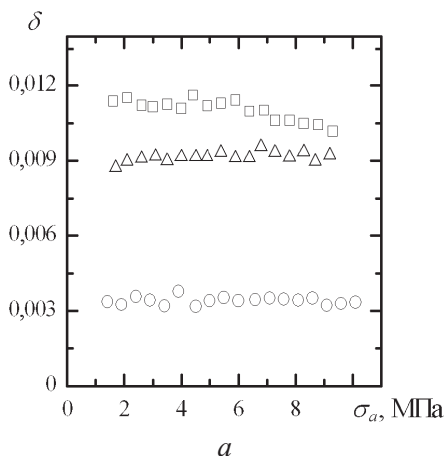
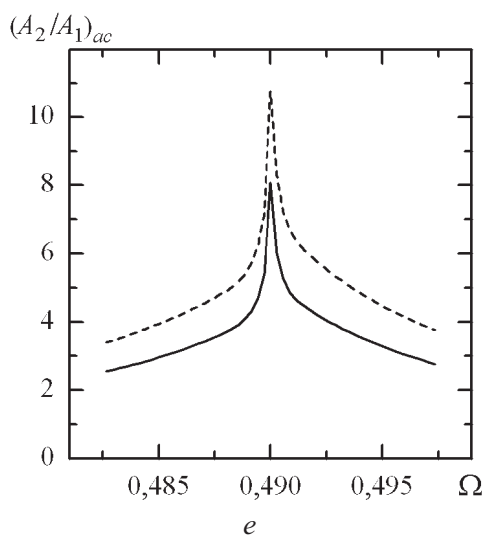
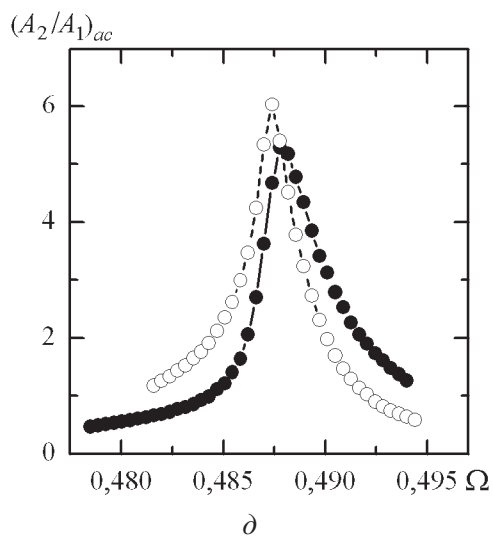
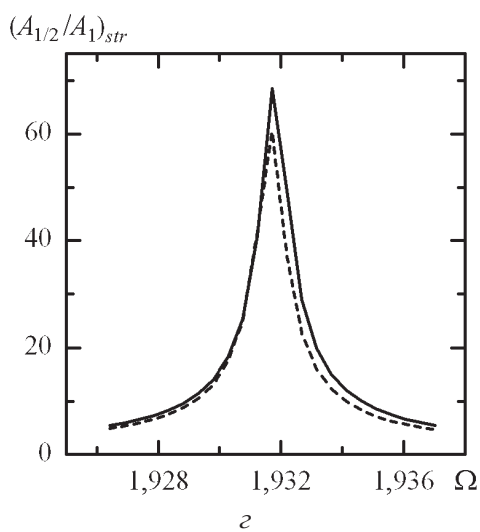
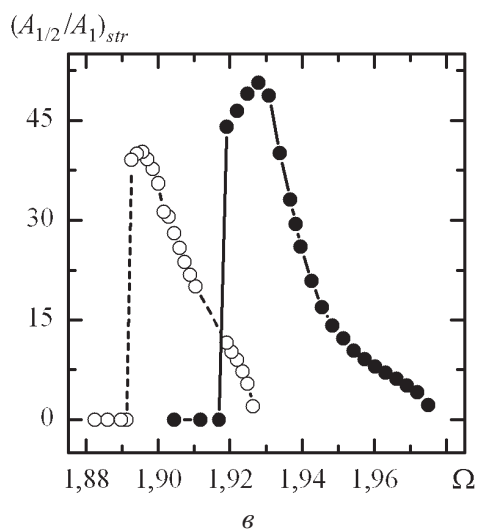
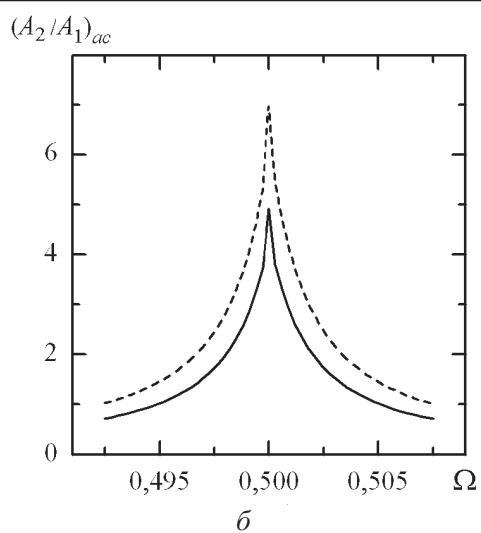
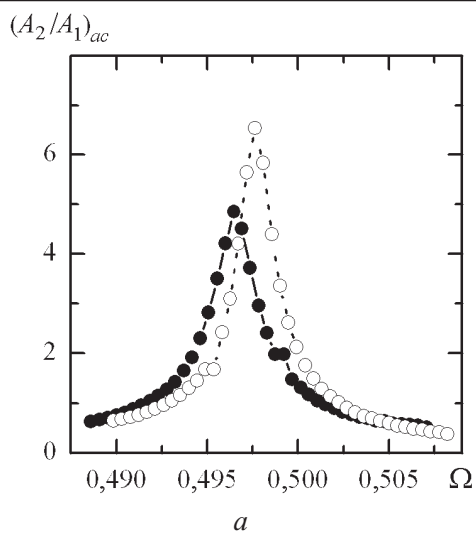


Рис. 8. Амплитудные зависимости логарифмического декремента колебаний образцов из титанового сплава ВТ3 (а) и стали Ст. 3 (б) при различной глубине трещины: 1 – $a/h = 0$; 2 – $a/h = 0,1$; 3 – $a/h = 0,2$; 4 – $a/h = 0,3$.

Полученные экспериментально и с помощью модели отношения A_2/A_1 и $A_{1/2}/A_1$ для колебательных процессов ускорения $(A_2/A_1)_{ac}$ и деформации $(A_{1/2}/A_1)_{str}$ для образцов из титанового сплава ВТ3 и стали Ст. 3 в окрестности супергармонического резонанса порядка 2/1 и субгармонического резонанса порядка 1/2 показаны на рис. 9.

Для каждого образца резонансные кривые получены при двух точках приложения вынуждающей силы. Первая точка выбрана недалеко от конца стержня, вторая – приблизительно посередине (табл. 3). В эксперименте место приложения вынуждающей силы изменялось посредством смещения электромагнитов и ферромагнитных пластин вдоль образца (рис. 7). Испытания проводились при относительно небольших амплитудах напряжений ($\sigma_a = 5 \dots 15$ МПа), чтобы избежать заметного роста трещины и демпфирования в процессе измерений.



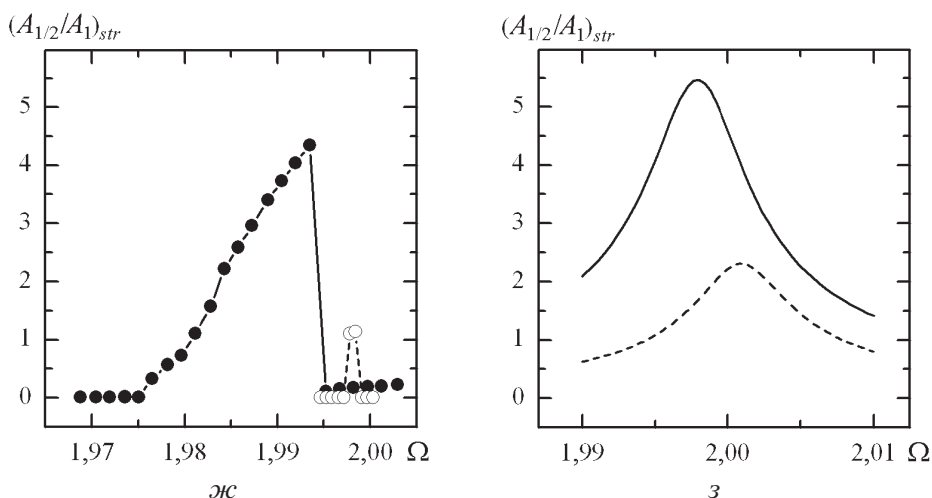


Рис. 9 Супергармонический резонанс порядка 2/1 (а, б, д, е) и субгармонический резонанс порядка 1/2 (а-з, ж, з) для образца из сплава ВТЗ (а-з) и стали Ст. 3 (д-з): сплошные линии – L_{P1} , штриховые – L_{P2} ; Ω – относительная частота вынуждающей силы. (Результаты экспериментов обозначены точками).

Как видно из рис. 9, резонансные кривые, полученные с помощью модели, качественно хорошо согласуются с кривыми, полученными экспериментально. Значительное количественное расхождение между расчетом и экспериментом для образцов из стали Ст. 3 обусловлено так называемым псевдосупергармоническим резонансом [3], избежать которого в случае относительно больших трещин довольно сложно. Кроме того, модель позволяет прикладывать силу лишь в ее узлах, и, следовательно, условия нагружения образцов воспроизводятся с некоторой погрешностью.

Оценка работоспособности смешанного метода определения параметров трещины выполнялась следующим образом. Приведенные выше экспериментальные данные были использованы для определения относительного изменения максимальных нелинейностей ускорения и деформации определенных точек образцов при их суб- и супергармоническом резонансах, вызванного приложением силы в разных точках (L_{P1} и L_{P2}). Максимум нелинейности был найден непосредственно из экспериментальных резонансных кривых (рис. 9), а их значения приведены в табл. 4.

Модель стержня использовалась для вычисления нелинейности его колебаний при нелинейных резонансах. Местоположение вынуждающей силы, датчиков и трещины воспроизводили в модели с погрешностью до 5%. Местоположение трещины было единственным варьируемым параметром при вычислениях (ее относительная глубина в расчетах принята $a/h = 0,2$). Оно варьировалось до тех пор, пока рассчитанное отношение максимальной нелинейности не совпадало с измеренным с точностью до 1%. Как видно из табл. 4, эта процедура вычислений позволяет вполне точно определить местоположение трещины в образцах, основываясь как на анализе субгармонических, так и супергармонических колебаний. Таким образом, смешанный метод может быть использован для определения местоположения трещины при минимальном количестве измерений и вычислений.

Т а б л и ц а 4

Данные экспериментов и результаты прогнозирования параметров трещины

Материал	Нелинейный резонанс	Результаты экспериментов		L_c/L	a/h
		$\frac{(A_{2/1}/A_1)_{L_{P1}}}{(A_{2/1}/A_1)_{L_{P2}}}$	$\frac{(A_{1/2}/A_1)_{L_{P1}}}{(A_{1/2}/A_1)_{L_{P2}}}$		
Титановый сплав ВТ3	Супергармонический (ускорение)	0,74	–	$\frac{0,05}{0,07}$	$\frac{0,11}{0,11}$
	Субгармонический (деформация)	–	1,26	$\frac{0,05}{0,05}$	$\frac{0,24}{0,20}$
Сталь Ст. 3	Супергармонический (ускорение)	0,88	–	$\frac{0,06}{0,13}$	$\frac{0,26}{0,19}$
	Субгармонический (деформация)	–	3,82	$\frac{0,06}{0,05}$	$\frac{0,41}{0,36}$

Примечание. Над чертой приведены экспериментальные данные, под чертой – прогнозируемые.

После определения местоположения трещины с помощью модели можно оценить и ее размеры. Для этого использовалась приведенная выше процедура вычислений, за исключением того, что в этом случае фиксировалось местоположение трещины, найденное на предыдущем этапе вычислений, и варьировался ее размер до тех пор, пока результаты измерений и вычислений абсолютного значения нелинейности колебаний при суб- и супергармоническом резонансе не совпадали с наперед заданной точностью. Как видно из табл. 4, предсказанный моделью размер трещины почти во всех случаях ниже, чем действительный. Это можно объяснить недооценкой уровня демпфирования в модели по сравнению с реальным уровнем демпфирования колебаний образцов при нелинейных резонансах, оценить который экспериментально достаточно сложно. Тем не менее точность, с которой выполнена оценка параметров трещины исследованных образцов, приемлема во многих практических случаях.

Обсуждение результатов. Нелинейность колебаний в окрестности суб- и супергармонического резонансов стержней с различными краевыми условиями чувствительна к наличию закрывающейся трещины. Чувствительность этой характеристики на один–три порядка выше, чем собственных частот или форм колебаний. Как было показано экспериментально и численно, она существенно зависит от размеров и местоположения трещины, уровня демпфирования в системе, места приложения вынуждающей силы.

Возбуждение колебаний стержня сосредоточенной силой, приложенной к различным его точкам, существенно изменяет уровень нелинейности колебаний при суб- и супергармоническом резонансах. Резкое изменение нелинейности позволяет обнаружить местоположение трещины. Уровень нелинейности колебаний прямо (хотя и нелинейно) зависит от размеров трещины. Следовательно, измеряя нелинейность колебаний при суб- и (или) супергармоническом резонансе и зная местоположение трещины, можно оценить ее размеры по уровню нелинейности колебаний с использованием модели стержня.

Смешанный метод определения параметров трещины, основанный на совместном использовании результатов испытаний и модели стержня, позволяет существенно уменьшить количество измерений, необходимых для решения обратной задачи вибродиагностики. Для реализации этого метода следует возбудить какой-либо нелинейный резонанс стержня, прикладывая последовательно силу в двух его точках, и в каждом случае определить нелинейность колебаний заданной точки стержня. Этой информации достаточно для определения местоположения трещины с помощью модели стержня с наперед заданной точностью.

Испытания образцов, выполненные в рамках настоящего исследования, позволяют обнаружить две особенности субгармонического резонанса, которые не были выявлены моделью. Первая заключается в том, что проявление указанного резонанса зависит от мощности возбуждения колебаний. При недостаточной мощности субгармонический резонанс не возникает даже при наличии относительно большой трещины. Мощность, необходимая для возбуждения субгармонических колебаний, значительно выше мощности, требуемой для возбуждения супергармонических колебаний. Эти выводы согласуются с результатами исследований [11, 25, 31].

Вторая особенность состоит в том, что субгармонический режим колебаний крайне нестабилен: он может возникать или исчезнуть неожиданно (рис. 9, в, ж).

Несмотря на то что с помощью модели нельзя выявить указанные особенности субгармонического резонанса и, следовательно, требуется дальнейшее ее усовершенствование, она может использоваться для исследования нелинейных эффектов с некоторыми ограничениями.

Предложенные вибрационные методы диагностики повреждения обеспечивают достижение первого (наличие повреждения) и второго (определение его местоположения) уровней оценки повреждения согласно классификации, предложенной А. Риттером [34]. Определение размеров повреждения (третий уровень) является более сложной задачей.

Заключение. Как было показано на примерах исследованных образцов, смешанный метод позволяет оценить размеры трещины, однако, по всей видимости, такая оценка содержит непредсказуемую погрешность. Проблема заключается в том, что корректность определения размеров трещины зависит непосредственно от точности моделирования реальной восстанавливающей силы. В используемой модели восстанавливающая сила принята кусочно-линейной. Кроме того, предполагается, что изменение состояния трещины (закрытая или открытая) происходит лишь в нейтральном положении стержня. Очевидно, что такое представление об упругих свойствах тела в процессе открытия–закрытия трещины является идеализированным. В действительности эти свойства определяются рядом факторов, влияющих на условия контакта между берегами трещины, а именно:

- 1) остаточные сжимающие напряжения в окрестности вершины трещины, которые обуславливают эффект ее закрытия;
- 2) сминание (выработка) шероховатостей при контакте берегов трещины при циклическом деформировании конструкции;

- 3) вспучивание поверхностей трещины вследствие окисления металла;
- 4) частичное или полное открытие трещины, вызванное большими пластическими деформациями в результате, например, перегрузки конструкции.

Даже при наличии возможности оценить влияние каждого из перечисленных факторов на изменение жесткости тела в процессе открытия–закрытия трещины, учесть это влияние в модели было бы крайне сложно. Кроме того, точность определения размеров трещины зависит также от точности оценки демпфирующих свойств стержня с трещиной при нелинейных резонансах. Если влиянием указанных факторов пренебречь, то расчет с помощью модели на основании нелинейных эффектов даст заниженное по сравнению с реальным значение размера трещины.

Резюме

Коливання пружного тіла з тріщиною, що закривається, є суттєво нелінійними. Характерна особливість таких коливань полягає у проявленні так званих нелінійних ефектів, зокрема, нелінійні, тобто суб- і супергармонічні резонанси і нелінійність коливань при цих резонансах. Запропонований метод визначення параметрів тріщини (розміри і місцезнаходження) базується на оцінці нелінійності коливань в околі супергармонічного резонансу порядку 2/1 і (або) субгармонічного резонансу порядку 1/2 при варіюванні місцем прикладення змушувальної сили, оскільки, як показують числові та експериментальні дослідження, рівень нелінійності коливань стрижнів із тріщиною, що закривається, при нелінійних резонансах залежить не тільки від параметрів тріщини, а й від місця прикладення змушувальної сили.

1. *Dimarogonas A. D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // Eng. Fract. Mech. – 1996. – **55**. – P. 831 – 857.
2. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // Eng. Struct. – 1997. – **19**. – P. 718 – 723.
3. *Bovsunovsky A. P. and Surace C.* Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack // J. Sound Vibration. – 2005. – **288**. – P. 865 – 886.
4. *Bovsunovsky A. P.* Comparative analysis of sensitivity of vibration damage indicators by the results of laboratory tests // Proc. 17th IMAC (Kissimmee, Fl.). – 1999. – **2**. – P. 1909 – 1915.
5. *Thompson J. M. T.* Complex dynamics of compliant offshore structures // Proc. Royal Soc. London. – 1983. – **A387**. – P. 407 – 427.
6. *Shaw S. W. and Holmes P. J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound Vibration. – 1983. – **90**. – P. 129 – 155.
7. *Thompson J. M. T. and Elvey J. S. N.* Elimination of sub-harmonic resonances of compliant marine structures // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – **26**. – P. 419 – 426.
8. *Choi Y. S. and Noah S. T.* Forced periodic vibration of unsymmetric piecewise-linear systems // J. Sound Vibration. – 1988. – **121**. – P. 117 – 126.

9. Wong C. W., Zhang W. S., and Lau S. L. Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // *Ibid.* – 1991. – **149**. – P. 91 – 105.
10. Kim Y. B. and Noah S. T. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: a general approach // *Trans ASME J. Appl. Mech.* – 1991. – **58**. – P. 545 – 553.
11. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *J. Sound Vibration.* – 1998. – **213**. – P. 159 – 168.
12. Xu Ming Tian, Li Jian Feng, and Cheng Delin. Non-linear vibration by a new method // *Ibid.* – **215**. – P. 475 – 487.
13. Kim T. C., Rook T. E., and Singh R. Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method // *Ibid.* – 2005. – **281**. – P. 965 – 993.
14. Qinglong Ma and Kahraman A. Subharmonic resonances of a mechanical oscillator with periodically time-varying, piecewise-nonlinear stiffness // *Ibid.* – 2006. – **294**. – P. 624 – 636.
15. Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А. О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // *Пробл. прочности.* – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
16. Матвеев В. В. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка // *Там же.* – 2004. – № 5. – С. 5 – 22.
17. Imregun M. and Sanliturk K. Y. Natural frequency and damping changes produced by fatigue cracks // *Proc. 15th Int. Seminar on Modal Analysis (Leuven, Belgium).* – 1990. – P. 791 – 805.
18. Rytter A., Brincker R., and Kirkegaard P. H. An Experimental Study of the Modal Parameters of a Cantilever // *Fracture & Dynamics, Paper No. 37.* – Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg (Denmark), 1992. – 76 p.
19. Bovsunovsky A. P. The mechanisms of energy dissipation in the non-propagating fatigue cracks in metallic materials // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – **71**. – P. 2271 – 2281.
20. Crespo P., Ruotolo R., and Surace C. Non-linear modelling of a cracked beam // *Proc. 14th IMAC (Dearborn, Michigan).* – 1996. – **2**. – P. 1017 – 1022.
21. Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // *Comp. Struct.* – 1996. – **61**. – P. 1057 – 1074.
22. Pugno N., Ruotolo R., and Surace C. Analysis of the harmonic vibrations of a beam with a breathing crack // *Proc. 15th IMAC (Tokyo, Japan).* – 1997. – P. 409 – 413.

23. *Krishnan A.* Difference equation analysis of non-linear subharmonic and superharmonic oscillations // *J. Sound Vibration.* – 1981. – **79.** – P. 121 – 131.
24. *Abu-Arish A. M. and Nayfeh A. H.* The response of one-degree-of-freedom systems with cubic and quartic non-linearities to a harmonic excitation // *Ibid.* – 1985. – **103.** – P. 253 – 272.
25. *Wu J. J.* A generalized harmonic balance method for forced non-linear oscillations: the subharmonic cases // *Ibid.* – 1992. – **159.** – P. 503 – 525.
26. *Lau S. L. and Zhang W.-S.* Nonlinear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 1992. – **59.** – P. 153 – 160.
27. *Blankenship G. W. and Kahraman A.* Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity // *J. Sound Vibration.* – 1995. – **185.** – P. 743 – 765.
28. *Lee W. K., Yeo M. N., and Bae S. S.* Validity of the multiple-scale solution for a subharmonic resonance response of a bar with a non-linear boundary condition // *Ibid.* – 1997. – **208.** – P. 567 – 574.
29. *Han S. M. and Benaroya H.* Non-linear coupled transverse and axial vibration of a compliant structure. Pt. 2: Forced vibration // *Ibid.* – 2000. – **237.** – P. 875 – 900.
30. *Szea K. Y., Chen S. H., and Huang J. L.* The incremental harmonic balance method for nonlinear vibration of axially moving beams // *Ibid.* – 2005. – **281.** – P. 611 – 626.
31. *Вульфсон И. И., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 283 с.
32. *Бовсуновский О. А.* Конечнoэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной // *Пробл. прочности.* – 2008. – № 5. – С. 114 – 120.
33. *Бовсуновский А. П.* Об эффективности использования характеристик демпфирования колебаний элементов конструкций для диагностики повреждения // *Там же.* – 2002. – № 6. – С. 48 – 60.
34. *Rytter A.* Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures. – PhD Thesis, University of Aalborg (Denmark), 1993. – 193 p.

Поступила 18. 12. 2008