УДК 539.3

Динамика круглых трехслойных пластин на упругом основании при осесимметричном нагружении

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Рассмотрены осесимметричные поперечные колебания круглой трехслойной пластины с легким заполнителем на упругом основании под действием внезапно приложенных и импульсных поверхностных нагрузок. Реакция основания описывается моделью Винклера. Для анализа кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Аналитические решения получены с использованием системы функций Хевисайда и δ-функции Дирака. Проведены численные расчеты и сравнительный анализ полученных решений.

Ключевые слова: упругость, колебания, трехслойные пластины, основание Винклера, импульс.

Обозначения

ρ_k	–	плотность материала k-го слоя, $k = 1, 2, 3$
$q(r, t)$	–	внешняя распределенная нагрузка
$q_0,\ q_1$	–	интенсивность распределенной и импульсной нагрузки соответственно
$q_n(t)$	–	коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям
q_R	–	реакция основания
κ_0	–	коэффициент жесткости упругого основания
$w(r, t)$	–	прогиб пластины
$\psi(r, t)$	–	относительный сдвиг в заполнителе
$u(r, t)$	–	радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя
$G_k,\ K_k$	–	модули сдвига и объемной деформации
r_1	–	радиус пластины
v_n	–	фундаментальная ортонормированная система собственных функций
d_n	–	нормировочный коэффициент
$T_n(t)$	–	функция времени в разложении в ряд по системе собственных функций
$J_0,\ J_1$	–	функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно
$I_0,\ I_1$	–	модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно
λ_n	–	собственные числа
ω_n	–	частоты собственных колебаний
$A_n,\ B_n$	–	константы интегрирования
$H_0(r)$	–	функция Хевисайда
$\delta(t)$	–	функция Дирака
h_k	–	толщина k-го слоя, $k = 1, 2, 3$ – номер слоя

Введение. Слоистые конструкции используются в качестве элементов корпусов авиационных аппаратов, космических объектов, обшивки вагонов, строительных панелей, электронных плат и т. д. Одним из их видов являются трехслойные пластины. Поперечные колебания пластин, не связанных с упругим основанием, исследовались в [1–5], работа [6] посвящена колебаниям трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем. Поведение многослойных пластин и оболочек при нестационарных нагружениях исследовалось в [7, 8]. Квазистатическое деформирование круговой трехслойной пластины, расположенной на упругом винклеровском основании, при воздействии термосиловых нагрузок рассматривалось ранее [9, 10].

В настоящей работе исследуются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине трехслойной пластины круглой формы, связанной с упругим основанием Винклера, возбужденные локальными и импульсными поверхностными распределенными нагрузками.

Постановка задачи. Используется цилиндрическая система координат r, ϕ, z (рис. 1), связанная со срединной плоскостью заполнителя. Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгоффа. Несжимаемый по толщине заполнитель ($h_3 = 2c$) – легкий, т.е. в нем пренебрегается работа касательных напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ. На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты ϕ: $q = q(r, t)$. На наружную грань второго несущего слоя действует реакция упругого основания q_R.

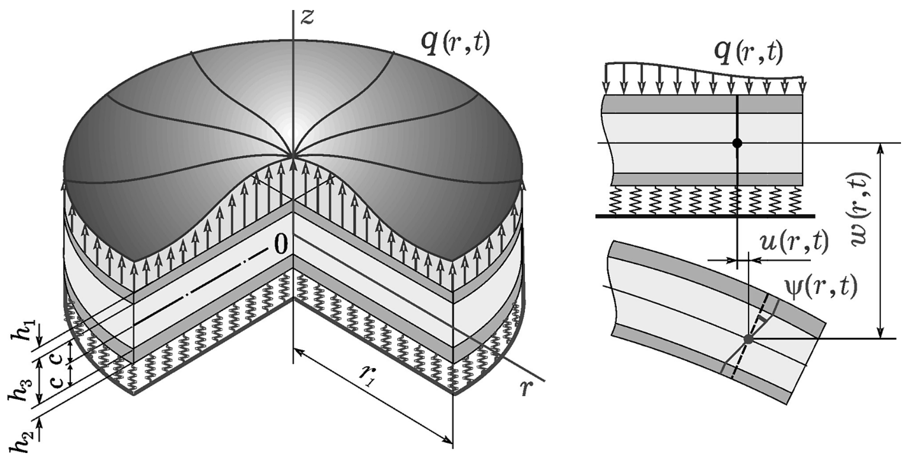


Рис. 1. Расчетная схема круглой трехслойной пластины на упругом основании.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты ϕ, т.е. $w = w(r, t)$, $\psi = \psi(r, t)$, $u = u(r, t)$. Далее эти функции полагаем искомыми.

Связь между реакцией и прогибом принимается в соответствии с моделью Винклера:

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластины, связанной с упругим безынерционным основанием, без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Лагранжа с учетом вариации работы сил инерции [3]. В нашем случае в третьем уравнении добавится реакция упругого основания:

$$\begin{cases} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w,_r) = 0; \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w,_r) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w,_r) = M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w = -q, \end{cases} \tag{1}$$

где $M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$; L_2, L_3 – дифференциальные операторы; a_i – коэффициенты,

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+; \qquad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \qquad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k;$$

$$a_3 = h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+; \qquad a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+\right);$$

$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right];$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+;$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g)),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемной деформации материала k-го слоя.

Задача определения функций $u(r,t)$, $\psi(r,t)$, $w(r,t)$ замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий:

$$w(r,0) \equiv f(r); \qquad \dot{w}(r,0) \equiv g(r). \tag{2}$$

Собственные колебания. Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений, описывающую собственные колебания круглой трехслойной пластины на упругом безынерционном основании, которая следует из (1) при $q = 0$ и после некоторых преобразований приводится к виду

$$u = b_1 w,_r + C_1 r + C_2 / r; \qquad \psi = b_2 w,_r + C_3 r + C_4 / r;$$
$$L_3(w,_r) + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0, \tag{3}$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \qquad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; \qquad \kappa^4 = \kappa_0 D;$$

$$M^4 = M_0 D; \qquad D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб при свободных колебаниях принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \tag{4}$$

где $v(r)$ – неизвестная координатная функция; ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины; A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (2).

После подстановки выражения (4) в последнее уравнение системы (3) следует уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v,_r) - \lambda^4 v = 0. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda^4 = \beta^4 - \kappa^4; \qquad \beta^4 = M^4 \omega^2. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) можно представить в виде [11]

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r), \tag{7}$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана) соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; $C_5, \ldots,$ C_8 – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций, отметим, что $Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат [12], т.е. в центре пластины. Поэтому необходимо в (7) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$.

При защемленном контуре трансцендентное уравнение для определения собственных чисел λ_n круглой трехслойной пластины, связанной с упругим безынерционным основанием, следует из соответствующих граничных условий:

$$I_1(\lambda r_1) J_0(\lambda r_1) + J_1(\lambda r_1) I_0(\lambda r_1) = 0. \tag{8}$$

Если контур шарнирно оперт, то аналогичное уравнение принимает вид

$$J_0(\lambda r_1)\left[a_7\left(\lambda I_0(\lambda r_1) - \frac{I_1(\lambda r_1)}{r_1}\right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\lambda r_1)\right] +$$

$$+ I_0(\lambda r_1)\left[a_7\left(\lambda J_0(\lambda r_1) - \frac{J_1(\lambda r_1)}{r_1}\right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\lambda r_1)\right] = 0, \tag{9}$$

где

$$a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2; \qquad a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2;$$

$$a_{60} = h_1\left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2\right) K_1^- + h_2\left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2\right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-;$$

$$K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

После численного решения уравнений (8), (9) параметры β_n и частоты собственных колебаний ω_n определяются через собственные числа λ_n из формул (6).

В общем случае для описания прогиба рассматриваемой пластины при свободных поперечных колебаниях вводится система собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\lambda_n, r)$:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r)\right]. \tag{10}$$

Здесь учитывалось вытекающее из граничного условия $w = 0$ соотношение между константами интегрирования $C_6 = -C_5 J_0(\lambda r_1)/I_0(\lambda r_1)$. Константы d_n определяются из требования нормировки функции (10):

$$d_n^2 = \int_0^{r_1}\left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r)\right]^2 r\,dr.$$

В окончательном виде искомый динамический прогиб трехслойной круглой пластины на упругом безынерционном основании представляется с помощью разложения в ряд по фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (10):

$$w(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t)+B_n \sin(\omega_n t)). \tag{11}$$

Радиальное перемещение и относительный сдвиг следуют из первых двух уравнений системы (3) и условия на контуре $\psi(r_1,t)=u(r_1,t)=0$:

$$\begin{aligned} u(r,t)&=b_1\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t));\\ \psi(r,t)&=b_2\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)), \end{aligned} \tag{12}$$

где система функций $\varphi_n \equiv \varphi_n(\lambda_n, r)$ следующая:

$$\varphi_n(\lambda_n,r)=\frac{\lambda_n}{d_n}\left[J_1(\lambda_n r_1)r-J_1(\lambda_n r)+\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}(I_1(\lambda_n r_1)r-I_1(\lambda_n r))\right].$$

Коэффициенты A_n, B_n в формулах (11), (12) определяются начальными условиями движения (2).

Вынужденные колебания. Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r,t)$ и искомые перемещения $u(r,t)$, $\psi(r,t)$, $w(r,t)$ представляются в виде разложений в ряд:

$$\begin{gathered} q(r,t)=M_0\sum_{n=0}^{\infty}v_n q_n(t);\\ u(r,t)=b_1\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n T_n(t);\quad \psi(r,t)=b_2\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n T_n(t);\quad w(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n T_n(t). \end{gathered} \tag{13}$$

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений (13) на v_n и проинтегрировав его по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций v_n (10) имеем

$$q_n(t)=\frac{1}{M_0}\int_0^{r_1} q(r,t)v_n r dr. \tag{14}$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (3) после подстановки в него выражений (13) и использования линейной связи функций v_n, ϕ_n:

$$\ddot{T}_n+\omega_n^2 T_n=q_n. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau) q_n(\tau) d\tau. \qquad (16)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий (2):

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr; \qquad B_n = \frac{1}{\omega_n}\int_0^{r_1} g(r) v_n r dr. \qquad (17)$$

Результаты расчетов. Рассмотрим несколько примеров локального и импульсного внешнего осесимметричного силового воздействия на пластину. Для удобства аналитической записи нагрузки воспользуемся функцией Хевисайда $H_0(r)$ и δ-функцией Дирака $\delta(t)$. Задача, как правило, сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$.

Численный расчет проводили для защемленной по контуру пластины единичного радиуса, слои которой состоят из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3]. Собственные частоты колебаний ω_n вычисляли по формуле (6) с использованием приведенных выше собственных чисел и геометрических параметров слоев $h_1 = h_2 = 0{,}01$, $h_3 = 2c = 0{,}1$. Начальные условия предполагались нулевыми, что в соответствии с (17) позволяет положить константы интегрирования $A_n = 0$, $B_n = 0$.

1. На пластину действует динамическая внезапно приложенная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кругу радиуса $b \le r_1$:

$$q(r, t) = q_0(t) H_0(b - r). \qquad (18)$$

Подставим нагрузку (18) в формулу (14) и получим интегральное выражение для вычисления $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n}\int_0^{r_1} H_0(b-r)\left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r)\right) r dr.$$

В результате вычисления интегралов от произведения функций Хевисайда и Бесселя получим

$$q_n(t) = \frac{q_0(t) b}{M_0 d_n \lambda_n}\left(J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b)\right).$$

После этого решение задачи о вынужденных колебаниях пластины на упругом основании определяется соотношениями (4), а функция $T_n(t)$ – по формуле (16). Если интенсивность равномерной внешней нагрузки q_0 постоянна по модулю, то при нулевых начальных условиях получим

$$T_n(t)=\frac{q_0 b(1-\cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n^2}\left(J_1(\lambda_n b)-\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}I_1(\lambda_n b)\right). \qquad (19)$$

Рис. 2 иллюстрирует нелинейность роста максимального прогиба пластины с увеличением радиуса b пятна локальной нагрузки. Наличие упругого основания несколько изменяет характер кривой, при этом прогиб уменьшается в четыре раза при нагрузке в десять раз большей.

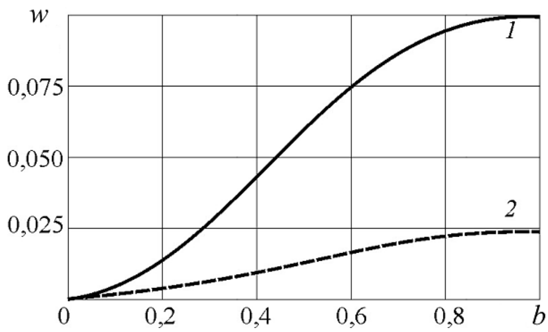


Рис. 2. Зависимость прогиба в центре пластины от радиуса пятна локальной нагрузки: *1* – без упругого основания ($t = 0{,}033$ с, $q_0 = 7\cdot 10^4$ Па); *2* – $\kappa_0 = 10^8$ Па/м ($t = 0{,}026$ с, $q_0 = 7\cdot 10^5$ Па).

2. Рассмотрим случай внешней нагрузки, когда в начальный момент времени ($t=0$) на поверхность пластины, ограниченную окружностью радиуса $b \le r_1$, воздействует мгновенный равномерно распределенный импульс

$$q(r, t)=q_1\delta(t)H_0(b-r). \qquad (20)$$

Тогда

$$q_n(t)=\frac{q_1\delta(t)b}{M_0 d_n \lambda_n}\left(J_1(\lambda_n b)-\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}I_1(\lambda_n b)\right);$$

$$T_n(t)=\frac{q_1 b\sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n}\left(J_1(\lambda_n b)-\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}I_1(\lambda_n b)\right). \qquad (21)$$

Отсюда в частном случае $b=r_1$ получим решение для импульсного воздействия на всю внешнюю поверхность круглой трехслойной пластины.

На рис. 3 показано изменение прогиба вдоль радиуса пластины, соответствующего максимуму функции (21) при воздействии импульса $q_1 = 700$ Па$\cdot$с, распределенного по всей поверхности пластины. Учет реакции упругого основания приводит к уменьшению прогиба в четыре раза. С увеличением жесткости основания максимальный прогиб уменьшается еще в 2,7 раза.

3. На исследуемую круглую трехслойную пластину действует динамическая внезапно приложенная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу $a \le r \le b$. Тогда внешнюю нагрузку можно записать как разность двух нагрузок (18):

$$q(r, t)=q_0(t)(H_0(b-r)-H_0(r-a)).$$

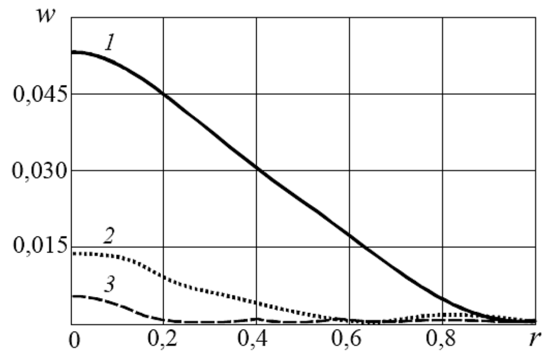


Рис. 3. Изменение прогиба вдоль радиуса при локальном импульсном нагружении: *1* – без упругого основания, $\kappa_0 = 0$, $t = \pi/(2\omega_0)$; *2* – $\kappa_0 = 10^8$ Па/м, $t = 0{,}0325$ с; *3* – $\kappa_0 = 10^9$ Па/м, $t = 0{,}0275$ с.

Решение задачи получим в виде разности двух решений (19). Коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций будут:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n \lambda_n}\left(bJ_1(\lambda_n b) - aJ_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}(bI_1(\lambda_n b) - aI_1(\lambda_n a))\right),$$

после чего для стационарной внешней нагрузки $q_0 = \mathrm{const}$ получим

$$T_n(t) = \frac{q_0(1-\cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n^2} \times$$

$$\times\left(bJ_1(\lambda_n b) - aJ_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}(bI_1(\lambda_n b) - aI_1(\lambda_n a))\right). \qquad (22)$$

При $a = 0$ из (22) следует решение (19).

На рис. 4 показано изменение формы и величины прогиба пластины, не связанной и связанной с упругим основанием, в зависимости от расположения кольцевого пятна нагрузки. Его ширина $b - a = 0{,}25$, интенсивность нагрузки $q_0 = 7000$ Па, момент времени $t = \pi/\omega_0$ соответствует максимальному значению функции (22). При отсутствии основания наименьший прогиб возникает при нагрузке, сосредоточенной у контура, наибольший – при распределении нагрузки по кольцу, $0{,}25 \le r \le 0{,}5$. При наличии упругого основания с жесткостью $\kappa_0 = 10^8$ Па/м максимальный прогиб уменьшается в 4,5 раза и достигается при нагрузке, распределенной в интервале $0{,}5 \le r \le 0{,}75$.

4. Мгновенный равномерно распределенный импульс поверхностной нагрузки воздействует на кольцевую поверхность пластины ($a \le r \le b$). Соответствующую интенсивность нагрузки можно записать в виде разности двух нагрузок (20):

$$q(r,t) = q_1 \delta(t)(H_0(b-r) - H_0(r-a)),$$

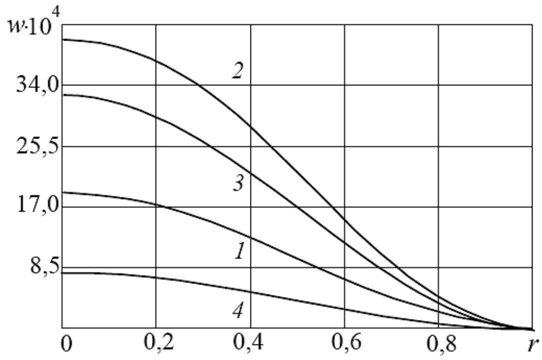
откуда следует

$$q_n(t)=\frac{q_1\delta(t)}{M_0 d_n \lambda_n}\left(bJ_1(\lambda_n b)-aJ_1(\lambda_n a)-\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}(bI_1(\lambda_n b)-aI_1(\lambda_n a))\right),$$

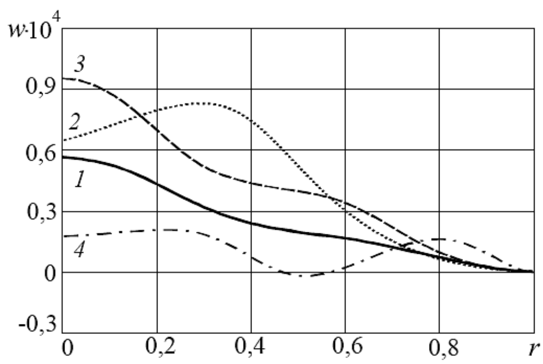
после чего получим следующую искомую функцию времени:

$$T_n(t)=\frac{q_1\sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n}\left(bJ_1(\lambda_n b)-aJ_1(\lambda_n a)-\frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}(bI_1(\lambda_n b)-aI_1(\lambda_n a))\right). \tag{23}$$

В частном случае при $a=0$ из (23) следует решение (21).



а



б

Рис. 4. Изменение прогиба вдоль радиуса пластины, не связанной (*а*) и связанной (*б*) с упругим основанием, в зависимости от кольцевого пятна нагрузки: *1* – $a=0$; *2* – $a=0{,}25$; *3* – $a=0{,}5$; *4* – $a=0{,}75$.

На рис. 5 показано ($t=\pi/(2\omega_0)$) изменение величины прогиба пластины в зависимости от расположения внутреннего радиуса кольцевого пятна импульсной нагрузки. Ширина пятна принята $b-a=0{,}25$, интенсивность нагрузки $q_1 = 700$ Па · с. В этом случае наличие упругого основания также приводит к уменьшению величины прогиба.

Заключение. Таким образом, рассмотренная методика позволяет исследовать вынужденные колебания круглых трехслойных пластин на упругом основании, находящихся под действием локальных поверхностных осесим-

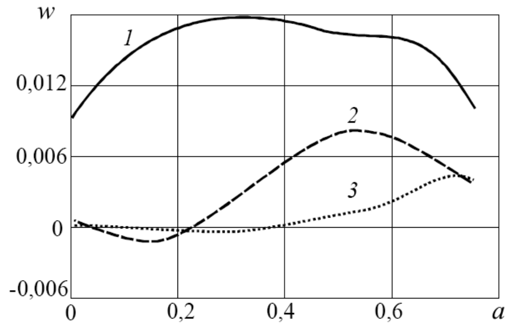


Рис. 5. Зависимость прогиба в центре пластины от расположения кольцевого пятна импульсной нагрузки: *1* – без упругого основания; *2* – $\kappa_0 = 10^8$ Па/м, $t = 0{,}0325$ с; *3* – $\kappa_0 = 10^9$ Па/м, $t = 0{,}0275$ с.

метричных нагрузок, включая импульсные. Полученные аналитические и численные решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем могут быть использованы для решения практических задач.

Резюме

Розглянуто вісесиметричні поперечні коливання круглої тришарової пластини з легким заповнювачем на пружній основі під дією раптово прикладеного й імпульсного поверхневого навантаження. Реакція основи описується моделлю Вінклера. Для аналізу кінематики несиметричного по товщині пакета прийнято гіпотези ломаної нормалі. Аналітичний розв'язок отримано з використанням системи функцій Хевісайда і δ-функції Дірака. Проведено числові розрахунки та порівняльний аналіз отриманих рішень.

1. *Mirsa S. and Singh A. V.* Axisymmetric vibration of circular sandwich plates // AIAA J. – 1974. – **12**, No. 10. – P. 1418 – 1420.
2. *Григолюк Э. И.*, *Кассихин В. Н.* Малые поперечные колебания слоистых круговых пластин // Пробл. прочности. – 1982. – № 10. – С. 65 – 68.
3. *Старовойтов Э. И.*, *Яровая А. В.*, *Леоненко Д. В.* Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
4. *Старовойтов Э. И.*, *Леоненко Д. В.*, *Яровая А. В.* Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок // Пробл. прочности. – 2002. – № 5. – С. 70 – 79.
5. *Старовойтов Э. И.*, *Леоненко Д. В.*, *Яровая А. В.* Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различных форм // Там же. – 2003. – № 4. – С. 32 – 39.
6. *Старовойтов Э. И.*, *Леоненко Д. В.*, *Яровая А. В.* Динамика трехслойных стержней // Там же. – 2006. – № 6. – С. 133 – 146.
7. *Долгополова Н. В.*, *Угримов С. В.*, *Шупиков А. Н.* Нестационарное деформирование многослойных пластин и цилиндрических оболочек на упругом основании // Вестн. НТУ "ХПИ". – 2001. – № 25. – С. 74 – 81.

8. *Шупиков А. Н.*, *Бузько Я. П.*, *Сметанкина Н. В.*, *Угримов С. В.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: ХИЭУ, 2004. – 252 с.
9. *Старовойтов Э. И.*, *Яровая А. В.*, *Леоненко Д. В.* Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
10. *Старовойтов Э. И.*, *Яровая А. В.*, *Леоненко Д. В.* Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении // Пробл. прочности. – 2007. – № 5. – С. 68 – 80.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
12. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.

Поступила 09. 09. 2008