УДК 593.3

Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщение 3. Феноменологические критерии прочности

П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Приведен анализ известных из литературных источников наиболее широко применяемых в приложениях феноменологических критериев прочности анизотропных материалов.

Ключевые слова: феноменологические критерии прочности, анизотропия, композиционный материал, предельная поверхность разрушения.

В сообщениях 1 и 2 приведен анализ известных из литературных источников методов и результатов теоретического и экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении.

Данная работа посвящена обзору некоторых наиболее широко применяемых в приложениях феноменологических критериев, используемых для оценки прочности упругих (вплоть до разрушения) композиционных материалов (КМ).

Для оценки прочности КМ необходимо знать критерии, задающие допустимые границы напряжений и деформаций, в которых материал может работать при заданных условиях без разрушения. Такие критерии получили название критериев предельных состояний. Предельными являются состояния, при которых КМ переходит из упругого состояния в пластическое или разрушается. В первом случае критерий предельного состояния обычно называют условием пластичности, во втором – условием прочности.

Прочность КМ может быть определена с использованием двух основных подходов [1]: структурного (имеющего физическую основу и учитывающего гетерогенную микроструктуру композита) и феноменологического (макроструктурного, обобщенные критерии разрушения).

Большинство современных теорий разрушения являются структурными (микромеханическими) [1]. Трудности, возникающие при создании и применении микромеханических моделей прочности, весьма значительны [1]. При этом, как отмечалось в [1, 2], структурные подходы, в отличие от феноменологических, не всегда позволяют получить более точные результаты.

В настоящее время для оценки прочности композиционных материалов, находящихся в сложном напряженном состоянии, чаще всего используются феноменологические подходы [1]. При макроскопическом подходе армированный неоднородный композит рассматривается как сплошная среда с определенной симметрией свойств, математическая модель которой строится на основе экспериментально полученных данных без объяснения механизмов, определяющих поведение композита.

Феноменологические критерии предельного состояния описывают с некоторой степенью надежности макромеханическое поведение КМ в целом, без учета микромеханических особенностей, возникающих в процессе его деформирования.

При использовании феноменологического подхода можно применить общее условие прочности для композитов, разных по составу и технологии, но одинаковых по симметрии свойств, а также для материалов со значительной анизотропией, для которых одно и то же напряженное состояние может привести к различным по природе предельным состояниям, если изменяются знаки напряжений или их ориентация.

При отсутствии тепловых, временных, химических и радиационных воздействий на материал его разрушение обычно связывают с напряженным состоянием тела; тогда феноменологический критерий прочности можно записать в виде [2, 3]

$$f(\sigma_{ij}, F) \leq 0, \tag{1}$$

где σ_{ij} – напряжения; F – некоторые характеристики прочности материала. При невыполнении условия (1) прочность нарушается. В случае строгого равенства в (1) приходим к уравнению поверхности прочности.

Для анизотропного материала величина F в уравнении (1) должна быть совокупностью многих параметров материала, инвариантных относительно преобразования системы координат. Для изотропных тел параметр материала F представляет собой скалярную функцию трех прочностных характеристик материала, которая в некоторых частных случаях может вырождаться в функцию двух прочностных параметров либо в скалярную константу.

Феноменологические критерии прочности не выводятся аналитически, они постулируются или предлагаются на основе обобщения экспериментальных данных. Следствием имеющейся относительной свободы в формулировке критериев прочности явились многочисленные попытки создания таких критериев [1–15 и др.]. Выбор того или иного критерия зависит от природы материала, его состава, степени анизотропии, выбранной концепции расчета, имеющегося объема экспериментальных данных.

Одна из наиболее общих формулировок критерия прочности анизотропных тел для трехмерного случая с использованием матричных обозначений имеет вид [11]

$$(F_i\sigma_i)^{\alpha} + (F_{ij}\sigma_i\sigma_j)^{\beta} + (F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k)^{\gamma} + \ldots \leq 1, \qquad i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, 6, \tag{2}$$

где σ_i и F_i, F_{ij}, $F_{ijk}, \ldots$ – матричные обозначения тензора напряжений и так называемых тензоров поверхности прочности (тензоры прочности) второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов; показатели степени α, β, γ и т.д. определяются из условия наилучшего описания экспериментальных данных. Ограничиваясь двумя первыми членами зависимости (2), в работе [11] наиболее полно разработан вариант критерия (2), в котором принято $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$.

Более удобным для практического применения оказался вариант критерия, в котором показатели степени в (2) приняты равными единице [2, 12, 15] ($\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$). Отсюда следует

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \ldots \le 1. \qquad (3)$$

Форма записи (3) получила название тензорно-полиномиального критерия прочности [2, 12, 13].

В приложениях из-за большого количества требуемых констант материала третьим и последующими слагаемыми в выражении (3) обычно пренебрегают [4, 5, 15 и др.]. Тогда полиномиальный критерий (3) приводится к квадратичному критерию Цая–Ву, или просто критерию Цая–Ву вида [15]

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \le 1. \qquad (4)$$

Согласно данным [12, 15] неравенство (4) в случае строгого равенства может описать поверхность разрушения (выполняется необходимое условие существования поверхности), если смешанные компоненты F_{ij} $(i \neq j)$ удовлетворяют следующим трем необходимым условиям устойчивости:

$$F_{ii} F_{jj} - F_{ij}^2 \ge 0 \qquad \text{(по } i \text{ и } j \text{ не суммируется).} \qquad (5)$$

Критерий Цая–Ву в общем случае учитывает различие между пределами прочности при растяжении и сжатии, зависимость прочности от направления касательных напряжений при сдвиге, обладает максимально возможной гибкостью, не содержит избыточных параметров, позволяет легко определить главные оси прочности и др. [12].

Если предположить, что существует потенциал разрушения, т.е. оно не зависит от траектории нагружения, тензор F_{ij} будет симметричным [12]. Симметричен и тензор F_i, что следует из симметричности тензора напряжений.

При принятых предположениях в развернутом виде уравнение (4) запишем так [15]:

$$\begin{gathered}
F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_4\sigma_4 + F_5\sigma_5 + F_6\sigma_6 + \\
+ F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{14}\sigma_1\sigma_4 + 2F_{15}\sigma_1\sigma_5 + 2F_{16}\sigma_1\sigma_6 + \\
+ F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{24}\sigma_2\sigma_4 + 2F_{25}\sigma_2\sigma_5 + 2F_{26}\sigma_2\sigma_6 + \\
+ F_{33}\sigma_3^2 + 2F_{34}\sigma_3\sigma_4 + 2F_{35}\sigma_3\sigma_5 + 2F_{36}\sigma_3\sigma_6 + \\
+ F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{45}\sigma_4\sigma_5 + 2F_{46}\sigma_4\sigma_6 + \\
+ F_{55}\sigma_5^2 + 2F_{56}\sigma_5\sigma_6 + \\
+ F_{66}\sigma_6^2 \le 1. \qquad (6)
\end{gathered}$$

Компоненты тензоров прочности должны быть определены из эксперимента. Для материала с общим видом анизотропии свойств и моноклинного материала для конкретизации (6) необходимо провести соответственно 27 и 17 опытов [3]. Это свидетельствует о том, что для таких материалов очень сложно использовать критерий (6) в приложениях. Практически он становится применимым только для ортотропных и трансверсально-изотропных материалов.

Согласно данным [3], для ортотропного материала уравнение (6) в главных осях ортотропии материала принимает вид

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 +$$

$$+ F_{55}\sigma_5^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \le 1. \qquad (7)$$

При записи (7) принято, что сдвиговая прочность не зависит от направления касательных напряжений, откуда следует отсутствие взаимовлияния между нормальными и касательными напряжениями, а также между различными касательными напряжениями.

В выражении (7) несвязанные компоненты тензоров прочности обозначены как F_1, F_2, F_3, F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{44}, F_{55}, F_{66}. Значения этих компонент однозначно определяются из опытов на одноосное растяжение (сжатие) и чистый сдвиг [3].

Связанные (смешанные) компоненты тензора прочности обозначены как F_{12}, F_{13}, F_{23}. При использовании критерия Цая–Ву основная трудность заключается в экспериментальном определении смешанных компонент тензора прочности. Имеется большое число подходов к их определению [3, 5, 7, 12, 15–19 и др.]. Для этого необходимо провести опыты при двухосном напряженном состоянии или использовать образцы сложной формы, что приводит к существенным затратам [3]. Величина F_{ij} существенно зависит от разброса экспериментальных данных. В то же время ее небольшие изменения заметно влияют на вид поверхности прочности [15]. Поэтому большое внимание уделяется разработке оптимального (в смысле выбора соотношения между напряжениями σ_i, σ_j) эксперимента, позволяющего наиболее точно определить F_{ij} [17]. Поскольку оптимальные соотношения напряжений, в свою очередь, зависят от величины F_{ij}, процедура ее определения носит итерационный характер.

В [18] в качестве первого приближения предложено следующее из условия устойчивости критерия разрушения материала (5) выражение вида

$$F_{ij} = c(F_{ii}F_{jj})^{1/2}, \qquad (8)$$

где $|c| \le 1$.

При этом для определения F_{ij} нет необходимости проводить опыты при двухосном напряженном состоянии, что значительно упрощает использование критерия в приложениях. Выражение (8) при $c = -1/2$ в последнее время широко применяется при моделировании разрушения композитов [19–24 и др.], при этом критерий для изотропных материалов совпадает с критерием Мизеса. Критерий (7), (8) при $c = -1/2$ будем называть, как и авторы [25], обобщенным критерием Мизеса.

Согласно данным [3, 16], компоненты тензоров прочности для обобщенного критерия Мизеса могут быть определены следующим образом:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}; \quad F_2 = \dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}; \quad F_3 = \dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = \dfrac{1}{Y_t Y_c}; \quad F_{33} = \dfrac{1}{Z_t Z_c}; \\ F_{44} = \dfrac{1}{R^2}; \quad F_{55} = \dfrac{1}{S^2}; \quad F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = -\dfrac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}; \quad F_{13} = -\dfrac{1}{2\sqrt{X_t X_c Z_t Z_c}}; \\ F_{23} = -\dfrac{1}{2\sqrt{Y_t Y_c Z_t Z_c}}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь и далее X_t, Y_t, Z_t – пределы прочности при растяжении в главных направлениях 1, 2 и 3 соответственно; X_c, Y_c, Z_c – пределы прочности при сжатии в главных направлениях 1, 2 и 3 соответственно; R, S, T – пределы прочности при сдвиге в главных плоскостях 23, 13 и 12 соответственно.

Для конкретизации обобщенного критерия Мизеса необходимо определить 12 коэффициентов из девяти опытов: на растяжение и сжатие в трех главных направлениях ортотропии (шесть) и на сдвиг в трех главных плоскостях (три).

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии 23 согласно данным [3] из уравнения (7) получим

$$F_1\sigma_1 + F_2(\sigma_2 + \sigma_3) + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2(F_{22} - F_{23})\sigma_4^2 +$$

$$+ F_{66}(\sigma_5^2 + \sigma_6^2) + 2F_{12}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3) + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \le 1. \tag{10}$$

Соответствующие семь компонентов тензоров прочности в уравнении (10) определяются, учитывая данные [3], так:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}; \quad F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}; \quad F_{66} = \frac{1}{T^2};$$
$$F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}; \quad F_{23} = -\frac{1}{2Y_t Y_c}. \tag{11}$$

Для их конкретизации необходимо провести пять опытов на растяжение–сжатие в направлении 1 и 2 и на чистый сдвиг в плоскости 12. Следует отметить, что для любого транстропного тела с плоскостью изотропии 23 при использовании квадратичных критериев прочности должно тождественно удовлетворяться равенство

$$F_{44} = F_{22} + F_{33} - 2F_{23}. \tag{12}$$

Согласно данным [19], обобщенный критерий Мизеса хорошо согласуется с экспериментальными данными для материалов с высокой степенью анизотропии.

Вопросы математически строгого обоснования необходимых и достаточных условий устойчивости, выпуклости, односвязности, замкнутости либо открытости, возможных и допустимых геометрических форм шестимерной предельной поверхности прочности (7) в настоящее время изучены недостаточно. В [26] для общего случая трехосного НДС были получены необходимые и достаточные условия, согласно которым предельная поверхность прочности (7) имела бы физический смысл: была односвязной и замкнутой либо допускала существование не более одного направления (луча или прямой) с бесконечной прочностью. Эти условия имеют вид

$$A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2 \le 1 + 2A_{12}A_{23}A_{31} < 3, \tag{13}$$

где $A_{ij} = F_{ij} \Big/ \sqrt{F_{ii}F_{jj}}$, причем если в (13) первое нестрогое неравенство заменить на строгое, получим необходимые и достаточные условия, чтобы предельная поверхность была эллипсоидом. Если в левой части (13) выполняется равенство, имеем эллиптические параболоиды либо цилиндры в зависимости от коэффициентов F_i при линейных членах в (7). Требования (13) накладывают более жесткие ограничения на константы F_{ij}, чем традиционно используемые необходимые условия устойчивости (5). Таким образом, удовлетворение только условиям (5) не всегда гарантирует существование физически допустимой поверхности прочности.

Были предложены и другие квадратичные критерии прочности [27–31 и др.]. Как отмечалось в [3], относительное использование феноменологических критериев таково: максимальных деформаций – 30%, максимальных напряжений – 22%, Цая–Хилла – 17%, Цая–Ву – 12%, остальные – 19%. Заметим, что критерий Цая–Ву более точно описывает разрушение композитных материалов по сравнению с критериями максимальных деформаций, максимальных напряжений и Цая–Хилла [7].

Следуя данным работы [16], покажем, что некоторые критерии прочности являются частными случаями полиномиального критерия прочности (3).

Критерий максимальных напряжений. Согласно этому критерию, разрушение наступает в случае если не удовлетворяется любое из следующих условий [16]:

$$\begin{gathered} -X_c \le \sigma_1 \le X_t, \quad -Y_c \le \sigma_2 \le Y_t, \quad -Z_c \le \sigma_3 \le Z_t, \\ |\sigma_4| \le R, \quad |\sigma_5| \le S, \quad |\sigma_6| \le T. \end{gathered} \tag{14}$$

Критерий максимальных напряжений (КМН) может быть выражен в терминах тензорно-полиномиального критерия (3) так [16]:

$$\begin{gathered} (\sigma_1 - X_t)(\sigma_1 + X_c)(\sigma_2 - Y_t)(\sigma_2 + Y_c)(\sigma_3 - Z_t)(\sigma_3 + Z_c)\times \\ \times(\sigma_4 - R)(\sigma_4 + R)(\sigma_5 - S)(\sigma_5 + S)(\sigma_6 - T)(\sigma_6 + T) \le 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Сравнивая уравнение (3) с (15), и, пренебрегая членами выше второго порядка, получаем приближенный критерий максимальных напряжений в квадратичной форме, для которого ненулевые компоненты тензора прочности равны

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}; \quad F_2 = \dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}; \quad F_3 = \dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = \dfrac{1}{Y_t Y_c}; \quad F_{33} = \dfrac{1}{Z_t Z_c}; \\ F_{44} = \dfrac{1}{R^2}; \quad F_{55} = \dfrac{1}{S^2}; \quad F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = -\dfrac{F_1 F_2}{2}; \quad F_{13} = -\dfrac{F_1 F_3}{2}; \quad F_{23} = -\dfrac{F_2 F_3}{2}. \end{cases} \qquad (16)$$

Остальные прочностные константы равны нулю.

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии 23 с учетом данных [3] получим

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}; \quad F_2 = F_3 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}; \quad F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = F_{33} = \frac{1}{Y_t Y_c};$$
$$F_{55} = F_{66} = \frac{1}{T^2}; \quad F_{12} = F_{13} = -\frac{F_1 F_2}{2}; \quad F_{23} = -\frac{F_2^2}{2}. \qquad (17)$$

Критерий максимальных деформаций. Согласно критерию максимальных деформаций (КМД), предполагается, что разрушение наступает, если не удовлетворяется любое из следующих условий [16]:

$$-X_{\varepsilon c} \le \varepsilon_1 \le X_{\varepsilon t}; \quad -Y_{\varepsilon c} \le \varepsilon_2 \le Y_{\varepsilon t}; \quad -Z_{\varepsilon c} \le \varepsilon_3 \le Z_{\varepsilon t};$$
$$|\varepsilon_4| \le R_\varepsilon; \quad |\varepsilon_5| \le S_\varepsilon; \quad |\varepsilon_6| \le T_\varepsilon, \qquad (18)$$

где ε_1, ε_2, ε_3 – деформации растяжения в направлении 1, 2, 3 соответственно; ε_4, ε_5, ε_6 – деформации сдвига в плоскостях 23, 13 и 12 соответственно; $X_{\varepsilon t}$, $Y_{\varepsilon t}$, $Z_{\varepsilon t}$ – предельные деформации растяжения в главных направлениях 1, 2 и 3 соответственно; $X_{\varepsilon c}$, $Y_{\varepsilon c}$, $Z_{\varepsilon c}$ – предельные деформации сжатия в главных направлениях 1, 2 и 3 соответственно; R_ε, S_ε, T_ε – предельные сдвиговые деформации прочности в главных плоскостях 23, 13 и 12 соответственно.

Выражая критерий в тензорно-полиномиальном виде, получаем [16]

$$(\varepsilon_1 - X_{\varepsilon t})(\varepsilon_1 + X_{\varepsilon c})(\varepsilon_2 - Y_{\varepsilon t})(\varepsilon_2 + Y_{\varepsilon c})(\varepsilon_3 - Z_{\varepsilon t})(\varepsilon_3 + Z_{\varepsilon c}) \times$$
$$\times (\varepsilon_4 - R_\varepsilon)(\varepsilon_4 + R_\varepsilon)(\varepsilon_5 - S_\varepsilon)(\varepsilon_5 + S_\varepsilon)(\varepsilon_6 - T_\varepsilon)(\varepsilon_6 + T_\varepsilon) \le 0. \qquad (19)$$

Используя матрицу податливости и определяющие соотношения теории упругости анизотропного тела, а также пренебрегая членами выше второго порядка, уравнение (19) может быть приближенно записано в квадратичной форме, для которой ненулевые компоненты тензоров прочности имеют вид [16]

$$
\begin{cases}
F_1 = F_1^A + \dfrac{S_{12}}{S_{22}} F_2^A + \dfrac{S_{13}}{S_{33}} F_3^A; \\
F_2 = \dfrac{S_{12}}{S_{11}} F_1^A + F_2^A + \dfrac{S_{23}}{S_{33}} F_3^A; \\
F_3 = \dfrac{S_{13}}{S_{11}} F_1^A + \dfrac{S_{23}}{S_{22}} F_2^A + F_3^A; \\
F_{11} = \dfrac{1}{X_t X_c} + \left(\dfrac{S_{12}}{S_{22}}\right)^2 \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \left(\dfrac{S_{13}}{S_{33}}\right)^2 \dfrac{1}{Z_t Z_c} - \dfrac{S_{13}}{S_{33}} F_1^A F_3^A - \\
\quad - \dfrac{S_{12}}{S_{22}} F_1^A F_2^A - \dfrac{S_{12} S_{13}}{S_{22} S_{23}} F_2^A F_3^A; \\
F_{22} = \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \left(\dfrac{S_{12}}{S_{11}}\right)^2 \dfrac{1}{X_t X_c} + \left(\dfrac{S_{23}}{S_{33}}\right)^2 \dfrac{1}{Z_t Z_c} - \dfrac{S_{12}}{S_{11}} F_1^A F_2^A - \\
\quad - \dfrac{S_{23}}{S_{33}} F_2^A F_3^A - \dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{11} S_{33}} F_1^A F_3^A; \\
F_{33} = \dfrac{1}{Z_t Z_c} + \left(\dfrac{S_{13}}{S_{11}}\right)^2 \dfrac{1}{X_t X_c} + \left(\dfrac{S_{23}}{S_{22}}\right)^2 \dfrac{1}{Y_t Y_c} - \dfrac{S_{13}}{S_{11}} F_1^A F_3^A - \\
\quad - \dfrac{S_{23}}{S_{22}} F_2^A F_3^A - \dfrac{S_{13} S_{23}}{S_{11} S_{22}} F_1^A F_2^A; \\
F_{44} = \dfrac{1}{R^2}; \quad F_{55} = \dfrac{1}{S^2}; \quad F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\
F_{12} = \dfrac{S_{12}}{S_{11}} \dfrac{1}{X_t X_c} + \dfrac{S_{12}}{S_{22}} \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \dfrac{S_{13} S_{23}}{S_{33}^2} \dfrac{1}{Z_t Z_c} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{12}^2}{S_{11} S_{22}} + 1\right) F_1^A F_2^A - \\
\quad - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{13} S_{12}}{S_{11} S_{33}} + \dfrac{S_{23}}{S_{33}}\right) F_1^A F_3^A - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{22} S_{33}} + \dfrac{S_{13}}{S_{33}}\right) F_2^A F_3^A; \\
F_{13} = \dfrac{S_{13}}{S_{11}} \dfrac{1}{X_t X_c} + \dfrac{S_{13}}{S_{33}} \dfrac{1}{Z_t Z_c} + \dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{22}^2} \dfrac{1}{Y_t Y_c} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{13}^2}{S_{11} S_{33}} + 1\right) F_1^A F_2^A - \\
\quad - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{12} S_{13}}{S_{11} S_{22}} + \dfrac{S_{23}}{S_{22}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{13} S_{23}}{S_{22} S_{33}} + \dfrac{S_{12}}{S_{22}}\right) F_2^A F_3^A; \\
F_{23} = \dfrac{S_{23}}{S_{22}} \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \dfrac{S_{23}}{S_{33}} \dfrac{1}{Z_t Z_c} + \dfrac{S_{12} S_{13}}{S_{11}^2} \dfrac{1}{X_t X_c} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{23}^2}{S_{22} S_{33}} + 1\right) F_1^A F_2^A - \\
\quad - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{11} S_{22}} + \dfrac{S_{13}}{S_{11}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{23} S_{13}}{S_{11} S_{33}} + \dfrac{S_{12}}{S_{11}}\right) F_2^A F_3^A,
\end{cases}
\tag{20}
$$

где S_{ij} – компоненты матрицы податливости; F_1^A, F_2^A, F_3^A – выражения, приведенные для F_1, F_2, F_3 в критерии максимальных напряжений. Остальные компоненты тензоров прочности равны нулю.

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии 23 с учетом данных [3] получим

$$\begin{cases} F_1 = F_1^A + \left(\dfrac{S_{12}}{S_{22}} + \dfrac{S_{13}}{S_{33}}\right) F_2^A; \\ F_2 = F_3 = \dfrac{S_{12}}{S_{11}} F_1^A + \left(1 + \dfrac{S_{23}}{S_{33}}\right) F_2^A; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_t X_c} + \left(\left(\dfrac{S_{12}}{S_{22}}\right)^2 + \left(\dfrac{S_{13}}{S^{33}}\right)^2\right) \dfrac{1}{Y_t Y_c} - \left(\dfrac{S_{13}}{S_{33}} + \dfrac{S_{12}}{S_{22}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{S_{12} S_{13}}{S_{22} S_{23}} (F_2^A)^2; \\ F_{22} = F_{33} = \left(1 + \left(\dfrac{S_{23}}{S_{33}}\right)^2\right) \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \left(\dfrac{S_{12}}{S_{11}}\right)^2 \dfrac{1}{X_t X_c} - \\ \qquad - \left(\dfrac{S_{12}}{S_{11}} + \dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{11} S_{33}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{S_{23}}{S_{33}} (F_2^A)^2; \\ F_{55} = F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = F_{13} = \dfrac{S_{12}}{S_{11}} \dfrac{1}{X_t X_c} + \left(\dfrac{S_{12}}{S_{22}} + \dfrac{S_{13} S_{23}}{S_{33}^2}\right) \dfrac{1}{Y_t Y_c} - \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{S_{12}}{S_{11}}\left(\dfrac{S_{12}}{S_{22}} + \dfrac{S_{13}}{S_{33}}\right) + \dfrac{S_{23}}{S_{33}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{12} S_{23}}{S_{22} S_{33}} + \dfrac{S_{13}}{S_{33}}\right) (F_2^A)^2; \\ F_{23} = S_{23}\left(\dfrac{1}{S_{22}} + \dfrac{1}{S_{33}}\right) \dfrac{1}{Y_t Y_c} + \dfrac{S_{12} S_{13}}{S_{11}^2} \dfrac{1}{X_t X_c} - \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{S_{23}}{S_{22}}\left(\dfrac{S_{23}}{S_{33}} + \dfrac{S_{12}}{S_{11}}\right) + \dfrac{S_{13}}{S_{11}}\right) F_1^A F_2^A - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{23} S_{13}}{S_{11} S_{33}} + \dfrac{S_{12}}{S_{11}}\right) (F_2^A)^2. \end{cases} \tag{21}$$

Критерий Цая–Хилла (модифицированный критерий Хилла [5]). Критерий Цая–Хилла согласно [16] может быть записан так:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z_i}\right)^2 - \left(\frac{1}{X_i^2} + \frac{1}{Y_i^2} - \frac{1}{Z_i^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{Z_i^2} + \frac{1}{X_i^2} - \frac{1}{Y_i^2}\right)\sigma_1\sigma_3 -$$

$$- \left(\frac{1}{Y_i^2} + \frac{1}{Z_i^2} - \frac{1}{X_i^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_4}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{T}\right)^2 \le 1. \tag{22}$$

Отметим, что в критерии (22) компоненты напряжения не встречаются в первой степени, следовательно, F_1, F_2 и F_3 равны нулю. Величины X_i, Y_i и Z_i принимают значения X_t, Y_t, Z_t или X_c, Y_c, Z_c в зависимости от знака нормальных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 соответственно.

Компоненты тензоров прочности для этого критерия таковы:

$$\begin{cases} F_i = 0; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_i^2}; \quad F_{22} = \dfrac{1}{Y_i^2}; \quad F_{33} = \dfrac{1}{Z_i^2}; \quad F_{44} = \dfrac{1}{R^2}; \quad F_{55} = \dfrac{1}{S^2}; \quad F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X_i^2} + \dfrac{1}{Y_i^2} - \dfrac{1}{Z_i^2}\right); \quad F_{13} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Z_i^2} + \dfrac{1}{X_i^2} - \dfrac{1}{Y_i^2}\right); \\ F_{23} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y_i^2} + \dfrac{1}{Z_i^2} - \dfrac{1}{X_i^2}\right). \end{cases} \tag{23}$$

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии 23 также необходимо пользоваться формулами (23), поскольку F_{ii} и F_{ij} зависят не только от соответствующих пределов прочности, но и от знаков нормальных напряжений.

Критерий Хоффмана. Критерий Хоффмана может быть записан следующим образом [16, 28]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y_cY_t} + \frac{1}{Z_cZ_t} - \frac{1}{X_cX_t}\right)(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_cZ_t} + \frac{1}{X_cX_t} - \frac{1}{Y_cY_t}\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_cX_t} + \frac{1}{Y_cY_t} - \frac{1}{Z_cZ_t}\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2 +$$

$$+\left(\frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}\right)\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_4}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{T}\right)^2 \le 1. \tag{24}$$

Критерий представляет собой частный случай тензорно-полиномиального критерия при следующем выборе параметров F_i и F_{ij}:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}; \quad F_2 = \dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}; \quad F_3 = \dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_tX_c}; \quad F_{22} = \dfrac{1}{Y_tY_c}; \quad F_{33} = \dfrac{1}{Z_tZ_c}; \\ F_{44} = \dfrac{1}{R^2}; \quad F_{55} = \dfrac{1}{S^2}; \quad F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X_cX_t} + \dfrac{1}{Y_cY_t} - \dfrac{1}{Z_cZ_t}\right); \end{cases} \tag{25a}$$

$$\begin{cases} F_{13} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Z_c Z_t} + \dfrac{1}{X_c X_t} - \dfrac{1}{Y_c Y_t}\right); \\ F_{23} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y_c Y_t} + \dfrac{1}{Z_c Z_t} - \dfrac{1}{X_c X_t}\right). \end{cases} \qquad (25б)$$

Остальные компоненты тензоров прочности равны нулю.

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии 23 с учетом данных [3] получим

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}; \quad F_2 = F_3 = \dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}; \\ F_{11} = \dfrac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = F_{33} = \dfrac{1}{Y_t Y_c}; \quad F_{55} = F_{66} = \dfrac{1}{T^2}; \\ F_{12} = F_{13} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X_c X_t}\right); \quad F_{23} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{Y_c Y_t} - \dfrac{1}{X_c X_t}\right). \end{cases} \qquad (26)$$

Приведенные выше компоненты тензоров прочности для квадратичных полиномиальных критериев разрушения в случае ортотропных материалов представлены в табл. 1, трансверсально-изотропных – в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

Квадратичные полиномиальные критерии разрушения ортотропного материала

F_i, F_{ij}	Обобщенный критерий Мизеса	Критерий Цая–Хилла*	Критерий Хоффмана	КМН (в полиноми-альном виде)	КМД (в полиноми-альном виде)
1	2	3	4	5	6
F_1	$\dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}$	0	$\dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}$	$\dfrac{1}{X_t} - \dfrac{1}{X_c}$	$F_1^A + \dfrac{S_{12}}{S_{22}} F_2^A + {}$ $+ \dfrac{S_{13}}{S_{33}} F_3^A$
F_2	$\dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}$	0	$\dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}$	$\dfrac{1}{Y_t} - \dfrac{1}{Y_c}$	$\dfrac{S_{12}}{S_{11}} F_1^A + {}$ $+ F_2^A + \dfrac{S_{23}}{S_{33}} F_3^A$
F_3	$\dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}$	0	$\dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}$	$\dfrac{1}{Z_t} - \dfrac{1}{Z_c}$	$\dfrac{S_{13}}{S_{11}} F_1^A + {}$ $+ \dfrac{S_{23}}{S_{22}} F_2^A + F_3^A$
F_{12}	$-\dfrac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}$	$-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X_i^2} + \right.$ $\left. + \dfrac{1}{Y_i^2} - \dfrac{1}{Z_i^2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X_t X_c} + \right.$ $\left. + \dfrac{1}{Y_t Y_c} - \dfrac{1}{Z_t Z_c}\right)$	$-\dfrac{F_1 F_2}{2}$	**

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6
F_{13}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_t X_c Z_t Z_c}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_i^2}+\frac{1}{X_i^2}-\frac{1}{Y_i^2}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_t Z_c}+\frac{1}{X_t X_c}-\frac{1}{Y_t Y_c}\right)$	$-\frac{F_1 F_3}{2}$	**
F_{23}	$-\frac{1}{2\sqrt{Y_t Y_c Z_t Z_c}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y_i^2}+\frac{1}{Z_i^2}-\frac{1}{X_i^2}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y_t Y_c}+\frac{1}{Z_t Z_c}-\frac{1}{X_t X_c}\right)$	$-\frac{F_2 F_3}{2}$	**
F_{11}	$\frac{1}{X_t X_c}$	$\frac{1}{X_i^2}$	$\frac{1}{X_t X_c}$	$\frac{1}{X_t X_c}$	**
F_{22}	$\frac{1}{Y_t Y_c}$	$\frac{1}{Y_i^2}$	$\frac{1}{Y_t Y_c}$	$\frac{1}{Y_t Y_c}$	**
F_{33}	$\frac{1}{Z_t Z_c}$	$\frac{1}{Z_i^2}$	$\frac{1}{Z_t Z_c}$	$\frac{1}{Z_t Z_c}$	**
F_{44}	$\frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R^2}$
F_{55}	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$
F_{66}	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$

Примечание. В столбце с одной звездочкой обозначены значения X_i, Y_i, Z_i, равные X_c, Y_c, Z_c или X_t, Y_t, Z_t в зависимости от знака нормальных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 соответственно; двумя звездочками – соответствующие выражения из (20).

Отметим, что для трансверсально-изотропных материалов при использовании точных критериев максимальных напряжений или деформаций (в виде (14), (15) либо (18), (19) соответственно), в отличие от квадратичных критериев, необходимо проводить шесть опытов, а не пять, поскольку предельный сдвиг в плоскости изотропии не связан зависимостью типа (12) с остальными прочностными параметрами и в общем случае представляет собой независимую величину.

Как показывает анализ, все квадратичные критерии (4) имеют один общий недостаток: полное отсутствие напряжений не является оптимумом (глобальным минимумом) функции прочности, за исключением вырожденного случая, когда все линейные члены (F_i) равны нулю.

Модифицированный критерий Хилла (22), (23) лишен этого недостатка по определению, однако имеет другие серьезные недостатки:

1) функция прочности терпит разрывы при переходе через плоскости $\sigma_i = 0$, получаемая при этом предельная поверхность прочности оказывается “разорванной” вдоль этих плоскостей;

Таблица 2

Квадратичные полиномиальные критерии разрушения трансверсально-изотропного материала

F_i, F_{ij}	Обобщенный критерий Мизеса	Критерий Хоффмана	КМН (в полиномиальном виде)	КМД (в полиномиальном виде)
F_1	$\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c}$	$\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c}$	$\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c}$	$F_1^A+\left(\frac{S_{12}}{S_{22}}+\frac{S_{13}}{S_{33}}\right)F_2^A$
F_2	$\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c}$	$\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c}$	$\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c}$	$\frac{S_{12}}{S_{11}}F_1^A+\left(1+\frac{S_{23}}{S_{33}}\right)F_2^A$
F_{12}	$-\frac{1}{2\sqrt{X_tX_cY_tY_c}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_tX_c}\right)$	$-\frac{F_1F_2}{2}$	*
F_{23}	$-\frac{1}{2Y_tY_c}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{Y_tY_c}-\frac{1}{X_tX_c}\right)$	$-\frac{F_2^2}{2}$	*
F_{11}	$\frac{1}{X_tX_c}$	$\frac{1}{X_tX_c}$	$\frac{1}{X_tX_c}$	*
F_{22}	$\frac{1}{Y_tY_c}$	$\frac{1}{Y_tY_c}$	$\frac{1}{Y_tY_c}$	*
F_{66}	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$	$\frac{1}{T^2}$

* Соответствующие выражения из (21).

2) для транстропных (и тем более изотропных) материалов с плоскостью изотропии 23 сдвиговая прочность в ней, с одной стороны, из физических соображений должна быть вполне определенной постоянной величиной. С другой стороны, удовлетворяя требованию инвариантности (12) совместно с основополагающими для этого критерия соотношениями (23) будем получать **шесть** различных значений для сдвигового предела прочности F_{44}.

В [12, 32–34] отмечалось, что для реальных композитов, характеризующихся существенной анизотропией и различной прочностью при растяжении и сжатии, трудно, а часто невозможно подобрать параметры F_{ij} $(i \neq j)$ в (7) как константы, не зависящие от вида НДС, которые адекватно описывали бы прочность материала при разных условиях нагружения. Поэтому в [32–34] эти параметры предлагалось рассматривать не как константы, а как функции:

$$F_{ij} = F_{ij}(\operatorname{sign}\sigma_i, \operatorname{sign}\sigma_j). \qquad (27)$$

При принятии такого предположения для конкретизации F_{ij} в случае ортотропного материала кроме проведения 9 основных экспериментов потребуется еще 12, для транстропного – 6 основных и 4 дополнительных. Получаемая при этом поверхность разрушения сохранит непрерывность и односвязность, однако может стать кусочно-гладкой – иметь изломы при переходе через плоскости $\sigma_i = 0$. Можно показать, каким образом для ортотропной среды конкретизировать F_{ij} согласно (27) на основании дополнительных 12 простейших опытов, а именно: три на одноосное растяжение, три на одноосное сжатие и шесть на чистый сдвиг в некоторых определенных направлениях и плоскостях, не совпадающих с главными направлениями и плоскостями анизотропии. В случае транстропного материала имеем всего четыре дополнительных эксперимента: один на одноосное растяжение, один на одноосное сжатие и два на чистый сдвиг.

Предложенный в [32, 33] тензорно-полиномиальный критерий прочности четвертой степени (далее – критерий Ашкенази) описывает предельное состояние композиционного материала и учитывает влияние гидростатического давления (шаровой части тензора напряжений). В сокращенной тензорной записи он имеет следующий вид:

$$\alpha_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \left[\frac{(\sigma_{ik}\delta_{ik})^2 + \sigma_{ik}\sigma_{ik}}{2}\right]^{1/2} = 0, \qquad i, k, l, m = 1, 2, 3, \qquad (28)$$

где α_{iklm} – константы материала, являющиеся компонентами симметричного тензора четвертого ранга – тензора прочности; σ_{ik}, σ_{lm} – компоненты тензора напряжений; δ_{ik} – символ Кронекера.

Первое слагаемое $(\alpha_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm})$ является совместным инвариантом тензора напряжений и тензора прочности, второе слагаемое описывает зависимость прочности анизотропных тел от двух инвариантов тензоров напряжений. Инвариантное уравнение (28) можно рассматривать как обобщение “пластического потенциала” Мизеса–Хилла для анизотропных тел в случае если имеет место явная зависимость их предельного состояния от первого инварианта тензора напряжений (от гидростатического давления). В развернутом виде критерий (28) представляет собой полином четвертой степени относительно шести компонент действующих напряжений.

В наиболее общем случае трехмерного напряженного состояния, приняв приближенно коэффициент запаса k_b одинаковым для всех ориентаций, критерий Ашкенази в главных осях анизотропии x', φ', r для ортотропного тела принимает вид

$$\begin{cases} \Phi \le 1; \\ \Phi = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{\varphi'}^2 + \sigma_r^2 + \tau_{x'\varphi'}^2 + \tau_{\varphi' r}^2 + \tau_{rx'}^2 + \sigma_{x'}\sigma_{\varphi'} + \sigma_{\varphi'}\sigma_r + \sigma_r\sigma_{x'}}} \times \\ \quad \times (c\sigma_{x'}^2 + b\sigma_{\varphi'}^2 + d\sigma_r^2 + p\tau_{x'\varphi'}^2 + r\tau_{\varphi' r}^2 + s\tau_{rx'}^2 + \\ \quad + t\sigma_{x'}\sigma_{\varphi'} + f\sigma_{\varphi'}\sigma_r + m\sigma_r\sigma_{x'}); \\ c = \dfrac{1}{[\sigma_{\text{в}x'}]}; \quad b = \dfrac{1}{[\sigma_{\text{в}\varphi'}]}; \quad d = \dfrac{1}{[\sigma_{\text{в}r}]}; \\ p = \dfrac{1}{[\tau_{\text{в}x'\varphi'}]}; \quad r = \dfrac{1}{[\tau_{\text{в}\varphi' r}]}; \quad s = \dfrac{1}{[\tau_{\text{в}rx'}]}; \end{cases} \qquad (29а)$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{4}{[\sigma_{\text{в}x'\varphi'}^{(45)}]} - b - p - c; \quad f = \dfrac{4}{[\sigma_{\text{в}\varphi' r}^{(45)}]} - b - d - r; \\ m = \dfrac{4}{[\sigma_{\text{в}rx'}^{(45)}]} - d - s - c, \end{cases} \tag{29б}$$

где $[\sigma_{\text{в}i'}] = \sigma_{\text{в}i'}/k_b; [\tau_{\text{в}i'j'}] = \tau_{\text{в}i'j'}/k_b; [\sigma_{\text{в}i'j'}^{(45)}] = \sigma_{\text{в}i'j'}^{(45)}/k_b, i', j' = x', \varphi', r, i' \neq j'$ – допускаемые напряжения; $\sigma_{\text{в}i'}$ – предел прочности при растяжении или сжатии; $\tau_{\text{в}i'j'}$ – предел прочности при чистом сдвиге; $\sigma_{\text{в}i'j'}^{(45)}$ – предел прочности в диагональном направлении под углом $45°$ к осям симметрии в плоскости, которая соответствует нижним индексам; k_b – коэффициент запаса прочности.

Как видно из формул (29), использование критерия Ашкенази не позволяет учитывать разные предельные свойства материала при растяжении и сжатии, а также при сдвиге в различных направлениях.

Функция Φ определяет область, на границе которой напряжения равны допускаемым.

Предельная поверхность согласно критерию Ашкенази (29) в общем случае трехмерного напряженного состояния для ортотропного материала строится на основе результатов девяти независимых экспериментов (на растяжение или сжатие образцов, вырезанных вдоль осей симметрии (три), под углом $45°$ к осям симметрии в трех главных плоскостях (три), и на чистый сдвиг в трех главных плоскостях (три). При этом она тождественно удовлетворяет этим экспериментальным (реперным) точкам – функция Φ в них тождественна единице.

Критерий Ашкенази используется для расчета прочности динамически нагруженных композитов в странах СНГ [35–37], а также он хорошо известен и в зарубежной литературе [12 и др.].

Ранее [34] для конкретного ортотропного материала выполнен сравнительный анализ данных по критерию прочности Ашкенази и обобщенному критерию Мизеса. Установлено их плохое согласование; предложено уточнение обобщенного критерия Мизеса для композитов, равнопрочных при растяжении и сжатии; сформулированы правила, которые необходимо соблюдать при выборе критериев прочности композита.

Другие феноменологические критерии разрушения анизотропных материалов изложены в приведенных выше литературных источниках.

Отметим, что обзор, подобный представленному в сообщениях 1–3, выполнен ранее [38]. Здесь приведен существенно переработанный и дополненный материал. Рассмотрен также целый ряд новых работ, не вошедших в [38].

Выводы

1. Разработке феноменологических критериев прочности композиционных материалов посвящены многочисленные работы. Наибольшее применение в приложениях нашли справедливые для композиционных материалов с различными пределами прочности при растяжении и сжатии критерии макси-

мальных деформаций, максимальных напряжений, Цая–Ву (особенно в форме обобщенного критерия Мизеса), Цая–Хилла, Хоффмана. Критерии Цая–Ву являются самыми точными и общими, при этом обобщенный критерий Мизеса не требует проведения сложных опытов при конкретизации.

2. Критерий Ашкенази нашел применение в практике расчетов прочности динамически нагруженных композитов в странах СНГ. Однако он может использоваться только для композиционных материалов с одинаковыми значениями пределов прочности при растяжении и сжатии.

3. Анализ применимости различных феноменологических критериев прочности для моделирования разрушения многослойных композитов показал, что тот или иной критерий может быть наиболее точным в одних случаях и давать большие погрешности в других. Ни один из широко распространенных в приложениях критериев не позволяет описать разрушение всех рассмотренных в исследованиях конструктивных элементов при изученных условиях их деформирования. Следовательно, необходимо проверять применимость различных критериев для отдельных конструктивных элементов или класса конструкций в тех или иных условиях нагружения.

Резюме

Представлено аналіз відомих із літературних джерел феноменологічних критеріїв міцності анізотропних матеріалів, які найбільш широко використовуються в прикладних дослідженнях.

1. *Icardi U.*, *Locatto S.*, *and Longo A.* Assessment of recent theories for predicting failure of composite laminates // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**. – P. 76 – 86.
2. *Алфутов Н. А.*, *Зиновьев П. А.*, *Попов Б. Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
3. *Kollar L. P. and Springer G. S.* Mechanics of Composite Structures. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 480 p.
4. *Garnich M. R. and Akula V. M. K.* Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites // Appl. Mech. Rev. – 2009. – **62**. – P. 1 – 33.
5. *Thom H.* A review of the biaxial strength of fibre-reinforced plastics // Composites. – 1998. – **29A**. – P. 869 – 886.
6. *Yu Mao-hong*. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**. – P. 169 – 218.
7. *Failure* Criteria in Fibre-Reinforced-Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – 1255 p.
8. *Michopoulos J. G.* On the reducibility of failure theories for composite materials // Compos. Struct. – 2008. – **86**. – P. 165 – 176.
9. *Orifici A. C.*, *Herszberg I.*, *and Thomson R. S.* Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure // Ibid. – P. 194 – 210.

10. *Liu P. F. and Zheng J. Y.* Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review // Mater. Design. – 2010. – **31**. – P. 3825 – 3834.
11. *Гольденблат И. И.*, *Копнов В. А*. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 70 – 78.
12. *Ву Э. М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – С. 401 – 491.
13. *Малмейстер А. К.*, *Тамуж В. П.*, *Тетерс Г. А*. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
14. *Hart-Smith L. J.* Predictions of the original and truncated maximum-strain failure models for certain fibrous composite laminates // Compos. Sci. Technol. – 1998. – **58**. – P. 1151 – 1179.
15. *Tsai S. W. and Wu E. M.* A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. – 1971. – **5**. – P. 58 – 80.
16. *Reddy J. N. and Pandey A. K.* A first-ply failure analysis of composite laminates // Comput. Struct. – 1987. – **25**, No. 3. – P. 371 – 393.
17. *Wu E. M.* Optimal experimental measurement of anisotropic failure tensors // J. Compos. Mater. – 1972. – **6**. – P. 472 – 489.
18. *Цай С.*, *Хан Х.* Анализ разрушения композитов // Механика. Новое в зарубежной науке. Неупругие свойства композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – С. 104 – 139.
19. *Evans K. E. and Zhang W. C.* The determination of normal interaction term in the Tsai–Wu tensor polynomial strength criterion // Compos. Sci. Technol. – 1987. – **30**. – P. 251 – 262.
20. *Benzeggagh M. L.*, *Khellil K.*, *and Chotard T.* Experimental determination of Tsai failure tensorial terms F_{ij} for unidirectional composite materials // Ibid. – 1995. – **55**. – P. 145 – 156.
21. *Manne P. M. and Henriksen T. K.* Composites failure criteria for industrial applications // Proc. Eur. Conf. on Spacecraft Structures (Nov. 4–6, 1998, Braunschweig, Germany, ESA SP-428). – P. 371 – 376.
22. *Sleight D. W.* Progressive Failure Analysis Methodology for Laminated Composite Structures // NASA TP 209107, 1999.
23. *Van Paepegem W. and Degrieck J.* Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai–Wu static failure criterion // Compos. Sci. Technol. – 2003. – **63**. – P. 305 – 310.
24. *Tsai S. W. and Hahn H. T.* Introduction to Composite Materials. – Lancaster: Technomic Publishing Company, 1980.
25. *Liu K.-S. and Tsai S. W.* A progressive quadratic failure criterion for a laminate // Compos. Sci. Technol. – 1998. – **58**. – P. 1023 – 1032.
26. *Ромащенко В. А*. О поверхностях прочности второго порядка ортотропных материалов // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. “Конструкционная прочность материалов и ресурс оборудования АЭС” (Ресурс-2012). – Киев, 2012. – С. 176 – 178.

27. *Tsai S. W.* Strength Characteristics of Composite Materials // NASA CR-224, 1965.
28. *Hoffman O.* The brittle strength of orthotropic materials // J. Compos. Mater. – 1967. – **1**. – P. 200 – 206.
29. *Azzi V. D. and Tsai S. W.* Anisotropic strength of composites // Exp. Mech. – 1965. – **5**. – P. 283 – 288.
30. *Chamis C. C.* Failure Criteria for Filamentary Composites // NASA TN D5367, 1969.
31. *Композиционные* материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
32. *Ашкенази Е. К.* К вопросу о геометрии теории прочности // Механика полимеров. – 1967. – № 4. – С. 703 – 707.
33. *Ашкенази Е. К.*, *Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
34. *Ромащенко В. А.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропного материала // Пробл. прочности. – 2012. – № 4. – С. 42 – 57.
35. *Кривошеина М. Н.*, *Радченко А. В.*, *Кобенко С. В.* Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – **7**, № 1. – С. 95 – 102.
36. *Радченко А. В.* Моделирование поведения анизотропных материалов при ударе // Там же. – 1998. – **4**, № 4. – С. 51 – 61.
37. *Радченко А. В.*, *Кобенко С. В.* Зависимость разрушения анизотропного материала от ориентации упругих и прочностных свойств при ударе // Докл. РАН. – 2000. – **373**, № 4. – С. 479 – 482.
38. *Прочность* материалов и конструкции. Серия монографий / Под общ. ред. В. Т. Трощенко. – Т. 3. Прочность толстостенных оболочек вращения при импульсном нагружении / П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко. – Киев: Ин-т пробл. прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2010. – 320 с.

Поступила 07. 07. 2012