

## Нестационарные колебания конструкций из композиционных материалов

В. Г. Дубенец, Е. В. Савченко, А. С. Игнатенко

Черниговский государственный технологический университет, Чернигов, Украина

*Представлен эффективный метод анализа нестационарных колебаний конструкций с помощью конечноэлементного моделирования в пространстве преобразований Фурье.*

**Ключевые слова:** нестационарные колебания, демпфирование, интегральное преобразование Фурье, конечноэлементное моделирование.

**Введение.** Задачи уменьшения реакции тонкостенных конструкций на действие нестационарных нагрузок, в частности нагрузок импульсного типа, актуальны при проектировании конструкций авиационной и космической техники, различных морских и сухопутных объектов, при исследовании воздействия на конструкции взрывной волны или звукового удара, при анализе реакции сооружений на землетрясения и т.п. При импульсном нагружении тонкостенных конструкций возникают нестационарные колебания, амплитуда и длительность которых могут превышать допустимые пределы [1].

Одно из перспективных направлений уменьшения амплитуд колебаний – использование пассивного демпфирования, в частности применение материалов с высокими демпфирующими свойствами [2, 3]. Композиционные материалы являются перспективными для создания конструкций с заданными параметрами благодаря широкому варьированию свойств путем изменения концентрации и взаимного положения составляющих композита. При этом появляется возможность сочетания в композиционном материале свойств, которые для большинства однородных материалов несовместимы, например высокие прочностные и демпфирующие параметры.

Для построения и анализа математических моделей нестационарных колебаний конструкций с пассивным демпфированием ранее [2–6] предложены метод конечноэлементного моделирования в пространстве преобразований Фурье с использованием численного преобразования Фурье и комплексная методика анализа конструкций при нестационарных колебаниях.

В данной работе рассматриваются конструкции из материалов, армированных волокнами, для которых физические уравнения могут быть записаны в виде свертки [7]:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(1-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad \text{или} \quad \sigma_t = R * \dot{\varepsilon}_t, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – векторы напряжений и деформаций;  $R(t-\tau)$  – матрица функций релаксации;  $t$  – время;  $\dot{\varepsilon} \equiv d\varepsilon/dt$ .

К таким материалам можно отнести материалы на полимерной основе, однако, как показано в [8], при соответствующем выборе функций релаксации уравнения (1) можно применить для описания свойств и других материалов, у которых зависимость рассеяния энергии от амплитуды проявляется слабо.

Предполагается, что эффективные характеристики композитного материала определены одним из приемлемых способов, в частности, предложенным в работе [9].

Для получения уравнений динамики воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа в свертках [7]:

$$\int_V g^* \delta \varepsilon_t^* \sigma_t dV + \int_V \delta u_t^* \rho u_t dV - \int_S g^* \delta u_t^* p dS - \int_V \delta u_t^* f dV = 0, \quad (2)$$

где  $f = t \rho \dot{u}_{0t} + \rho u_{0t}$ ;  $g \equiv t$ ;  $\rho$  – матрица плотностей материала;  $\varepsilon_t$ ,  $\sigma_t$ ,  $u_t$ ,  $p$  – векторы соответственно деформаций, напряжений, перемещений и внешних сил;  $\dot{u}_{0t}$ ,  $u_{0t}$  – начальные условия для векторов скоростей и перемещений.

Напряжения и деформации определяются по следующим зависимостям:

$$\sigma_t = R^* \dot{\varepsilon}_t, \quad \varepsilon_t = Au, \quad (3)$$

где  $A$  – матричный дифференциальный оператор Коши [10].

После подстановки (3) в (2) получим уравнение динамики:

$$g^* \tilde{K}^* \dot{q}_t + M q_t - g^* F - M \dot{q}_{0t} - M q_{0t} = 0, \quad (4)$$

где

$$\tilde{K} = \int_V (AN)^T R(AN) dV, \quad M = \int_V N^T \rho N dV, \quad F = \int_S N^T p dS. \quad (5)$$

Применяя к (4) прямое преобразование Фурье, получаем уравнение относительно изображений перемещений  $q_\omega$ :

$$K(i\omega) q_\omega + (i\omega)^2 M q_\omega = F(i\omega) + M \dot{q}_{0t} + (i\omega) M q_{0t}, \quad (6)$$

где

$$K(i\omega) = \int_V (AN)^T C(i\omega) AN dV, \quad F(i\omega) = \mathcal{F}(F(t)), \quad q_\omega = \mathcal{F}(q_t); \quad (7)$$

$C(i\omega)$  – матрица комплексных модулей материала.

Таким образом, для получения уравнений в пространстве преобразований Фурье необходимо построить матрицу динамической жесткости

$$Z(i\omega) = K(i\omega) + (i\omega)^2 M \quad (8)$$

и найти прямое преобразование Фурье действующей нагрузки  $F(i\omega)$ .

Уравнение (6) сочетает в себе два фактора: непосредственно учитывает начальные условия, наложенные на перемещения и скорости узлов, и позволяет использовать комплексные модули, наиболее просто определяемые экспериментально. Матрица жесткости имеет ту же структуру, что и в статике, в связи с чем уравнения конечноэлементной модели целесообразно составлять непосредственно в пространстве преобразований Фурье. При этом компоненты матрицы комплексных модулей композиционного материала определяются по полученным экспериментально известным комплексным модулям материалов, составляющих композит. Включение начальных условий для перемещений открывает известные перспективы решения задач с заданными ненулевыми начальными условиями.

После решения уравнений (6) относительно  $q_\omega$

$$q_\omega = Z(i\omega)^{-1}(F(i\omega) + M\dot{q}_{0t} + i\omega Mq_{0t}) \quad (9)$$

значения перемещений во временном пространстве  $q_t$  целесообразно определять с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ)\*.

Сходимость метода обеспечивается при удовлетворении условий теоремы Шеннона–Котельникова [12].

Следует отметить, что применение метода конечноэлементного моделирования в пространстве преобразований Фурье приводит к необходимости многократного решения систем алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Уменьшения времени получения результата можно добиться путем использования соответствующих методов конденсации и распараллеливания решения системы уравнений [13].

#### Колебания пластины из композиционного вязкоупругого материала.

В качестве примера применения описанного выше метода рассматривались нестационарные колебания тонкой пластины из армированного волокнами композиционного материала, жестко защемленной по контуру, при действии импульсных нагрузок различной формы во времени, равномерно распределенных по ее поверхности. Анализировалась реакция пластины при разных углах и коэффициентах армирования и декрементах колебаний материала основы. Пластина моделировалась прямоугольными конечными элементами (рис. 1).

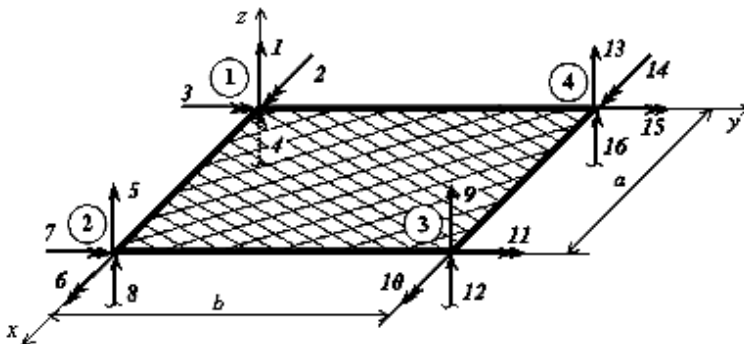


Рис. 1. Конечный элемент композитной пластины.

\* Впервые идея применения БПФ для решения задачи нестационарных колебаний предложена в [11]. Конечноэлементный синтез конструкций из вязкоупругих материалов в пространстве преобразований Фурье, по-видимому, впервые рассмотрен в [4, 5].

Для элемента, имеющего 16 обобщенных координат, получены матрицы жесткости  $K(i\omega)$  и масс  $M$ . Выбор элемента обусловлен двумя причинами: элемент является совместным и обеспечивает сходимость к точному результату при измельчении сетки, а поскольку рассматривается тонкая пластина, дополнительное его усложнение с целью учета деформаций сдвига и сжатия по толщине неоправданно [10]. При разбиении пластины размером  $1 \times 1 \times 0,01$  м на конечные элементы ограничивались 16-ю элементами, так как дальнейшее увеличение количества элементов приводило к одинаковым результатам. Принимались следующие характеристики материалов основы и армирующих волокон:  $G_1, K_1$  – соответственно комплексный модуль сдвига и модуль объемного деформирования для армирующего материала,  $G_1 = 5,2 \cdot 10^{10} + 1,6i \cdot 10^9$  Па,  $K_1 = 2,6 \cdot 10^{11} + 8i \cdot 10^9$  Па;  $G_2, K_2$  – соответственно комплексный модуль сдвига и модуль объемного деформирования для материала основы,  $G_2 = 4 \cdot 10^8 + 8i \cdot 10^7$  Па,  $K_2 = 2 \cdot 10^9 + 4i \cdot 10^8$  Па.

Физические уравнения для материалов, составляющих композит, описываются линейными интегральными уравнениями (1). Расчетная модель пластины строится с помощью метода конечных элементов в пространстве преобразований Фурье, что позволяет использовать в качестве физических параметров комплексные модули материалов, составляющих композит.

Эффективные характеристики композиционного материала рассчитываются с учетом структуры материала в соответствии с методикой, предложенной в [8]. Соответствующие уравнения в пространстве преобразований Фурье при плоском напряженном состоянии запишем в виде

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = C_{ij}(\omega, \varphi, \eta), \quad (10)$$

где компоненты  $C_{11}, \dots, C_{33}$  являются функциями частоты и параметров армирования.

Матрицы динамической жесткости конечного элемента и пластины в целом получены с использованием традиционной для статики методики конечно-элементного синтеза:

$$Z(i\omega) = K(i\omega) + (i\omega^2)M, \quad (11)$$

где  $K(i\omega)$  – матрица жесткости;  $M$  – матрица масс;  $\omega$  – частота.

Уравнение колебаний конечноэлементной модели пластины при нулевых начальных условиях имеет вид

$$Z(i\omega)q_\omega = F(i\omega), \quad (12)$$

где  $q_\omega$  – изображение вектора обобщенных (узловых) перемещений в пространстве преобразований Фурье;  $F(i\omega)$  – изображение Фурье действующей нагрузки.

Уравнения колебаний в пространстве преобразований Фурье являются линейными алгебраическими уравнениями с комплексными коэффициентами. После решения этой системы уравнений решения во временной области находили с помощью БПФ:

$$q_{\omega} = Z(i\omega)^{-1} F(i\omega), \quad q_t = (\text{БПФ})^{-1}(Z(i\omega)^{-1} F(i\omega)). \quad (13)$$

Зависимости перемещений срединной точки пластины от импульса, характерного для звукового удара [14] (рис. 2,а), для отдельных значений углов и коэффициентов армирования приведены на рис. 2,б-г и рис. 3. Как видно, перемещения точек пластины зависят от формы импульса, коэффициента и угла армирования. Наиболее существенной является зависимость от коэффициента армирования (рис. 3,б).

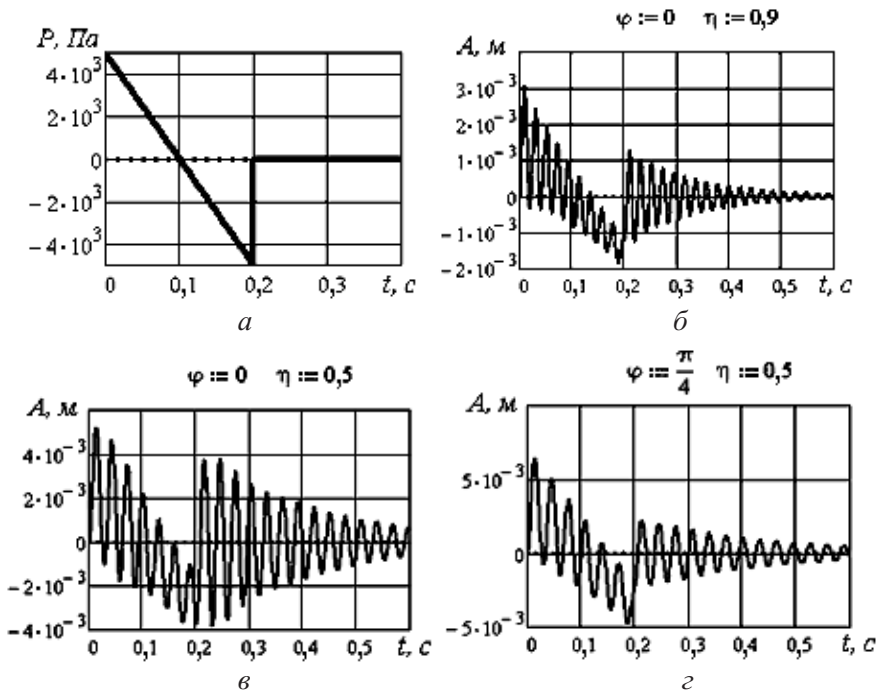


Рис. 2. Форма импульса (а) и перемещение срединной точки пластины для этого импульса при различных значениях угла  $\varphi$  и коэффициента армирования  $\eta$  (б-г).

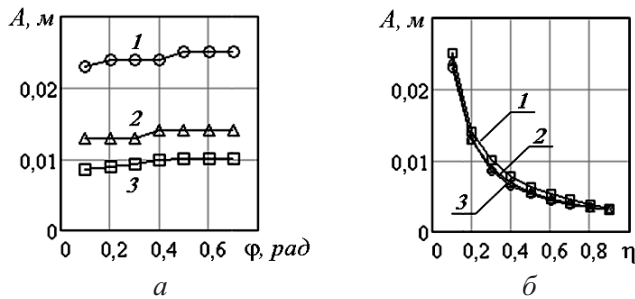


Рис. 3. Перемещение срединной точки пластины для импульса, приведенного на рис. 2,а, в зависимости от угла  $\varphi$  для различных значений  $\eta$  (а) и коэффициента армирования  $\eta$  для различных  $\varphi$  (б). (а: 1 -  $\eta = 0,1$ ; 2 -  $\eta = 0,2$ ; 3 -  $\eta = 0,3$ ; б: 1 -  $\varphi = 0,1$ ; 2 -  $\varphi = 0,2$ ; 3 -  $\varphi = 0,7$ .)

На рис. 4,б приведены зависимости максимальной амплитуды перемещения срединной точки пластины от длительности импульса синусоидальной формы (рис. 4,а).

Амплитуды перемещений максимальны при некотором значении длительности импульса. На величину и положение максимума перемещения кроме длительности оказывают влияние параметры армирования и геометрические параметры. На рис. 5 показаны осциллограммы колебаний срединной точки пластины для импульса (рис. 4,а,  $t = 0,03$  с) при двух значениях декремента колебаний материала основы. Как видно, увеличение декремента в два раза привело к повышению скорости затухания колебаний, однако практически не повлияло на величину максимума амплитуды перемещений.

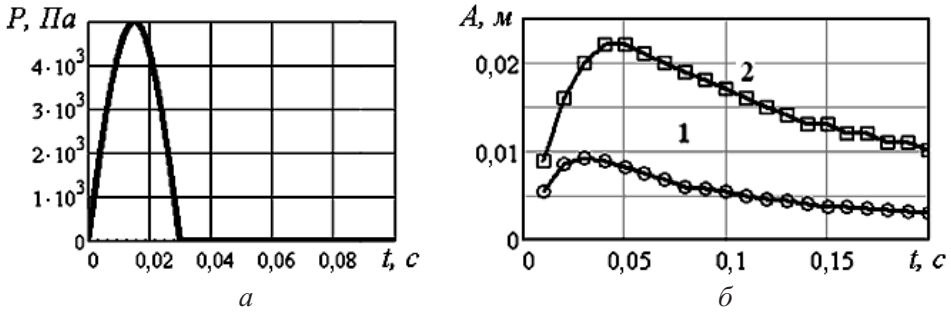


Рис. 4. Импульс синусоидальной формы (а) и зависимость максимального перемещения срединной точки пластины от длительности импульса при различных значениях угла  $\varphi$  и коэффициента армирования  $\eta$  (б): 1 –  $\varphi = \pi/4$ ,  $\eta = 0,5$ ; 2 –  $\varphi = \pi/4$ ,  $\eta = 0,2$ .

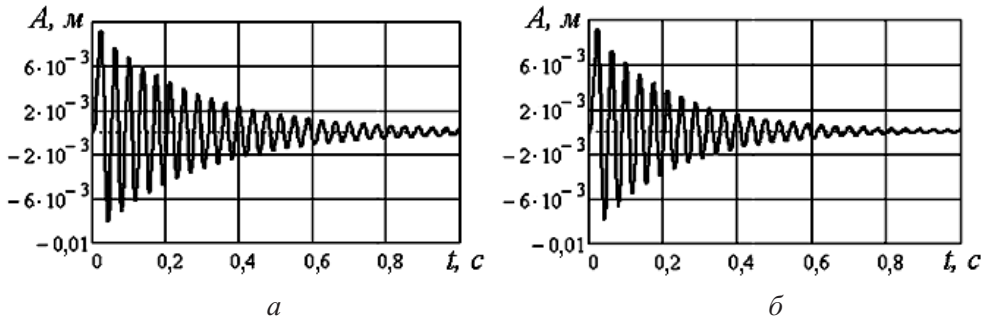


Рис. 5. Осциллограммы колебаний срединной точки пластины с углом  $\varphi = \pi/4$  и коэффициентом армирования  $\eta = 0,5$  при декрементах колебаний основы  $\Delta = 0,628$  (а) и  $1,256$  (б).

**Заключение.** Из представленных примеров видно, что метод конечно-элементного моделирования в пространстве преобразований Фурье является эффективным при анализе нестационарных колебаний конструкций из вязкоупругих материалов и материалов с амплитудно-независимым рассеянием энергии. Данный метод практически единственный, позволяющий корректно учитывать зависимость физических параметров материала от частоты при нестационарных колебаниях, что весьма существенно при возбуждении колебаний с широким спектром частот. Согласно альтернативному (классическому) методу расчета, базирующемуся непосредственно на интегральной зави-

симости Больцмана, необходимо определять параметры функций релаксации по данным о комплексных модулях материала, т.е. использовать обратное преобразование Фурье и последующее решение системы интегро-дифференциальных уравнений.

В рассмотренном методе используются экспериментальные данные о комплексных модулях материала, что позволяет получить разрешающие уравнения для конечноэлементной модели непосредственно в пространстве преобразований Фурье.

Необходимо, однако, отметить, что использование численного преобразования Фурье требует определенных ограничений, связанных с длительностью сигнала, возможным эффектом наложения и вероятностью потери высших гармоник спектра. Все эти условия можно удовлетворить, выбирая соответствующим образом параметры быстрого преобразования Фурье.

## Резюме

Представлено ефективний метод аналізу нестационарних коливань конструкцій за допомогою скінченноелементного моделювання у просторі зображень Фур'є.

1. *Луговой П. З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 5. – С. 44 – 72.
2. *Дубенец В. Г., Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 210 с.
3. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций: Монография. – Нежин: ООО “Вид-во “Аспект-Поліграф”, 2006. – 232 с.
4. *Исследование несущей способности и устойчивости составных (слоистых) вибродемпфированных балок: Отчет по НИР Черниг. фил. Киев. политехн. ин-та. – № ГР 01.82.7019386, инв. № 0283.0078715. – Чернигов, 1983. – 128 с.*
5. *Разработка методики расчета слоистых конструкций на импульсное воздействие: Отчет по НИР Черниг. фил. Киев. политехн. ин-та. – № ГР 01.85.0016746, инв. № 0286.0108079. – Чернигов, 1986. – 86 с.*
6. *Дубенец В. Г., Савченко О. В.* Розрахунки демпфірування конструкцій з частотно-залежним розсіянням енергії на дію навантаження довільного спектрального складу // Вісн. Черніг. держ. технол. ун-ту. – 2002. – № 13. – С. 10 – 15.
7. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М: Мир, 1974. – 338 с.
8. *Сорокин Е. С., Муравский Г. Н.* Об учете упругих несовершенств материалов методами теории наследственной упругости // Строит. механика и расчет сооружений. – 1975. – № 4. – С. 52 – 58.
9. *Дубенец В. Г.* Моделирование несовершенственно-упругих свойств композитных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 12. – С. 81 – 86.

10. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
11. *Шейпери Р.* Анализ деформирования и разрушения вязкоупругих композитов // Неупругие свойства композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – С. 180 – 220.
12. *Отнесс Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
13. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991. – 364 с.
14. *Либреску Л., Ноузьер А.* Реакция плоских слоистых композитных панелей на нагрузку звуковым ударом и взрывной волной // Аэрокосм. техника. – 1990. – № 8. – С. 157 – 165.

Поступила 10. 07. 2008