

## **Использование эволюционных алгоритмов в задачах оптимизации структуры композитных оболочек из вязкоупругих материалов**

**Е. В. Савченко**

Черниговский государственный технологический университет, Чернигов, Украина  
olenasavchenko@mail.ru

*Представлена комплексная методика многокритериальной оптимизации цилиндрических оболочек со слоями из армированных волокнами вязкоупругих композиционных материалов.*

**Ключевые слова:** многокритериальная оптимизация, эволюционные алгоритмы, множество и фронт Парето, цилиндрическая слоистая оболочка, армированные волокнами композиционные материалы с вязкоупругими свойствами.

**Введение.** Проектирование современных конструкций из композиционных материалов должно базироваться на оптимальном выборе структуры, материалов и геометрии, обеспечивающем необходимые их эксплуатационные характеристики. Наилучший выбор параметров проектирования предполагает выполнение, как правило, нескольких условий оптимальности. В связи с этим приобретает актуальность направление, предусматривающее оптимизацию по нескольким критериям, среди которых могут быть и противоположные по выбору проектных параметров – так называемые конкурирующие критерии.

Для задач динамики конструкций главными критериями являются масса, частотный спектр, амплитуды перемещений и напряжений, скорость затухания колебаний. Оптимальное проектирование композитных конструкций осложняется использованием значительного количества проектных параметров и алгоритмических способов вычисления, а также многоэкстремальностью оптимизируемых критериев. Указанные обстоятельства не позволяют эффективно использовать классические градиентные методы, поэтому необходимо применять другие, например, эволюционные методы оптимизации, в частности генетические алгоритмы (ГА). Они не имеют ограничений по количеству параметров оптимизации, не используют производные и позволяют с большой долей вероятности находить глобальные экстремумы оптимизируемых функций.

Применение эволюционных алгоритмов, в частности генетического, к задаче многокритериальной оптимизации рассматривалось многими авторами [1–3].

В настоящей работе представлены методика оптимального проектирования многослойных оболочек при наличии нескольких критериев оптимизации с использованием ГА [4] и метода моделирования динамики вязкоупругих конструкций в пространстве преобразований Фурье [5, 6], а также несколько примеров расчета.

**Математическая модель слоистых оболочек из вязкоупругих материалов, армированных волокнами.** Построение математической модели показано на примере цилиндрической многослойной оболочки с большим количеством слоев, армированных волокнами более прочного и жесткого материала (рис. 1). Материалы основы и армирующих волокон являются вязкоупругими и могут быть анизотропными (монотропными). Эффективные параметры композитных материалов слоев определяются с использованием ранее [6, 7] разработанной методики и зависят от коэффициентов и углов армирования, а также физико-механических параметров материалов, составляющих композит.

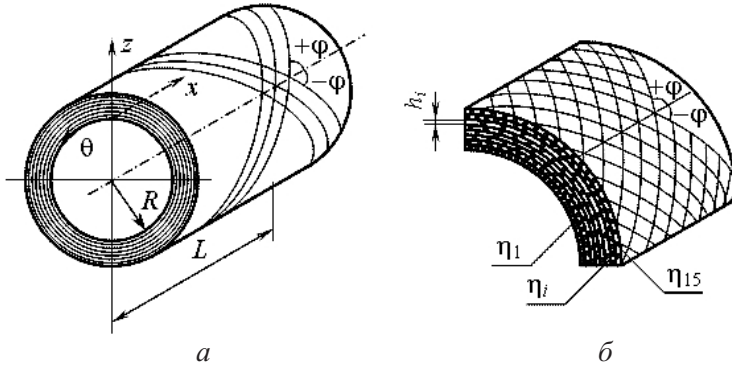


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка (а) и структура материала (б):  $\eta_i$  – коэффициенты армирования;  $\varphi$  – углы армирования;  $h_i$  – толщины слоев.

Для анизотропных вязкоупругих материалов слоев определяющие физические зависимости между напряжениями и деформациями записываются в виде свертки Больцмана–Вольтерра [8]:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad \text{или} \quad \sigma = G * \varepsilon, \quad (1)$$

где  $G(t - \tau)$  – матрица функций релаксации;  $\sigma, \varepsilon$  – векторы напряжений и деформаций соответственно;  $t$  – время.

Модель многослойной оболочки построена с использованием аппроксимации перемещений по ее толщине с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа. Перемещения по двум другим координатам аппроксимируются рядами Фурье с координатными функциями, соответствующими условиям закрепления на торцах оболочки.

Синтез многослойной оболочки осуществляется путем объединения расчетных слоев в многослойный пакет в предположении отсутствия перемещений на границах контакта.

Для получения матриц жесткости и масс расчетных слоев используются вариационные уравнения Лагранжа в свертках:

$$\int_V g^* \delta \varepsilon_t^* \sigma_t dV + \int_V \delta u_t^* \rho u_t dV - \int_S g^* \delta u_t^* p dS - \int_V \delta u_t^* f dV = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_t$ ,  $\sigma_t$ ,  $p$ ,  $u_t$  – векторы деформаций, напряжений, внешних сил и перемещений соответственно;  $\rho$  – матрица плотности материала;  $g \equiv t$ ;  $f = t\rho\dot{u}_{0t} + \rho u_{0t}$ ;  $\dot{u}_{0t}$ ,  $u_{0t}$  – начальные условия для векторов скорости и перемещений,  $\dot{u}_{0t} = du_{0t}/dt$ .

Примем зависимость между деформациями и перемещениями в виде

$$\varepsilon = Au \tag{3}$$

и условия аппроксимации перемещений по координатам  $x$ ,  $\theta$ ,  $z$ :

$$u = N(x, \theta, z)q_t, \tag{4}$$

где  $N(x, \theta, z)$  – матрица функций аппроксимации, размерность которой определяется  $6 \times n$  количеством членов ряда  $n$ , аппроксимирующего перемещения по координатам  $\theta$  и  $x$ , и количеством обобщенных перемещений узловых точек на поверхностях слоя;  $q_t$  – вектор неизвестных коэффициентов аппроксимации;  $A$  – матрица дифференциальных операторов, которая для цилиндрической оболочки имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{R+z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{R+z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$R$  – радиус внутренней поверхности слоя оболочки.

После подстановки (1), (3), (4) в (2) получим уравнение колебаний слоя в свертках:

$$g * \tilde{K} * \dot{q}_t + Mq_t - g * F - tM\dot{q}_{0t} - Mq_{0t} = 0, \tag{6}$$

где

$$\tilde{K} = \int_V (AN)^T G(AN)dV; \quad M = \int_V N^T \rho N dV; \quad F = \int_S N^T p dS. \tag{7}$$

При нулевых начальных условиях уравнение (6) запишем так:

$$g * \tilde{K} * \dot{q}_t + Mq_t - g * F = 0. \tag{8}$$

Выполним прямое преобразование Фурье уравнения (8) и получим уравнение относительно изображений перемещений в пространстве преобразований Фурье:

$$(K(i\omega) + (i\omega)^2 M)q = F(i\omega); \tag{9}$$

$$K(i\omega) = \int_V (AN)^T \tilde{C}(i\omega)ANdV; \quad M = \int_V N^T \rho N dV;$$

$$F(i\omega) = \int_S N^T \tilde{P}(i\omega) dS, \quad (10)$$

где  $K(i\omega)$ ,  $M$ ,  $F(i\omega)$  – матрицы жесткости, масс и внешней нагрузки соответственно;  $\tilde{P}(i\omega)$  – преобразование Фурье внешней нагрузки  $p(t)$ ;  $\tilde{C}(i\omega) = C'(i\omega) + iC''(i\omega)$  – матрица комплексных модулей, зависящих от частоты колебаний  $\omega$ .

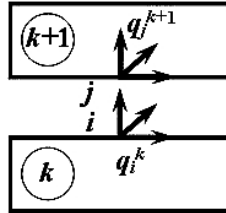


Рис. 2. Условия сопряжения слоев при линейной аппроксимации перемещений по толщине слоя.

Для получения уравнения колебаний многослойной оболочки необходимо объединить слои в соответствии с условиями сопряжения, которые при принятой линейной аппроксимации (рис. 2) имеют вид

$$q_i^k = (q_{xi}^k \quad q_{yi}^k \quad q_{zi}^k), \quad q_j^{k+1} = (q_{xj}^{k+1} \quad q_{yj}^{k+1} \quad q_{zj}^{k+1}). \quad (11)$$

Уравнение (9) может использоваться при соответствующем выборе  $A$  и  $N$  для анализа динамики оболочечных конструкций при произвольных нагрузках [5].

При свободных колебаниях представляют интерес частоты колебаний  $\omega$  и параметры, характеризующие затухание колебаний, в частности декремент колебаний или скорость затухания колебаний.

Метод конечноэлементного моделирования в пространстве преобразований Фурье, предложенный в работе [5], эффективно используется в [4, 6].

**Постановка задачи многокритериальной оптимизации.** Многокритериальная, или векторная оптимизация состоит в определении множества векторов проектных параметров  $x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \in X$ , которые удовлетворяют принятым ограничениям  $g(x) = (g_1(x) \quad g_2(x) \quad \dots \quad g_n(x)) \geq 0$  и оптимизируют вектор-функцию целевых функций  $y = f(x) = (f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_n(x)) \in Y$ , где  $X$  – в данном случае пространство решений;  $Y$  – критериальное пространство.

Допустимое множество решений  $D$  определяется как множество векторов решений  $x$ , удовлетворяющих ограничениям  $g(x) \geq 0$ :

$$D = \{x \in X | g(x) \geq 0\}.$$

Допустимая область в критериальном пространстве будет

$$Y_D = f(D).$$

В большинстве случаев критерии оптимизации  $f_i(x)$  являются конкурирующими, т.е. улучшение одного приводит к ухудшению других. Таким образом, определение оптимальных решений возможно только на основе принципа Парето, в соответствии с которым решение  $x_k \in D$  будет неулучшаемым, если в допустимом множестве решений не существует такого, которое по всем критериям не хуже и хотя бы по одному строго лучше, чем  $x_k$ . Множество таких точек-решений называют множеством Парето, а их образ в критериальном пространстве – фронтом Парето. Очевидно, оптимальное решение необходимо выбирать из множества Парето. Каждое решение, принадлежащее этому множеству, является неулучшаемым (недоминируемым) в том смысле, что, изменяя полученные значения параметров оптимизации, нельзя улучшить ни один из критериев, не ухудшая остальные. Таким образом, первый этап решения задачи многокритериальной оптимизации – определение множества и фронта Парето.

Для получения единственного оптимального решения необходимо использовать условия, согласно которым среди критериев оптимизации выбираются более-менее предпочтительные. Эта функция выполняется проектировщиком.

**Алгоритм решения задачи.** Известно несколько наиболее распространенных генетических алгоритмов векторной оптимизации, отличающихся один от другого способами реализации основных этапов генетического алгоритма и способами определения множества неулучшаемых решений. В данной работе используется вариант ГА, который базируется на основанной на Парето-доминировании процедуре ранжирования решений, где ранг каждого решения (индивида) определяется числом доминирующих (улучшающих) его индивидов.

Последовательность работы алгоритма.

1. Начальное множество точек выбирается на основе равномерной последовательности Холтона [9].

2. Всем точкам присваивается нулевое значение целевой функции, после чего каждая пара точек популяции проверяется, какая из них доминирует над другой. Для доминируемой точки при каждой проверке значение целевой функции увеличивается на единицу.

3. Среди точек популяции выбираются пары для скрещивания: популяция сортируется по увеличению целевой функции, после чего последовательно выбираются случайные точки, причем вероятность выбрать точку  $p_i$ , где  $i$  – ее номер в отсортированном множестве, пропорциональна  $N + 1 - i$  ( $N$  – количество точек в популяции). Каждые две последовательно выбранные точки формируют пару для скрещивания.

4. Для выбранных пар точек проводится скрещивание, в результате чего получаем новую точку, каждая координата которой определяется по формуле

$$z_i = x_i + c_i(y_i - x_i),$$

где  $x_i$ ,  $y_i$  – соответствующие координаты родительских точек  $X$  и  $Y$ ;  $c_i = -1 + 3r_i^2$ , если  $X$  имеет меньшее значение целевой функции,  $c_i = -1 + 3\sqrt{r_i}$ , если  $Y$  имеет меньшее значение целевой функции;  $r_i$  – величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0; 1]$ .

В случае выхода некоторой координаты точки за границы допустимой области ее значение приравнивается к граничному значению этой координаты.

5. Для некоторых точек проводится мутация – добавление случайного вектора нормально распределенных величин.

6. Ко множеству новых точек, полученному с помощью скрещивания и мутации, добавляются лучшие (элитные) точки популяции (с наименьшим значением целевой функции). Все эти точки формируют новую популяцию, для которой повторяются п. 2–6.

В результате выполнения программы определяются множество недоминируемых решений, аппроксимирующее множество Парето решаемой задачи, и соответствующий недоминируемый фронт.

Для получения единственного решения далее необходимо использовать дополнительные предположения об относительной важности критериев [3].

**Примеры решения задач.** Рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка со слоями из армированных волокнами вязкоупругих материалов. Каждый слой представляется квазиоднородным с эффективными характеристиками, зависящими от коэффициента и угла армирования, а также от комплексных модулей материалов, составляющих композит. Количество слоев в оболочке  $n = 15$ .

Характеристики материала основы и армирующих волокон соответственно таковы: модуль сдвига  $G_M = 0,8 \cdot 10^9 + 0,8 \cdot 10^8 i$  Па,  $G_B = 0,8 \cdot 10^{11} + 0,8 \cdot 10^8 i$  Па; модуль объемной деформации  $K_M = 4 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^8 i$  Па,  $K_B = 4 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^8 i$  Па; плотность  $\rho_M = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_B = 5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Длина оболочки  $L = 4$  м, радиус внутренней поверхности  $R = 0,5$  м, толщины слоев  $h_i$  изменяются в заданных границах, в данном случае  $h_i = (0,0002 \dots 0,0008)$  м,  $i = 1 \dots 15$ .

Вектор проектных параметров примем в виде

$$x = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{15}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{15}, h_1, h_2, \dots, h_{15}),$$

где  $\eta_i, \varphi_i$  – соответственно коэффициенты армирования и углы армирования. Граничные условия запишем так:

$$0 \leq \eta_i \leq 1; \quad 0 \leq \varphi_i \leq \pi/2; \quad h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}.$$

Формы колебаний:

$$u = \sum_m \sum_n q_{mn}^u \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta,$$

$$v = \sum_m \sum_n q_{mn}^v \cos \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta,$$

$$w = \sum_m \sum_n q_{mn}^w \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta.$$

Во всех задачах принимали  $m = 1, n = 1$ .

Ниже представлены результаты оптимизации цилиндрической оболочки по нескольким векторным критериям.

1. **Оболочка с максимальным декрементом колебаний и минимальной массой.** Критерий оптимальности принимали в виде

$$\Phi(x) = [-dekr1, mass] \rightarrow \min.$$

Результаты решения задачи оптимизации приведены на рис. 3 в виде множества оптимальных решений (фронт Парето). Любая точка множества Парето является оптимальной (неулучшаемой) – ее невозможно улучшить по одному из критериев оптимальности, не ухудшая по остальным критериям. Для двухкритериальной задачи фронт Парето представляет собой точки, лежащие на некоторой кривой.

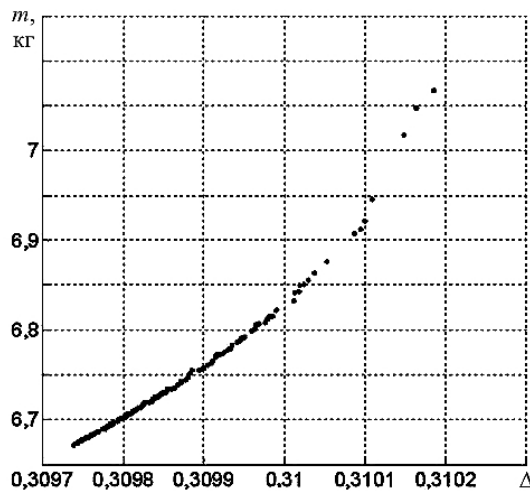


Рис. 3. Фронт Парето при оптимизации 15-слойной цилиндрической оболочки по критериям максимального декремента  $\Delta$  и минимальной массы  $m$ .

2. **Оболочка с максимальным произведением декремента колебаний на частоту и минимальной массой.** Декремент колебаний не является единственным параметром, определяющим затухание колебаний. Во многих случаях более существенной есть скорость затухания колебаний, которую можно определить произведением декремент–частота для данной формы. Учет частоты косвенным образом влияет на жесткость оболочки и не допускает большого снижения коэффициента армирования.

В этой задаче критерий оптимизации принимали в виде

$$\Phi(x) = [-dekr1 * oml, mass] \rightarrow \min.$$

Фронт Парето для оптимальной оболочки показан на рис. 4.

3. **Оболочка с максимальными декрементом, первой частотой и минимальной массой.** Критерий оптимизации принимали в виде

$$\Phi(x) = [-dekr1, - oml, mass] \rightarrow \min.$$

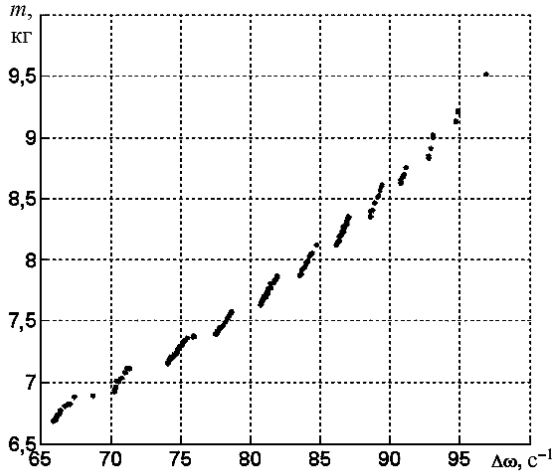


Рис. 4. Фронт Парето при оптимизации 15-слойной цилиндрической оболочки по критериям максимального произведения декремента на частоту  $\Delta\omega$  и минимальной массы  $m$ .

Результаты оптимизации представлены на рис. 5. Для трехкритериальной задачи точки фронта Парето лежат на некоторой поверхности.

4. *Оболочка с минимальной первой частотой и максимальным расстоянием между первой и последующими частотами.* Критерий оптимизации принимали в виде

$$\Phi(x) = [om1, -om2, -om3] \rightarrow \min.$$

Массив оптимальных решений, соответствующих фронту Парето, представлен на рис. 6.

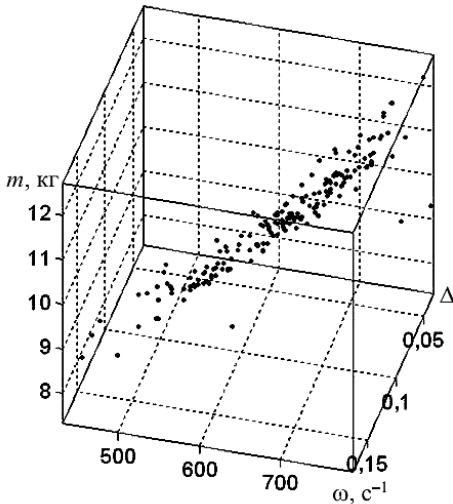


Рис. 5

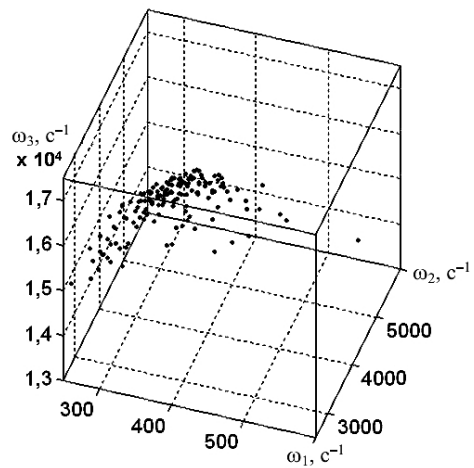


Рис. 6

Рис. 5. Фронт Парето при оптимизации 15-слойной цилиндрической оболочки по критериям максимальных декремента  $\Delta$ , частоты  $\omega$  и минимальной массы  $m$ .

Рис. 6. Фронт Парето при оптимизации 15-слойной цилиндрической оболочки по критериям минимальной первой  $\omega_1$  и максимальных второй  $\omega_2$  и третьей  $\omega_3$  частот.



## Выводы

1. Рассмотрена комплексная методика многокритериальной оптимизации оболочек из вязкоупругих композиционных материалов, базирующаяся на методе определения эффективных свойств армированного материала, методе конечноэлементного моделирования слоистых оболочек в пространстве преобразований Фурье и эволюционных методах оптимизации.

2. Методика позволяет определять оптимальные параметры композитных конструкций, работающих при динамических нагрузках, при наличии большого числа параметров оптимизации, нескольких конкурирующих критериях оптимизации и алгоритмически определяемых функциях оптимизации.

## Резюме

Представлено комплексну методику багатокритеріальної оптимізації циліндричних оболонок із шарами з армованих волокнами в'язкопружних композиційних матеріалів.

1. *Liu G. P., Yang J. B., and Whidborne J. F.* Multiobjective Optimisation and Control. – Hertfordshire: Research Studies Press Ltd, 2003. – 320 p.
2. *Haupt R. L. and Haupt S. E.* Practical Genetic Algorithms. – New York: John Wiley & Sons, 1998. – 261 p.
3. *Лотов А. В., Поспелова И. И.* Многокритериальные задачи принятия решений. – М.: МГУ, 2008. – 197 с.
4. *Савченко О. В., Савченко І. О.* Метод пошуку глобального екстремуму в задачах оптимізації конструкцій з композиційних матеріалів // Вісн. Чернігів. держ. технол. ун-ту. – 2009. – № 36. – С. 72 – 81.
5. *Дубенец В. Г., Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 210 с.
6. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Аспект-Поліграф, 2006. – 232 с.
7. *Дубенец В. Г.* Моделирование несовершенного-упругих свойств композитных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 12. – С. 81 – 86.
8. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
9. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 110 с.

Поступила 06. 12. 2011