

## **Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщение 2. Теоретические методы**

**П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Приведен анализ известных из литературных источников методов и результатов теоретического (аналитическое и численное) исследования напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении.*

**Ключевые слова:** многослойные толстостенные анизотропные цилиндры, динамическое нагружение, напряженно-деформированное состояние, прочность, численные и аналитические методы.

Ранее [1] проведен анализ известных из литературных источников методов и результатов экспериментального изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при внутреннем динамическом нагружении.

В данном сообщении рассматриваются теоретические методы и результаты исследования НДС и прочности такого рода конструкций с использованием уравнений динамической теории упругости анизотропного тела.

В работах [2–47] разработаны методы решения краевых задач теории упругости анизотропного тела для многослойных толстостенных цилиндров конечной длины в статической постановке, приведен анализ двух- и трехмерных задач.

Исследованию динамики анизотропных цилиндров, в том числе и толстостенных, с использованием той или иной теории оболочек посвящены работы [48–63 и др.].

Заметим, что трехмерные уравнения динамической теории упругости анизотропного тела применялись при решении рассматриваемых в данной работе задач многими авторами.

С использованием таких уравнений исследуются свободные колебания многослойных композитных цилиндрических оболочек [36, 41, 46, 64].

В монографиях [41, 46] численно-аналитическими методами на основе общих уравнений трехмерной теории упругости решены, в частности, некоторые динамические трехмерные краевые задачи для анизотропных толстостенных составных оболочек вращения конечной длины, в том числе цилиндров, конусов и сфер с вырезами, при неосесимметричной нагрузке. Рассматриваются изотропные, трансотропные и ортотропные тела вращения, главные оси анизотропии при этом всегда совпадают с соответствующими координатными линиями – вдоль толщины, широты и меридиана оболочки. Случаи спирального армирования таким образом исключаются. Исследуются

стационарные динамические процессы, т.е. определяются собственные частоты и формы свободных колебаний цилиндрически ортотропного цилиндра. При прямой (дифференциальной) постановке краевой задачи используются разложения в ряды Фурье по широтной координате с последующим применением метода конечных разностей (МКР) вдоль толщины оболочки. Предлагается также полуаналитический метод конечных элементов (МКЭ), согласно которому исходная краевая задача записывается в эквивалентной вариационной (интегральной) постановке. Приводятся результаты расчетов нескольких первых собственных частот и форм осесимметричных колебаний цилиндрически ортотропного цилиндра конечной длины.

В работах [36, 41, 46] решаются некоторые трехмерные задачи стационарной волновой динамики (бегущая вдоль направляющей волна) для цилиндров с некруговым поперечным сечением.

В [18] предлагается численно-аналитический подход к исследованию собственных колебаний полых цилиндрически ортотропных цилиндров конечной длины при различных условиях на торцах. Исследуется влияние граничных условий, механических и геометрических параметров цилиндра на распределение динамических характеристик. Для первой собственной частоты колебаний проводится сравнение полученных результатов с данными расчетов по теории типа Тимошенко.

В монографии [64] рассматриваются свободные, затухающие и вынужденные колебания конструктивно анизотропных пластин и оболочек вращения. Численно-аналитическим методом исследуются частоты и формы собственных колебаний неоднородных толстостенных цилиндров конечной длины со спирально ортотропными слоями.

Аналитические методы решения краевых задач динамической теории упругости для анизотропных оболочек используются в работах [65, 66 и др.].

В [65] получено замкнутое решение осесимметричной динамической задачи для полого цилиндрически ортотропного цилиндра, торцы которого закреплены в продольном и свободны в радиальном направлении. На криволинейных поверхностях цилиндра могут быть заданы произвольные условия. В основу исследования положены соотношения динамической теории упругости анизотропного тела. Применяется структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований в матричной форме. Получено точное решение задачи при произвольных динамических воздействиях. В качестве примера исследуется спектр свободных осесимметричных колебаний помещенного в жесткую обойму сплошного цилиндра, выполненного из стеклопластика, с различными вариантами окружного и осевого армирования.

В монографии [66] в виде ряда по системе экспоненциальных частных решений получено решение задачи о колебаниях кругового цилиндра из прямолинейно ортотропного материала при равномерном нагружении его боковой поверхности распределенным пульсирующим давлением.

Применению МКР к решению краевых задач динамической теории упругости и разрушения анизотропных материалов для оболочек вращения посвящены работы [67–83]. Согласно данным [84], к нему можно отнести метод Уилкинса [85].

Метод Уилкинса является одним из первых разработанных методов в гидромеханике и до настоящего времени широко используется [85]. Первоначально он предназначался для расчета упругопластического течения изотропных сред. В начале 80-х годов прошлого века в работах [70, 72] метод Уилкинса был модифицирован для решения осесимметричных двумерных задач на случай вязкоупругих и цилиндрически ортотропных упругопластических сред.

В данное время алгоритм Уилкинса применяется при решении осесимметричных динамических задач для изотропных и анизотропных тел вращения в известном программном комплексе LS-DYNA-3D, который является одним из ведущих в области моделирования нестационарного деформирования. Положительная особенность метода заключается в использовании явной схемы интегрирования по времени, что позволяет адекватно и экономно моделировать задачи динамического деформирования, при решении которых необходимо отслеживать локальные быстро протекающие процессы. Еще одна позитивная особенность алгоритма состоит в том, что численные аппроксимации функций фактически являются конечноразностными. Такие аппроксимации при явной схеме интегрирования по времени позволяют отказаться от следующих традиционно используемых в конечноэлементном подходе понятий: матрицы жесткости, масс; функции формы и др. Это значительно упрощает численную реализацию рассматриваемого алгоритма и существенно экономит ресурсы вычислительной техники [84, 85]. До недавнего времени отмеченный метод применялся для расчета упругопластических течений при больших перемещениях и деформациях и малых временах протекания процесса деформирования.

В работах [74–79, 81–83] было показано, что алгоритм Уилкинса при решении упругих задач для анизотропных и изотропных тел вращения устойчив и обладает достаточно высокой точностью также при малых деформациях и больших (порядка  $10^{-2}$  с) временах протекания процесса деформирования.

В [67] исследуется влияние направления армирования в цилиндрически ортотропном боропластике на распространение трехмерных волн напряжений в толстостенном полом цилиндра, нагруженном по внешней боковой поверхности импульсом давления, который ограничен в пространстве и времени. Задача решалась численно-аналитически: первоначально все функции раскладывались в тригонометрические ряды Фурье по угловой координате, после чего применялись двумерные разностные методы – перемещений либо алгоритм Уилкинса.

Анализ задачи с помощью двух существенно отличающихся при реализации на ЭВМ численных методов и совпадение полученных результатов могут служить доказательством применимости алгоритмов к рассматриваемым задачам и достоверности этих данных. Результаты, полученные численными методами, практически совпадают в расчетном диапазоне изменения координат и времени. Расхождение между максимальными напряжениями не превышает 5%. Расчеты для армирования в радиальном и осевом направлении проводили по двум методам. Установлено, что в случае армирования в радиальном направлении под площадкой приложения локальной нагрузки

вблизи внутренней поверхности цилиндра возникают зоны растягивающих осевых и радиальных напряжений, которые действуют одновременно и могут вызвать разрушение конструкции. При армировании в осевом направлении растягивающие радиальные напряжения практически отсутствуют, а уровень растягивающих осевых напряжений достигает  $3/4$  величины импульса давления, поэтому такое армирование заметно увеличивает прочность.

Разработанная методика и полученные результаты позволяют изучать процессы распространения трехмерных волн напряжений в телах вращения, выполненных из цилиндрически ортотропных материалов и нагруженных локальным импульсом давления. Алгоритмы и комплексы программ на ЭВМ могут использоваться при исследованиях динамической прочности цилиндрически ортотропных составных тел вращения. Полученные результаты обобщены и дополнены в монографии [68].

Работа [69] посвящена численному анализу влияния неосесимметричности внешнего импульса на максимальные, наиболее опасные с позиции обеспечения прочности, напряжения в телах вращения. При этом для неосесимметричных задач используется метод Бубнова–Галеркина в комбинации с двухмерным алгоритмом Уилкинса, в случае осесимметричных – алгоритм Уилкинса. Объект исследования представляет собой многослойную оболочку вращения в зоне сопряжения цилиндрической части с конической. Слои оболочки могут быть выполнены из различных материалов, в том числе и композитных.

С целью оценки влияния неосесимметричности импульса на НДС подобных конструкций проведен ряд расчетов. Выполнено сравнение численных результатов, полученных по двум различным методикам: расчет на неосесимметричную нагрузку на основе методики решения трехмерных нестационарных задач [68, 70] и на осесимметричную нагрузку по двухмерному алгоритму Уилкинса, модифицированному на случай цилиндрически ортотропных сред. При этом амплитуда и длительность нагрузки в обоих случаях были одинаковыми. Произведен расчет конструкции, состоящей из разномодульных слоев (внутренний – стальной, внешний – боропластик), при армировании верхнего слоя в радиальном и осевом направлении. Максимальные величины растягивающих, сжимающих и касательных напряжений оказались близкими. При этом напряжения, возникающие вследствие неосесимметричного импульса, не превышают таковых при осесимметричной нагрузке. Сделан вывод о том, что НДС в начальные моменты времени (порядка нескольких отражений волн от граничных поверхностей) в многослойных телах вращения при неосесимметричном кратковременном импульсном воздействии можно оценивать исходя из расчета на осесимметричный импульс. При этом ошибка в величинах максимальных напряжений является незначительной и идет в запас прочности.

Работа [70] посвящена численному исследованию формирования и распространения двух- и трехмерных волн напряжений в многослойных цилиндрически ортотропных телах вращения, выполненных из композитных материалов, при импульсном нагружении по внешней боковой поверхности. Излагается методика решения трехмерных динамических задач, последовательно использующая процедуру Бубнова–Галеркина и конечноразностный алгоритм

Уилкинса. Приводятся результаты исследования влияния вязкости, анизотропии, физической и геометрической нелинейности на НДС как вблизи, так и вдали от зон резкого изменения геометрии конструкции. Значительное внимание уделяется анализу точности полученных результатов.

В [71] исследуется влияние вязкости и цилиндрической ортотропии материала слоев цилиндра конечной длины на распространение волны, вызванной действием осесимметричного наружного импульса давления. Разрешающая система уравнений записывается в перемещениях и интегрируется МКР. Проанализировано влияние направления волокон ортотропного слоя на распределение напряжений, вязкостных свойств – на затухание волн, характера нагружения – на волновую картину в многослойном цилиндре. Показано, что использование внешних слоев из вязкоупругих материалов позволяет существенно снизить уровень напряжений во внутренних слоях, причем этот эффект растет с уменьшением длительности нагрузки. В случае кратковременных импульсов, которые не могут повлиять на динамику всей конструкции, направление волокон вдоль линии действия нагрузки обуславливает увеличение прочности.

В работе [72] с помощью алгоритма Уилкинса численно изучается влияние геометрической и физической нелинейности, анизотропии и вязкости материалов слоев на нестационарное НДС оболочек вращения в окрестности угловых точек. Рассматривается оболочка вращения, состоящая из цилиндрической и конической частей с угловыми точками. Влияние геометрической и физической нелинейности на волновую картину исследуется на примере однослойного изотропного (стального) полого тела вращения. Влияние анизотропии и вязкости изучается на примере двухслойной конструкции. Полагали, что внешний слой имеет характеристики цилиндрически ортотропного боропластика, а внутренний остается стальным. Армирование верхнего слоя в радиальном и осевом направлении показало, что во втором случае обеспечивается меньший уровень радиальных напряжений в конструкции. Сделаны следующие выводы: при расчете тел сложной геометрии на импульсное внешнее нагружение большой интенсивности следует учитывать как геометрическую нелинейность задачи, так и физическую нелинейность уравнений состояния материала; необходимо также учитывать направление армирования слоев и их вязкостные свойства, особенно в случае кратковременных нагрузок.

В [73] изучаются точность и устойчивость метода Уилкинса при исследовании осесимметричного двухмерного НДС однослойного цилиндрически ортотропного цилиндра конечной длины для различных значений искусственной вязкости, времени нарастания и спада импульса нагрузки и длительностей процесса деформирования. Сопоставление численных расчетов с результатами экспериментов, известными численными данными и расчетами, полученными с помощью вычислительного ядра LS-DYNA-3D, показало их хорошее согласование.

В работе [74] МКР решается одномерная динамическая задача теории упругости для бесконечно длинного многослойного спирально трансформированного цилиндра при внутреннем циклическом нагружении давлением и температурой.

В [75–77] проведена модификация метода Уилкинса для численного исследования осесимметричной динамики толстостенных цилиндрических

оболочек конечной длины со спиральной ортотропией. Тестовые расчеты хорошо согласуются с известными решениями. Обнаружены новые физические эффекты, отсутствующие в изотропных и цилиндрически ортотропных оболочках.

Ранее [78, 79] решены аналогичные задачи для одно- и двухслойных цилиндров со спирально ортотропными слоями. Кроме того, в ряде расчетов прочность рассматриваемого конструктивного элемента оценивается с помощью критерия разрушения анизотропного материала Ашкенази, который использовался при численном исследовании деформирования и разрушения изотропного и ортотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия [80].

В [81] такие же задачи рассмотрены в геометрически и физически нелинейной постановке: учитывается возможность больших деформаций и упругопластического деформирования материалов цилиндра. Результаты [74–79, 81] обобщены и дополнены в монографиях [82, 83].

При решении динамических трехмерных (3D) задач в настоящее время широко применяются явные по времени численные методы: МКЭ [86–88] либо, для тел относительно несложной геометрической формы, МКР [89]. В частности, на использовании 3D-МКЭ основано решение трехмерных нестационарных задач в современном программном комплексе LS-DYNA-3D.

Несмотря на свою универсальность, 3D-МКЭ, особенно применительно к динамическим задачам, обладает рядом существенных недостатков: громоздкость; трудоемкость программирования; необходимость больших объемов оперативной памяти и машинного времени; сложности при подготовке входных данных и визуализации результатов динамического расчета; плохая устойчивость и пр.

Поэтому в последнее время получили развитие аналитико-численные методы интегрирования многомерных нестационарных краевых задач, основанные, в частности, на разложении переменных в ряды Фурье вдоль одной из пространственных координат с последующим использованием того или иного численного метода меньшей (на единицу) размерности [67, 68, 90–94]. Недостаток таких подходов заключается в том, что их обычно применяют только к линейным краевым задачам и только для тел регулярной геометрической формы.

При рассмотрении тел вращения, в частности цилиндров, часто используют разложение неизвестных в ряды Фурье по угловой координате [67–68, 90–93].

В [90] на базе общих уравнений динамической теории упругости определяется акустическая реакция трансформированного цилиндра на локальный лазерный удар. Задача рассматривается в нестационарной пространственной 3D-постановке, при этом по угловой координате переменные раскладываются в ряды Фурье, а вдоль оставшихся двух пространственных координат применяется интегральное преобразование Фурье.

Трехмерное нестационарное НДС составных и многослойных цилиндрически ортотропных толстостенных цилиндров конечной длины при неосесимметричном импульсном воздействии рассмотрено в [67, 68]. По углу неизвестные раскладываются в ряды Фурье, после чего применяется численный

разностный метод, представляющий собой линеаризованный вариант 2D-алгоритма Уилкинса.

В [91] численно-аналитическая методика [67, 68] была усовершенствована применительно к решению аналогичных задач с некоторыми видами физической нелинейности (пластичность без упрочнения либо локальные разрушения определенных типов).

Авторы [92] на основе комбинации разложений переменных в ряды Фурье по угловой координате и двухмерного линеаризованного алгоритма Уилкинса разработали численно-аналитический метод исследования трехмерной неосесимметричной динамики многослойных толстостенных упругих спирально ортотропных цилиндров конечной длины. Проведено тестирование предложенного метода, основанное на сравнении результатов расчетов с полученными посредством использования вычислительного ядра LS-Dyna учебной версии ANSYS ED. Исследованы некоторые особенности динамического поведения двухслойного спирально армированного цилиндра при внутреннем импульсном нагружении сосредоточенным зарядом взрывчатого вещества (ВВ), смещенным относительно центра симметрии цилиндра.

В [93] этот метод был доработан для оценки кроме динамического НДС также прочности рассматриваемого конструктивного элемента. Проверку прочности можно выполнять с использованием критериев разрушения ортотропного материала Ашкенази либо Цая–Ву. Численно исследовано влияние смещения заряда ВВ относительно центра симметрии одно- и двухслойной оболочек на их нестационарное НДС и прочность.

В [94] методом численного эксперимента решена задача оптимизации трехслойного металлокомпозитного цилиндра конечной длины, нагруженного осесимметричным внутренним взрывом. Определялось наилучшее соотношение толщин слоев и схем армирования его анизотропной композитной части из условия максимального запаса прочности по критерию Цая–Ву при фиксированных габаритных размерах цилиндра и относительной массе заряда. Показано, что использование упругопластической изотропной стали 20 в качестве внутреннего слоя в металлокомпозитном цилиндре существенно повышает его прочность, в частности, за счет пластического течения металла по сравнению с таковой чисто композитного. Установлено, что при использовании высокопрочных сталей с большим пределом текучести по сравнению со сталями с низким пределом текучести наблюдается снижение прочности. Применение цельнометаллических оболочек нерационально с точки зрения веса.

## Выводы

1. Разработке методов решения статических краевых задач теории упругости анизотропных тел для многослойных полых толстостенных цилиндров конечной длины и анализу двух- и трехмерных краевых задач теории упругости посвящены многочисленные работы.

2. Аналитические и численные исследования нестационарного НДС многослойных композиционных полых цилиндров, в том числе и толстостенных, в основном базируются на использовании уравнений различных теорий оболочек. Это в ряде случаев не позволяет адекватно описать НДС и

прочность исследуемого конструктивного элемента, поскольку не учитываются волновые процессы по толщине многослойного пакета, краевые эффекты вблизи торцов многослойной оболочки и др.

3. В настоящее время известно немного исследований НДС многослойных армированных полых цилиндров конечной длины, основанных на использовании общих уравнений динамической теории упругости анизотропного тела. Основные результаты гармонического анализа таких конструкций (исследование собственных частот и форм осесимметричных колебаний) получены в Институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины и в ряде работ зарубежных авторов. Одно-, двух- и трехмерные краевые задачи динамической теории упругости, пластичности и вязкоупругости для таких конструктивных элементов при импульсном внешнем и внутреннем нагружении численно моделировались и исследовались практически только в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины.

4. При численном исследовании динамических задач наибольшее распространение получили методы конечных элементов и Уилкинса. Для моделирования одно- и двухмерных задач динамического деформирования метод Уилкинса имеет ряд преимуществ перед МКЭ.

5. При решении трехмерных динамических задач для полых анизотропных цилиндров конечной длины при внутреннем и внешнем импульсном нагружении широко применяются МКЭ и численно-аналитические методы.

6. Известно мало работ, посвященных анализу НДС многослойных толстостенных композиционных полых цилиндров конечной длины со спиральной ортотропией слоев на основе уравнений динамической теории упругости анизотропного тела, особенно при исследовании двух- и трехмерного НДС. Оценке прочности таких конструктивных элементов и выбору оптимального по весу цилиндра посвящены единичные работы.

7. Недостаточно теоретически исследовано деформирование и разрушение металлокомпозитных цилиндров при внутреннем взрывном нагружении.

8. При исследовании прочности динамически нагруженных конструктивных элементов использовалось весьма мало критериев разрушения.

9. В представленных работах изучалось влияние неосесимметричности нагружения, времени нарастания и спада импульса нагрузки, точности различных методов, количества и направления армирования слоев, вязкости материала, физической и геометрической нелинейности, длительности импульса нагружения, упругопластического деформирования материала внутреннего слоя цилиндра, больших деформаций и т.п. на НДС и прочность.

10. Установлено, что динамическое НДС и прочность многослойных цилиндров со спирально ортотропными слоями существенно зависят от углов армирования слоев.

11. Для цилиндров конечной длины при неосесимметричном нагружении в целом ряде случаев применение упрощенных одно- и двухмерных схем расчета может давать ошибку в несколько сот процентов по сравнению с 3D-расчетами.

12. Показано, что использование упругопластической изотропной стали 20 в качестве внутреннего слоя в металлокомпозитном цилиндре, нагружаемом внутренним взрывом, существенно повышает его прочность по сравнению с таковой чисто композитного.

## Резюме

Виконано аналіз відомих із літературних джерел методів і результатів теоретичного (аналітичне та чисельне) дослідження напружено-деформованого стану та міцності багат шарових товстостінних анізотропних циліндрів під час динамічного навантаження.

1. *Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Бахтина Е. В.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 1. Экспериментальные исследования // Пробл. прочности. – 2013. – № 1. – С. 17 – 32.
2. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 5. – С. 86 – 93.
3. *Влайков Г. Г.* К решению задачи об осесимметричной деформации толстостенных ортотропных оболочек вращения // Там же. – 1975. – **11**, № 3. – С. 20 – 24.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* К определению температурных полей и напряжений в ортотропных слоистых цилиндрах // Математические методы и физико-механические поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 67 – 72.
6. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Исследование напряженности и деформативности композитных оболочек в пространственной постановке // Механика композитных материалов. – 1984. – № 3. – С. 667 – 674.
7. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Равновесие анизотропных неоднородных полых цилиндров // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 8. – С. 11 – 18.
8. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища шк., 1985. – 190 с.
9. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Пространственные эффекты в задачах деформации цилиндрических оболочек из анизотропных композитов // Механика композитных материалов. – 1986. – № 5. – С. 965 – 969.
10. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Исследование пространственных эффектов в задачах о термонапряженном состоянии анизотропных оболочек // Там же. – 1989. – № 3. – С. 487 – 493.
11. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел / Под ред. В. Г. Карнаухова. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
12. *Noor A. K., Burton W. S., and Peter J. M.* Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **27**, No. 10. – P. 1269 – 1286.

13. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
14. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Решение задач и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 11. – С. 3 – 38.
15. Немши Б. Ю. О напряженном состоянии ортотропных толстостенных цилиндров при неравномерном давлении // Там же. – 1998. – **34**, № 4. – С. 61 – 68.
16. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Исследование несимметричного напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных цилиндров при различных граничных условиях на торцах // Там же. – 1998. – **34**, № 7. – С. 3 – 10.
17. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних термочутливих циліндрів // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 73 – 77.
18. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Некоторые осесимметричные задачи статики и динамики анизотропных тел цилиндрической формы. – Киев: Технический центр НАН Украины, 1998. – 60 с.
19. Григоренко Я. М., Крюков М. М. Про вплив граничних умов на напружено-деформований стан трансверсально-ізоотропних циліндрів скінченної довжини // Доп. НАН України. – 1999. – № 4. – С. 60 – 63.
20. Механика композитов. В 12 т. Т. 8. Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев: А.С.К., 1999. – 379 с.
21. Librescu L. and Hause T. Recent development in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions (survey) // Compos. Struct. – 2000. – **48**. – P. 1 – 17.
22. Xia M., Kemmochi K., and Takayanagi H. Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermo-mechanical loading // Ibid. – 2001. – **51**. – P. 273 – 283.
23. Xia M., Takayanagi H., and Kemmochi K. Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under internal pressure // Ibid. – 2001. – **53**. – P. 483 – 491.
24. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Крыжановская Т. В. Исследование напряженного состояния ортотропных полых цилиндров при несимметричном нагружении // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 3 – 6.
25. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я., Шевченко С. Н. Некоторые задачи статики и динамики для анизотропных полых цилиндров некругового поперечного сечения. – Киев: Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины; Технический центр НАН Украины, 2001. – 147 с.
26. Parnas L. and Katirci N. Design of fiber-reinforced composite pressure vessels under various loading conditions // Compos. Struct. – 2002. – **58**. – P. 83 – 95.

27. *Grigorenko A. Ya. and Vlaiikov G. G.* Some Problems of Elasticity Theory for Anisotropic Bodies of Cylindrical Form. – Kiev: Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine; Technical Center of the NAS of Ukraine, 2002. – 217 p.
28. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Исследование напряженного состояния полых эллиптических цилиндров при изменении их эксцентриситета и толщины // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 8. – С. 69 – 82.
29. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров // Там же. – № 5. – С. 61 – 71.
30. *Shuvalov A. L. and Soldatos K. P.* On the successive approximation method for three-dimensional analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // J. Sound Vibr. – 2003. – **259**, No. 1. – P. 233 – 239.
31. *Sheng H. Y. and Ye J. Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. – 2003. – **192**. – P. 2441 – 2459.
32. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Визначення температурних полів і напружень в неоднорідних анізотропних оболонках у різних постановках // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 21 – 31.
33. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 67 – 73.
34. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением // Там же. – № 6. – С. 99 – 106.
35. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние // Там же. – № 9. – С. 87 – 93.
36. *Grigorenko A. Ya. and Vlaiikov G. G.* Investigation of the static and dynamic behaviour of anisotropic cylindrical bodies with noncircular cross-section // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 2781 – 2798.
37. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 3. – С. 62 – 69.
38. *Tabakov P. Y. and Summers E. B.* Lay-up optimization of multilayered anisotropic cylinders based on a 3-D elasticity solution // Comp. Struct. – 2006. – **84**. – P. 374 – 384.
39. *Григоренко Я. М., Урусова Г. П., Рожок Л. С.* Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 8. – С. 44 – 57.
40. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением // Там же. – № 12. – С. 87 – 96.

41. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
42. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. О влиянии параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 12. – С. 82 – 90.
43. Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E. Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermo-mechanical loading with thermal variations // Compos. Struct. – 2009. – **88**. – P. 532 – 541.
44. Onder A., Sayman O., and Tarakcioglu N. Burst failure load of composite pressure vessels // Ibid. – **89**. – P. 159 – 166.
45. Hosine A., Chapelle D., Boubakar M. L., et al. Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping. – 2009. – **86**. – P. 649 – 655.
46. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., and Vlaiikov G. G. Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells on the Basis of Different Models. – Kiev: Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine; Technical Center of the NAS of Ukraine, 2009. – 550 p.
47. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром // Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 57 – 62.
48. Qatu M. S., Sullivan R. W., and Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. – 2010. – **93**. – P. 14 – 31.
49. Qatu M. S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – San Diego, CA: Elsevier, 2004. – 426 p.
50. Qatu M. S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989–2000. Pt. I: Laminated composite shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**. – P. 325 – 350.
51. Qatu M. S. Free Vibration and Static Analysis of Laminated Composite Shallow Shells: Ph.D. Dissertation. – Ohio State University, 1989. – 212 p.
52. Qatu M. S. Review of shallow shell vibration research // Shock Vibr. Dig. – 1992. – **24**. – P. 3 – 15.
53. Qatu M. S. Accurate theory for laminated composite deep thick shells // Int. J. Solids Struct. – 1999. – **36**. – P. 2917 – 2941.
54. Абросимов Н. А. Численное исследование осесимметричного деформирования композитных оболочек вращения при импульсных воздействиях // Механика композитных материалов. – 1987. – № 4. – С. 647 – 653.
55. Богданович А. Е., Фелдмане Э. Г. Расчет несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении // Там же. – 1980. – № 3. – С. 476 – 484.

56. *Луговой П. З., Мейш В. Ф.* Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении // Пробл. прочности. – 2000. – № 4. – С. 86 – 96.
57. *Навал И. К., Сабодаш П. Ф.* Осесимметричные волны в ортотропной цилиндрической оболочке // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 924 – 928.
58. *Васильев В. В., Сисаури В. И.* Исследование динамического поведения композитных оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Там же. – 1985. – № 1. – С. 73 – 78.
59. *Абакумов А. И., Низовцев П. Н., Соловьев В. П. и др.* Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния композитных оболочек вращения при динамическом нагружении с учетом больших деформаций // Там же. – 1998. – № 1. – С. 28 – 37.
60. *Абакумов А. И., Егунов В. В., Иванов А. Г. и др.* Расчетно-экспериментальное исследование деформации оболочек взрывных камер // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1984. – № 3. – С. 127 – 130.
61. *Абакумов А. И., Певницкий А. В., Соловьев В. П.* Исследование динамики деформирования сферических сосудов при внутреннем взрывном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация научных исследований. – Горький, Горьк. ун-т, 1988. – С. 53 – 57.
62. *Абросимов Н. А., Куликова Н. А.* Идентификация параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных материалов на основе анализа импульсного нагружения оболочек вращения // Механика твердого тела. – 2011. – № 3. – С. 42 – 57.
63. *Абросимов Н. А., Баженов В. Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 399 с.
64. *Механика композитов.* В 12 т. Т. 9. Динамика элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1999. – 379 с.
65. *Сеницкий Ю. Э.* К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 8. – С. 95 – 100.
66. *Космодамианский А. С., Сторожев В. И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – Киев: Наук. думка, 1985. – 176 с.
67. *Бабич Ю. Н.* Волны напряжений в ортотропном полом цилиндре при локальном импульсном нагружении // Пробл. прочности. – 1988. – № 7. – С. 69 – 73.
68. *Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др.* Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
69. *Галиев Ш. У., Ромащенко В. А.* Численное исследование трехмерных нелинейных волн в составных телах вращения // Механика композитных материалов. – 1989. – № 1. – С. 136 – 141.

70. Галиев Ш. У., Алтаидзе З. Г., Ромащенко В. А. и др. Методики численного расчета анизотропных полых тел вращения на импульсные нагрузки // АН УССР. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1984. – 54 с.
71. Галиев Ш. У., Ромащенко В. А., Алтаидзе З. Г. Влияние анизотропии и вязкости на распространение волн в многослойных цилиндрах // Пробл. прочности. – 1983. – № 9. – С. 40 – 44.
72. Ромащенко В. А. Вязкоупругопластические волны в окрестности угловых точек анизотропных оболочек // Там же. – 1984. – № 10. – С. 89 – 92.
73. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Корбач В. Г. Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек // Там же. – 2003. – № 1. – С. 76 – 86.
74. Ansari R., Alisafaei F., and Ghaedi P. Dynamic analysis of multi-layered filament-wound composite pipes subjected to cyclic internal pressure and cyclic temperature // Compos. Struct. – 2010. – 92. – P. 1100 – 1109.
75. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Деменко В. Ф. Численное исследование динамики цилиндрических спирально армированных толстостенных оболочек // Авіац.-косм. техніка і технологія. – 2003. – Вып. 5 (40). – С. 56 – 60.
76. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных толстостенных оболочек с винтовой анизотропией // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 13 – 20.
77. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Численное исследование динамики толстостенных цилиндрических спирально армированных оболочек // Механика композитных материалов. – 2005. – № 2. – С. 225 – 236.
78. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Деменко В. Ф. Численное моделирование динамики толстостенных многослойных спирально армированных цилиндрических оболочек // Открытые информационные и компьютерные технологии. – 2004. – Вып. 23. – С. 170 – 182.
79. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Численное исследование динамики многослойных спирально-ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 99 – 110.
80. Кривошеина М. Н., Радченко А. В., Кобенко С. В. Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – 7, № 1. – С. 95 – 102.
81. Ромащенко В. А. Численное исследование нелинейной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 110 – 121.
82. Прочность материалов и конструкций / Под ред. В. Т. Трощенко. – Киев: Академперіодика, 2005. – 1088 с.
83. Прочность материалов и конструкций / Под общ. ред. В. Т. Трощенко. – Т. 3. Прочность толстостенных оболочек вращения при импульсном нагру-

- жении / П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко. – Киев: Ин-т пробл. прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2010. – 320 с.
84. *Кукуджанов В. Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Усп. механики. – 1985. – **8**, № 4. – С. 21 – 65.
85. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидромеханике. – М.: Мир, 1967. – С. 212 – 263.
86. *Flanagan D. P. and Belytschko T.* A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1981. – **17**. – P. 679 – 706.
87. *Yunus S. M., Pawlak T. P., and Cook R. D.* Solid elements with rotational degrees of freedom. Pt. 1. Hexahedron elements // Ibid. – 1991. – **31**. – P. 573 – 592.
88. *Pawlak T. P., Yunus S. M., and Cook R. D.* Solid elements with rotational degrees of freedom. Pt. 2. Tetrahedron elements // Ibid. – P. 593 – 610.
89. *Wilkins M. L., Blum R. E., Cronshagen E., and Grantham P.* A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanics and Gas Dynamics in Three Dimensions and Time. – University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCRK-51574 (1974).
90. *Pan Y., Perton M., Rossignol C., and Audoin B.* The transient response of transversely isotropic cylinder under a laser point source impact // Ultrasonics. – 2006. – **44**. – P. 823 – 827.
91. *Ромащенко В. А.* Методика решения трехмерных нелинейных динамических задач для составных тел вращения // Пробл. прочности. – 1993. – № 6. – С. 60 – 70.
92. *Ромащенко В. А., Бейнер О. С., Бабич Ю. Н.* Численно-аналитический метод исследования трехмерной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Там же. – 2011. – № 4. – С. 103 – 113.
93. *Ромащенко В. А., Бейнер О. С.* Численное исследование трехмерной динамики и прочности многослойных спирально ортотропных цилиндров // Там же. – 2012. – № 2. – С. 101 – 112.
94. *Ромащенко В. А., Бабич Ю. Н., Бахтина Е. В.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 2. Численная оценка прочности многослойных цилиндров конечной длины при внутреннем взрыве // Там же. – № 5. – С. 56 – 68.

Поступила 10. 05. 2012