

## Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 1. Теория

А. И. Маневич, Е. А. Пономаренко, Е. Ф. Прокопало

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина

*С использованием программного комплекса “ЛИРА” исследована задача об устойчивости изотропной и ортотропной цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Выполнен параметрический анализ полученного решения, определена точность известных приближенных оценок критического значения силы.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая и ортотропная оболочки, устойчивость, поперечный изгиб.

**Введение.** Задача об устойчивости цилиндрической оболочки при поперечном изгибе (под действием сосредоточенных сил или распределенной нагрузки) сопряжена с различными техническими приложениями (расчет авиационных конструкций, трубопроводов и др.). Трудность решения задачи обусловлена тем, что в зависимости от геометрии оболочки (относительной длины) и жесткостных параметров потеря устойчивости может происходить по двум механизмам: от действия касательных напряжений (по типу кручения) и нормальных напряжений (по типу сжатия–изгиба). При этом как касательные, так и нормальные напряжения являются существенно неоднородными, и их максимальные значения достигаются в различных зонах оболочки.

Неоднородность докритического напряженно-деформированного состояния приводит к уравнениям устойчивости с переменными (в двух направлениях) коэффициентами. Представленные в известных работах [1–6] теоретические решения этой задачи относятся к изотропным цилиндрическим оболочкам. Практически отсутствуют исследования устойчивости ортотропных оболочек (исключением можно было бы считать работу [7], однако в ней рассматривались оболочки, подкрепленные стрингерами и шпангоутами, для изгибаемой формы общей неустойчивости, причем сугубо приближенно, в рамках дополнительных деформационных гипотез отсутствия сдвига и нерастяжимости срединной линии поперечного сечения). В [8] подытожены результаты исследований по оценке устойчивости анизотропных и подкрепленных цилиндрических оболочек за несколько десятилетий, но нет упоминания о каких-либо решениях этой задачи для ортотропных оболочек. Однако даже результаты, полученные для изотропной цилиндрической оболочки, недостаточны для использования в расчетной практике, так как являются в основном иллюстративными, и их применение ограничено сравнительно узкой областью параметров оболочки. Рекомендуемые для практических расчетов приближенные оценки [1, 4], основанные на замене неоднородного напряженного состояния однородным, могут быть использованы на предварительной стадии проектирования, но они не могут претендовать на высокую точность.

В настоящее время уточненные расчеты устойчивости оболочек могут выполняться с помощью программных комплексов (“ЛИРА”, ANSYS и др.). Это открывает новые возможности расчета и анализа сложных задач устойчивости оболочек, которые не могли быть с достаточной точностью решены на предыдущих этапах развития теории. В то же время при использовании программных комплексов могут возникнуть определенные трудности и проблемы, связанные с выбором расчетных схем и формированием конечноэлементных сеток, что, в свою очередь, требует проведения исследований.

Цель данной работы состоит в изучении устойчивости изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой на основе программного комплекса (ПК) “ЛИРА”. Численные решения сопоставляются с имеющимися приближенными теоретическими оценками, что позволяет определить их точность. Выполнен параметрический анализ, изучено влияние параметров ортотропии и граничных условий.

**Постановка задачи. Безразмерные параметры. Оценки критической силы.** На рис. 1 показана ортотропная цилиндрическая консольная оболочка, нагруженная на конце поперечной силой  $Q$ . Модули упругости и коэффициенты Пуассона материала оболочки в продольном и кольцевом направлениях соответственно равны  $E_x$ ,  $E_y$  и  $\nu_x$ ,  $\nu_y$  ( $E_x\nu_y = E_y\nu_x$ ). Нагрузка передается на оболочку через жесткую диафрагму или шпангоут.

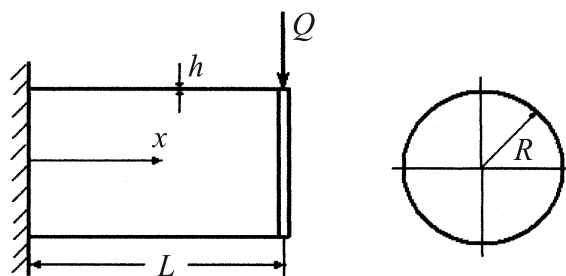


Рис. 1. Цилиндрическая консольная оболочка при поперечном изгибе силой на крае:  $R$  – радиус оболочки;  $L$ ,  $h$  – длина и толщина;  $Q$  – поперечная сила.

Расчет устойчивости выполняли с помощью ПК “ЛИРА 9.6”. Используя любой ПК, можно рассчитать конкретные оболочки с заданными параметрами геометрии и материала, однако для общности анализа, как и в аналитическом решении, необходимо результаты представлять в безразмерных параметрах. Помимо геометрических параметров  $h/R$ ,  $L/R$  введем безразмерные напряжения

$$\sigma^* = \frac{\sigma \cdot 10^3}{\sqrt{E_x E_y}}; \quad \tau^* = \frac{\tau \cdot 10^3}{\sqrt{E_x E_y}} \quad (1)$$

и безразмерную силу, совпадающую со средним безразмерным касательным напряжением,

$$Q^* = \frac{Q \cdot 10^3}{2\pi R h \sqrt{E_x E_y}}. \quad (2)$$

Запишем с помощью этих параметров известные расчетные формулы, которые используются в приближенных оценках устойчивости при поперечном изгибе. Формула для критических касательных напряжений при кручении цилиндрической оболочки [1, 3]

$$\tau_{cr} = 0,74 \frac{E_x^{3/8} E_y^{5/8}}{(1 - \nu_x \nu_y)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}$$

принимает вид

$$\tau_{cr}^* = \frac{740}{(1 - \nu_x \nu_y)^{5/8}} \left(\frac{E_y}{E_x}\right)^{1/8} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Для критического напряжения при сжатии  $\sigma_{cr}^{(c)}$  ортотропной цилиндрической оболочки будем использовать, учитывая приближенность оценок, упрощенную формулу для осесимметричной формы потери устойчивости ортотропной оболочки, в которой модуль упругости изотропной оболочки заменяется “эффе́ктивным модулем”  $E_{eff} = \sqrt{E_x E_y}$ :

$$\sigma_{cr}^{(c)} = k \sqrt{E_x E_y} \frac{h}{R},$$

где согласно линейной теории получим  $k \approx 0,6$ .

В безразмерных параметрах эта формула имеет вид

$$\sigma_{cr}^{(c)*} = k \frac{h}{R} 10^3. \quad (4)$$

При изгибе консольной оболочки поперечной силой  $Q$  на крае максимальные нормальные и касательные напряжения равны соответственно

$$\sigma_{\max} = \frac{QL}{\pi h R^2}, \quad \tau_{\max} = \frac{Q}{\pi R h}. \quad (5)$$

В безразмерных параметрах (1), (2) формулы (5) запишем так:

$$\sigma_{\max}^* = 2Q^* \frac{L}{R}, \quad \tau_{\max}^* = 2Q^*. \quad (6)$$

Приравнивая эти величины к критическим по (3) и (4), получаем оценки критических значений силы по касательным и нормальным напряжениям. Наименьшее из этих двух значений дает оценку безразмерной критической силы:

$$Q_{cr}^* = \min(Q_{cr}^{(\tau)*}, Q_{cr}^{(\sigma)*}) = \min\left(\frac{370}{(1 - \nu_x \nu_y)^{5/8}} \left(\frac{E_y}{E_x}\right)^{1/8} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, 500k \frac{h}{R} \frac{R}{L}\right). \quad (7)$$

В частности, для изотропной оболочки  $E_x = E_y = E$ , полагая  $\nu_x = \nu_y = 0,3$ , получаем

$$Q_{cr}^* = \min(Q_{cr}^{(\tau)*}, Q_{cr}^{(\sigma)*}) = \min\left(390\left(\frac{h}{R}\right)^{5/4}\left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, 500k\frac{h}{R}\frac{R}{L}\right). \quad (8)$$

**Тестирование расчетов.** Расчет устойчивости оболочек на основе ПК “ЛИРА 9.6” выполняется с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в рамках линейной теории устойчивости. Для тестирования расчетов результаты сравниваются с приближенным решением (7) и данными экспериментов. При первых расчетах получены явно ошибочные результаты, особенно для оболочек средней и большой длины ( $L/R > 3$ ), где происходила потеря устойчивости по типу сжатия–изгиба (в зоне наибольших нормальных напряжений у заделанного края). Здесь расчетные критические значения силы были намного ниже ожидаемых (в два–четыре раза). В то же время для оболочек в области коротких длин, где потеря устойчивости связана с большими напряжениями сдвига (в боковых зонах оболочки), результаты были достаточно точными. При дальнейших численных экспериментах обнаружено, что основной причиной большой погрешности является недостаточное число элементов при задании конечноэлементной сетки вдоль окружности оболочки. При переходе от первоначально выбранных 40 точек по окружности к 100 точкам сетки численные результаты существенно изменились, и расчетные критические нагрузки соответствовали как экспериментальным данным, так и приближенным решениям. С дальнейшим уменьшением сетки сколь-нибудь заметных изменений значений критической нагрузки не происходило.

**Результаты расчетов для изотропных оболочек.** Расчеты для изотропных оболочек выполняли при следующих значениях безразмерных параметров:  $R/h = 400, 200, 100$ ; отношение  $L/R$  изменялось в диапазоне 1...10. Рассматривали два вида граничных условий на левом крае оболочки (рис. 1): защемление ( $u = v = w = \partial w/\partial x = 0$ ) и “шарнир” ( $u = v = w = \partial u/\partial x = 0$ ). Диафрагма на правом крае считалась абсолютно жесткой (в своей плоскости).

**Формы потери устойчивости.** Расчетные формы потери устойчивости оболочки представлены на рис. 2. Для коротких оболочек реализуется “сдвиговая” форма выпучивания с образованием наклонных вмятин в зоне максимальных (по окружности) касательных напряжений, для длинных – “изгибная” форма с локальными выпучинами в зоне максимальных продольных напряжений.

**Критические силы.** На рис. 3 представлены расчетные зависимости нормализованной критической силы от относительной длины оболочки  $L/R$  и приближенные теоретические оценки.

Результаты расчетов на основе ПК “ЛИРА” оболочки с защемленным краем (на рис. 3 кривая 1) и краем, шарнирно опертым (кривая 2), свидетельствуют о том, что кривые 1 и 2 почти сливаются на большей части исследуемого интервала  $L/R$ .

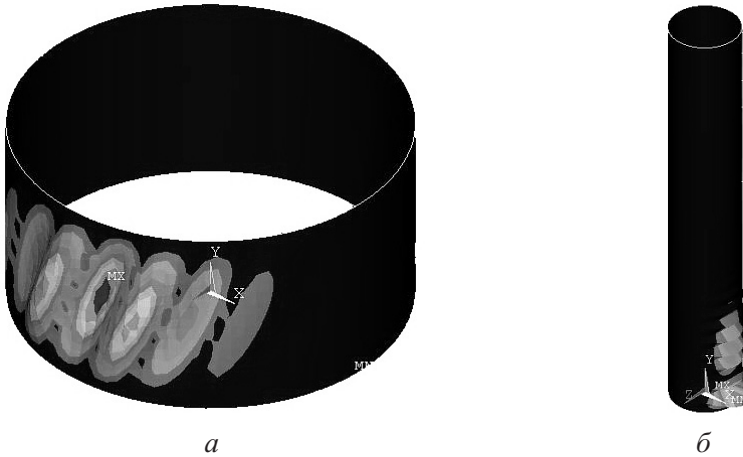


Рис. 2. Расчетные формы потери устойчивости оболочки при поперечном изгибе: а – “сдвиговая” форма выпучивания; б – “изгибная” форма потери устойчивости.

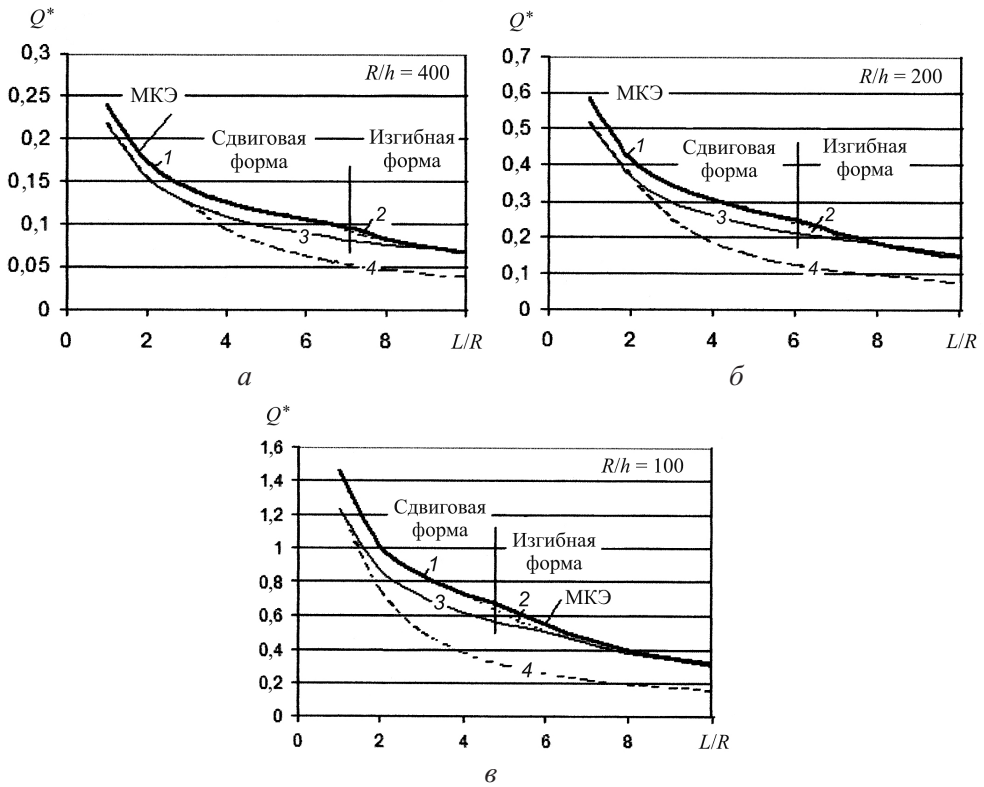


Рис. 3. Сравнение численного расчета для изотропной оболочки с приближенным по формуле (8) при трех значениях  $R/h$ : 1, 2 – расчет на основе ПК “ЛИРА” (1 – край оболочки защемлен, 2 – край шарнирно оперт); 3, 4 – теоретические оценки (3 –  $k = 0,605$ , 4 –  $k = 0,3$ ).

Представляют интерес следующие выводы, полученные из расчетов.

1. Для всех рассмотренных значений  $R/h$  на расчетной кривой для критической силы можно выделить два участка, соответствующих сдвиговой и изгибной формам выпучивания. Граница между ними зависит от отношения

$R/h$  и сдвигается влево (в сторону меньших  $L/R$ ) с его уменьшением. Теоретическая оценка для граничного значения  $(L/R)_*$  может быть легко получена из (8):

$$\left(\frac{L}{R}\right)_* = 1,64k^2 \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (9)$$

Значение  $(L/R)_*$  существенно зависит от выбранной величины  $k$ . Так, для  $R/h = 200$  получим  $(L/R)_* = 8,4$  при  $k = 0,605$  и  $(L/R)_* = 2,1$  при  $k = 0,3$ . Расчет на основе ПК “ЛИРА” для  $R/h = 200$  дает  $(L/R)_* \approx 6$ , что соответствует согласно (9)  $k = 0,51$ .

2. На первом участке (сдвиговая форма) расчет по приближенной формуле (8) дает заметную погрешность (порядка 15%) в сторону занижения критической силы. Обусловлено это тем, что приближенная формула получена для задачи о кручении, в которой касательные напряжения распределены равномерно по всей поверхности оболочки. В случае поперечного изгиба эти напряжения существенно неравномерны и близки к максимальным лишь на небольшой части оболочки по окружности, в то время как форма выпучивания наблюдается по всей (или по значительной части) поверхности оболочки.

3. На втором участке (изгибная форма) погрешность расчета по формуле (8) зависит от выбранного значения коэффициента  $k$ . Так, для  $k = 0,605$  результаты приближенного расчета и расчета на основе ПК “ЛИРА” практически совпадают для оболочки достаточно большой длины. При меньшем значении коэффициента  $k$  (рекомендованное, например, в [1]) имеет место значительное расхождение результатов (до двух раз). Близость точного решения к оценке (8) объясняется тем, что на этом участке форма выпучивания является локальной, и замена переменных (по окружности и по длине) продольных напряжений их максимальной величиной не приводит к существенной погрешности.

4. Не отмечается заметного влияния граничных условий. Только в небольшом интервале отношения  $L/R$ , что имеет место на границе между двумя участками, “ослабление” граничных условий (переход от защемления края к шарнирному опиранию) приводит к незначительному уменьшению критической силы, не превышающему 7% для рассмотренных оболочек (в случае  $R/h = 100$ ; для больших  $R/h$  эффект еще меньше). Частично столь малый эффект граничных условий обусловлен тем, что здесь они изменяются лишь на одном крае.

Аналогичный вывод о малом отличии критических нагрузок при защемлении краев оболочки от таковых при шарнирном опирании получен ранее [9] при аналитическом решении задачи о потере устойчивости цилиндрической оболочки при кручении. В решении [9] эффект защемления оценивался примерно в 10%, но для случая защемления двух краев оболочки.

**Результаты расчетов для ортотропных оболочек.** При анализе устойчивости ортотропных оболочек принимали те же значения безразмерного параметра ( $R/h = 400, 200, 100$ ), что и для изотропных, и рассматривали пять вариантов отношения модулей упругости в кольцевом и продольном направлениях:  $E_y/E_x = 0,2; 0,5; 1,0; 2,0$  и  $5,0$ . Параметр  $L/R$  изменялся в диапазоне

1...10. Рассматривали два вида граничных условий на левом крае оболочки: защемление и “шарнир”. Модуль упругости при сдвиге определялся в зависимости от модулей упругости в двух направлениях по формуле

$$G = \frac{E_x E_y}{E_x + E_y + E_x \nu_y + E_y \nu_x}. \quad (10)$$

Расчетные формы потери устойчивости ортотропных оболочек близки к формам выпучивания изотропных оболочек (рис. 2).

На рис. 4 представлена зависимость безразмерной поперечной силы  $Q^*$  от параметра  $L/R$  для различных значений  $E_y/E_x$  при  $R/h = 200$  и  $100$ .

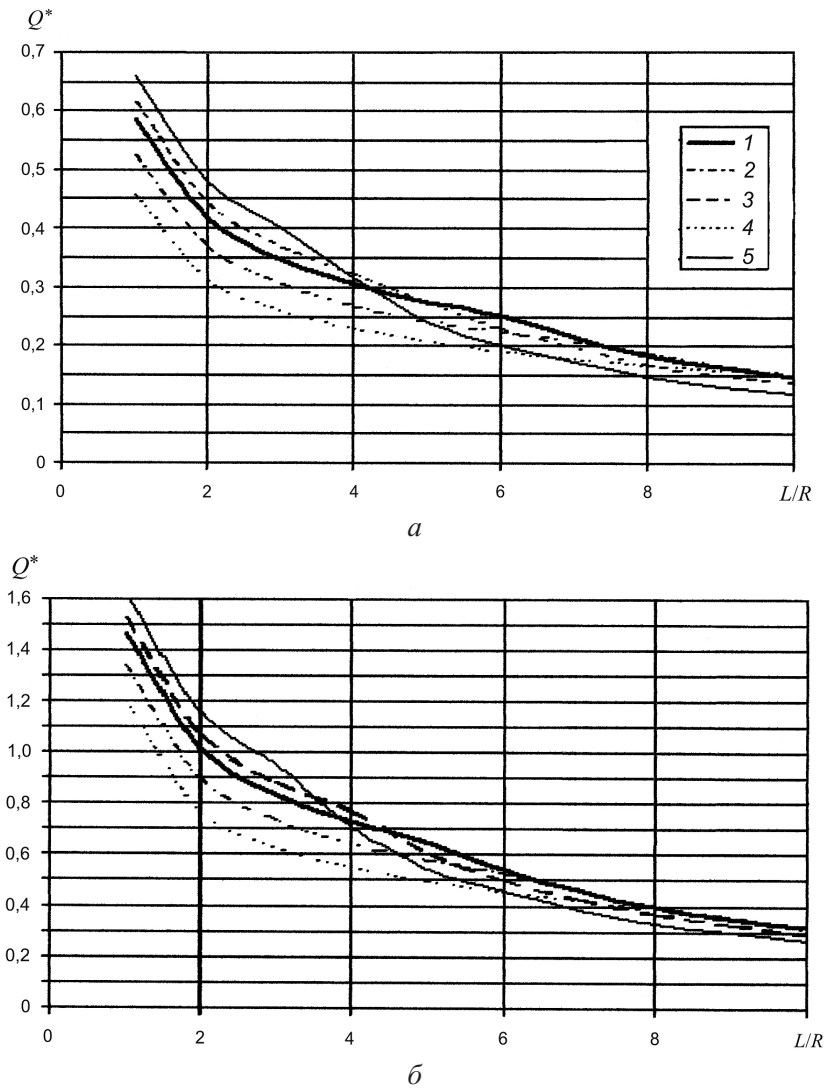


Рис. 4. Зависимость безразмерной поперечной силы  $Q^*$  от параметра  $L/R$  для ортотропных оболочек при различных значениях  $E_y/E_x$  и  $R/h = 200$  (а),  $100$  (б): 1 -  $E_y/E_x = 1$ ; 2 -  $E_y/E_x = 0,5$ ; 3 -  $E_y/E_x = 2$ ; 4 -  $E_y/E_x = 0,2$ ; 5 -  $E_y/E_x = 5$ .

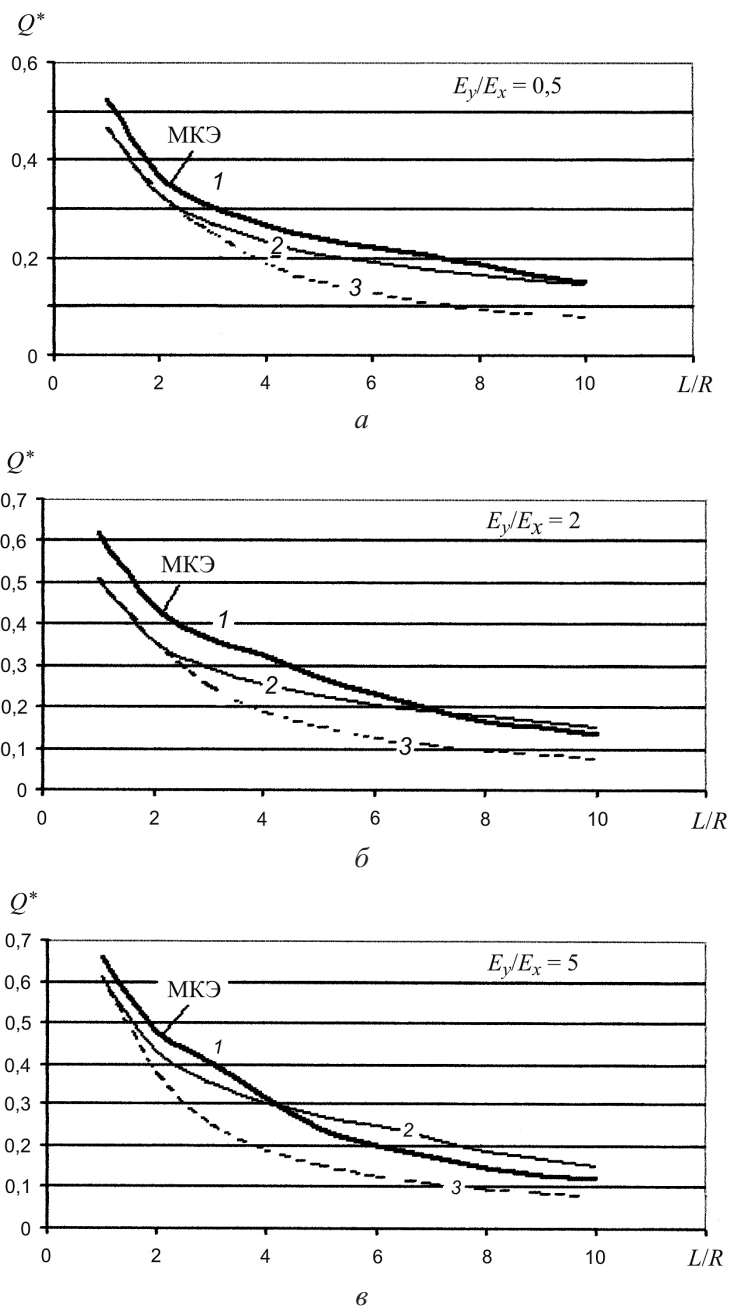


Рис. 5. Сравнение численного расчета на основе ПК “ЛИРА” с приближенным по формуле (7) для ортотропных оболочек при различных значениях  $E_y/E_x$  и  $R/h = 200$ : 1 – расчет на основе ПК “ЛИРА”; 2, 3 – теоретические оценки ( $2 - k = 0,6$ ;  $3 - k = 0,3$ ).

В соответствии с оценкой (7) увеличение отношения  $E_y/E_x$  приводит к повышению критической силы в том диапазоне  $L/R$ , где имеет место потеря устойчивости по сдвиговой форме. При больших  $L/R$ , когда выпучивание происходит по изгибной форме, картина изменяется: наибольшему  $E_y/E_x$  соответствует наименьшая критическая сила, однако монотонной зависимости



от  $E_y/E_x$  нет, и существует интервал значений  $L/R$ , где максимум нагрузки соответствует изотропной оболочке. Согласно теоретической оценке (7) при этих значениях  $L/R$  критический параметр силы, вообще, не зависит от отношения  $E_y/E_x$ , однако расчет на основе ПК “ЛИРА” показывает заметное влияние  $E_y/E_x$  и в этом диапазоне  $L/R$ .

Рассмотрим более детально влияние отношения  $E_y/E_x$  в тех случаях, когда реализуется сдвиговая форма выпучивания, т.е. при малых  $L/R$ . Согласно теоретической оценке критическое значение параметра  $Q^*$  пропорционально  $(E_y/E_x)^{1/8}$ . Если сравнить критические значения  $Q^*$  для  $E_y/E_x = 0,2$  и  $5,0$ , то во втором случае они должны быть больше в  $25^{1/8} = 1,495$  раз. В соответствии с численным расчетом это отношение составляет  $1,44...1,56$ , что достаточно близко к теоретической оценке. Неплохое согласование с зависимостью  $(E_y/E_x)^{1/8}$  получено также при других расчетах.

Аналогичные результаты получены для значений параметра тонкостенности  $R/h = 400$  и  $100$ .

На рис. 5 приведены результаты сопоставления расчетов на основе ПК “ЛИРА” с теоретическими оценками (7) при  $R/h = 200$  и  $E_y/E_x = 0,5; 2; 5$ .

В области сдвиговой формы согласно теоретической оценке значение критической силы всегда занижено (как правило, 12...16% для большей части значений  $E_y/E_x$ , однако для  $E_y/E_x = 2$  оно достигает 25...27%).

В области изгибной формы расхождение между теоретической оценкой, полученной при  $k = 0,6$ , и численным расчетом зависит от  $L/R$  и  $E_y/E_x$ . Для очень больших отношений  $L/R$  согласно теоретической оценке значение  $Q^*$  завышено, при этом погрешность увеличивается с ростом  $E_y/E_x$  (до 20% при  $E_y/E_x = 5$  в исследуемом интервале  $L/R$ ). Для меньших  $L/R$  (в левой части интервала изгибной формы) теоретическая оценка дает заниженное значение  $Q^*$ . Если исходить из значения  $k = 0,3$ , то полученные по (7) данные всегда оказываются заметно ниже численных (до двух раз).

Влияние граничных условий для ортотропных оболочек мало отличается от соответствующего эффекта для изотропных оболочек. Отношение критических сил оболочек с защемленным и шарнирным краями не превышает  $1,05...1,07$  для всех рассмотренных параметров.

## Выводы

1. Теоретические оценки критической силы изотропных и ортотропных оболочек при поперечном изгибе, основанные на замене неоднородного докритического состояния однородным и использовании простых расчетных формул для критических напряжений при кручении и сжатии, удовлетворительно согласуются с численными расчетами на основе ПК “ЛИРА”. В диапазоне малых длин, когда реализуется сдвиговая форма выпучивания, теоретическая оценка (7) приводит к заниженному значению критической силы (примерно на 15%, в некоторых случаях до 25...27%). В диапазоне больших длин, где реализуется изгибная форма выпучивания, погрешность теоретической оценки уменьшается и может даже менять знак для ортотропных оболочек с большим модулем упругости в кольцевом направлении.

Причина этого различия состоит в том, что сдвиговое выпучивание происходит на значительной части поверхности оболочки, захватывающей зоны с малыми касательными напряжениями, а изгибное выпучивание носит локальный характер и происходит лишь в зоне максимальных сжимающих напряжений.

2. Не наблюдается заметного влияния граничных условий. Отношение критических сил изотропных оболочек с защемленным и шарнирным краями не превышает 1,05...1,07 для всех рассмотренных параметров, причем максимальный эффект заделки отмечается в интервале  $L/R$ , соответствующем переходу от сдвиговой формы выпучивания к изгибной. Влияние граничных условий для ортотропных оболочек мало отличается от соответствующего эффекта для изотропных.

3. Расчетная зависимость критической силы ортотропной оболочки от отношения модулей упругости  $E_y/E_x$  хорошо согласуется с теоретической оценкой (пропорциональность  $(E_y/E_x)^{1/8}$ ) в интервале длин, соответствующем сдвиговой форме выпучивания, но не согласуется для изгибной формы в интервале больших  $L/R$ .

## Резюме

Из використання програмного комплексу “ЛПРА” досліджено задачу щодо стійкості ізотропної й ортотропної циліндричних оболонок при згині поперечною силою. Виконано параметричний аналіз отриманого розв’язку, визначено точність відомих наближених оцінок критичного значення сили.

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек // Итоги науки. Сер. “Механика”. Механика твердых деформируемых тел. – М.: ВИНТИ, 1969. – 348 с. (гл. 2, п. 8).
3. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
4. *Даревский В. М.* Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением // Расчет пространственных конструкций. – 1959. – Вып. 5. – С. 431 – 449.
5. *Кабанов В. В.* Устойчивость цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением // Избранные проблемы прикладной механики. – М.: ВИНТИ, 1974. – С. 365 – 369.
6. *Lu S. Y.* Buckling of cantilever cylindrical shell with a transverse end load // AIAA J. – 1965. – 3, No. 12. – P. 2350 – 2351.
7. *Туркин К. Д.* Общая устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки при поперечном изгибе // Расчет пространственных конструкций. – Вып. 5. – С. 450 – 474.
8. *Кабанов В. В.* Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. – М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.

9. Маневич А. И., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных тонкостенных цилиндрических оболочек при кручении. Сообщ. 1. Теория. // Пробл. прочности. – 2008. – № 3. – С. 17 – 28.

Поступила 09. 03. 2011

### **Вниманию подписчиков!**

Подписаться на журнал «Проблемы прочности» можно, как обычно, в местных отделениях связи. Журнал включен в каталоги Украины и России.

Наш индекс – 70730.

Подписку Вы можете оформить непосредственно в редакции журнала с любого очередного номера.

Цена одного номера с учетом почтовых расходов в 2013 году составит:  
в пределах Украины 30 грн.;  
за пределами Украины 300 рос. руб. (~ 10.0 USD).

Почтовые переводы направлять по адресу:

01014, Киев–14, ул. Тимирязевская, 2.

Редакция журнала «Проблемы прочности»

Шинкаренко Нине Михайловне.

Справки по телефону: (044) 286 5657.

Отдельным письмом необходимо сообщить в редакцию требуемое количество номеров, сумму и дату отправки перевода, указать свой почтовый адрес. Отправка журналов осуществляется после поступления денег подписчика.