УДК 519.85

В.В. БОЙКО, В.В. ГОРИН, В.Н. КУЗЬМЕНКО

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ PNK-МЕТОДА В СЛУЧАЕ НЕВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Описываются сложности кусочно-линейной аппроксимации невыпуклых ограничений задач оптимизации и дополнительные процедуры PNK-метода, позволяющие находить приемлемые локальные решения в этом случае. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Введение. Для успешного применения PNK-метода [1], основанного на подходе, изложенном в [2], к задачам с невыпуклыми функциями требуется анализ характера невыпуклости и выбор соответствующих процедур, позволяющих преодолеть сложности применения. Сам метод основан на построении кусочно-линейной аппроксимации целевой функции и функции, задающей допустимое множество, на использовании квадратичной добавки в процессе построения сходящейся к решению последовательности точек, на поиске точного в определенном смысле штрафа, позволяющего свернуть целевую функцию и функцию, задающую допустимую область, в одну штрафную функцию при решении квадратичной подзадачи при поиске направления и шага метода.

В работе [1] рассмотрены общие вопросы и идеи применения PNK-метода для поиска решения невыпуклых задач. Однако, в случае наличия невыпуклых функций в ограничениях, подход, изложенный в [1], не всегда приводит к локальному решению. Поэтому в данной статье случай невыпуклых ограничений рассматривается более детально и целенаправлено. Необходимо напомнить, что есть разнообразные подходы для решения задач с невыпуклыми функциями. Близкие постановки задач рассматриваются в [3–7]. Однако чаще рассматриваются методы решения задач без ограничений. Построение точных штрафов для задач с ограничениями рассматривается в [6, 7].

Опишем основные шаги PNK-метода.

Рассматривается задача

$$\min_x \{ f(x): \ f_j(x) \le 0, \ 1 \le j \le m, \ \ x \in M \}, \tag{1}$$

где $x \in R^n$; f, f_j – непрерывные функции, принимающие конечные значения на выпуклом многограннике M.

PNK-метод разработан для случая, когда функции f, f_j – выпуклые.

Поиск решения в случае выпуклых функций основан на описанной далее итерационной процедуре, в результате применения которой последовательность точек x_k сходится к решению задачи x^*, а штрафной множитель S_k – к конечному штрафу S^*, который будем называть «точным».

Введем некоторые обозначения и опишем элементы решаемой подзадачи.

Пусть уже сделано k итераций. Конечное множество точек x_i, которые сгенерированы за k итераций, включая начальную точку, обозначим X_k. Множество функций, задающих допустимую область задачи (1), заменим одной функцией $\varphi(x) = \max_j \{ f_j(x): \ 1 \le j \le m\}$. Допустимая область далее будет задаваться одним ограничением $\varphi(x) \le 0$. Функция

$$F_k(x) = f(x) + S_k \max\{0; \varphi(x)\} \tag{2}$$

это текущая штрафная функция, с которой будем работать на следующей итерации. Пусть $x_k^r = \arg\min\{ F_k(x) : x \in X_k \}$ – минимальное значение текущей штрафной функции на множестве X_k. В точках $x_i \in X_k$ вычислена и будет использована такая информация: $f(x_i), \varphi(x_i)$ – значения функций, $f'(x_i), \varphi'(x_i)$ – элементы субдифференциалов $\partial f(x_i), \partial \varphi(x_i)$.

Шаг процедуры для итерации $k+1$ заключается в следующем.

1. Решить квадратичную подзадачу, которая включает регуляризирующую квадратичную добавку и текущую аппроксимацию штрафной функции (2):

$$\min_{x,\, \xi_1, \xi_2} \{ \frac{1}{2h_k} \left\| x - x_k^r \right\|^2 + \xi_1 + S_k \, \xi_2 \}, \tag{3}$$

$$f(x_i) + (f'(x_i), \ x - x_i) \le \xi_1, \ \ \forall x_i \in X_k^f, \tag{4}$$

$$\varphi(x_i) + (\varphi(x_i), \ x - x_i) \le \xi_2, \ \ \forall x_i \in X_k^{\varphi}, \tag{5}$$

$$0 \le \xi_2, \ x \in M, \tag{6}$$

где h_k – параметр, выполняющий роль шагового множителя; переменные ξ_1 и ξ_2 аппроксимируют соответственно целевую функцию f и функцию ограничений φ с помощью систем неравенств (4) и (6); $X_k^f \subseteq X_k$ и $X_k^{\varphi} \subseteq X_k$ подмножества точек, используемых для аппроксимаций.

2. Штрафной множитель S_k увеличить, если найденное в результате решения задачи (3) – (6) значение $\xi_2^* > 0$.

3. Изменить шаговый множитель h_k на основании анализа изменения рекордного значения штрафной функции $F_k(x_k^r)$ и ее оценки $\xi_1^* + S_k\,\xi_2^*$ за несколько последних итераций.

4. Уменьшить множества X_k^f и X_k^{φ} за счет исключения неактивных ограничений в системах (4), (5). А именно, исключить из множества X_k^f одну точку, для которой разность $f(x_i) + (f'(x_i),\, x_{k+1} - x_i) - \xi_1^*$ – минимальная и отрицательная. Аналогично, исключить из множества X_k^{φ} одну точку, для которой разность $\varphi(x_i) + (\varphi'(x_i),\, x_{k+1} - x_i) - \xi_2^*$ – минимальная и отрицательная, где точка x_{k+1} – найдена в результате решения задачи (3) – (6).

5. Точку x_{k+1} добавить к множеству точек аппроксимации $X_{k+1} = X_k \cup \{x_{k+1}\}$ и к множествам $X_{k+1}^f = X_k^f \cup \{x_{k+1}\}$, $X_{k+1}^{\varphi} = X_k^{\varphi} \cup \{x_{k+1}\}$.

Метод оканчивает работу, когда разность между рекордным значением штрафной функции $F_k(x_k^r)$ и оценкой $\xi_1^* + S_k\,\xi_2^*$ становится мала. В этом случае считается, что найдено оптимальное решение исходной задачи.

Другой критерий останова – это значительный рост штрафного множителя S_k, что расценивается как недопустимость исходной задачи.

Случай невыпуклых ограничений. Главная проблема в этом случае – это то, что кусочно-линейная аппроксимация ограничений (5) может неправильно оценивать допустимую область или даже не допускать значения $\xi_2^* > 0$. В последнем случае исходная задача (1) в силу шага 2 алгоритма будет распознана как недопустимая, даже если она имеет допустимое решение.

Рассмотрим в каких случаях в оптимальном решении задачи (3) – (6) может быть $\xi_2^* > 0$ (табл. 1).

ТАБЛИЦА 1

	Задача (1)	Задача (3) – (6)	Причина
1.	Допустима	Допустима точка $\xi_2 = 0$	Штраф S_k мал
2.	Недопустима	Допустима точка $\xi_2 = 0$	Штраф S_k мал
3.	Недопустима	Недопустима точка $\xi_2 = 0$	Недопустимость задачи (1)
4.	Допустима	Недопустима точка $\xi_2 = 0$	Неправильная аппроксимация (5)

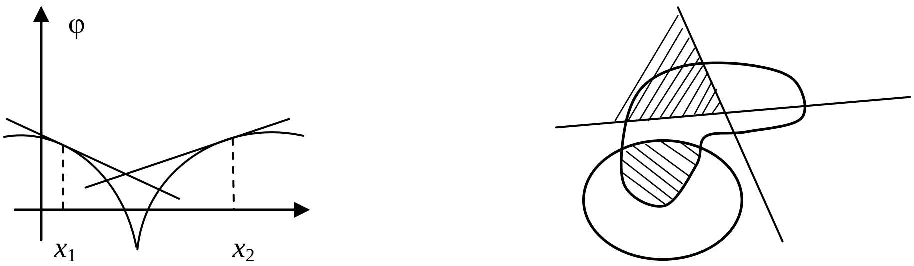
Случаи 2, 3 соответствуют правильной аппроксимации (5) любой задачи, из случая 1 для невыпуклой задачи не следует того, что аппроксимация (4), (5) правильная.

Случаи 1 – 3 могут быть как в выпуклой, так и в невыпуклой задаче и шаг 2 алгоритма остается правильным. Случай 4 может быть только в задаче с невыпуклыми ограничениями и использование шага 2 за ряд итераций приведет к неправильному выводу о недопустимости исходной задачи.

Таким образом, для невыпуклой задачи критическим является только случай (4).

Для того чтобы отделить случаи 1, 2 от 3, 4 необходимо решить задачу (3) – (6) зафиксировав $\xi_2 = 0$. Если задача (3) – (6) останется допустимой, то имеет место случай 1 или 2, если нет – то 3, 4.

Далее на рисунке показаны примеры, в которых: а) аппроксимационная задача не имеет допустимой точки со значением $\xi_2 = 0$; б) допустимая область исходной задачи не имеет общих точек с областью, где $\xi_2 \le 0$.



а　　　　　　　　　　　　б

РИСУНОК. Примеры неправильной аппроксимации ограничений задачи (1)

Рассмотрим возможные результаты добавления новой точки аппроксимации после итерации метода и изменении параметров работы метода. Пусть текущая аппроксимация задачи (1) – правильная и в результате решения задачи (3) – (6) найдена новая точка x_{k+1}. Включим ее в множества X_k^f и X_k^{φ}.

Возможны следующие варианты:

1) новая аппроксимация (3) – (6) задачи является правильной;

2) новая аппроксимация не является правильной;

а) рекордная точка изменилась (новым рекордом может быть x_{k+1} или рекордом стала другая точка после увеличения штрафа N_{k+1}). В этом случае есть точки, неправильно аппроксимирующие f или φ в точке x_r. Например, для f это означает, что $f(x)+(f'(x),\ x_r - x) > f(x_r)$;

б) рекордная точка не изменилась. Это означает, что точка x_{k+1} и (или) другие точки неправильно аппроксимирует f и (или) φ в точке x_r.

В случае 1) процесс продолжается без удаления точек из X_k^f, X_k^{φ}.

В случае 2) продолжение работы алгоритма может быть построено несколькими способами.

Способ первый. В случай 2, а) точки, неправильно аппроксимирующие новый рекорд, выбрасываются из множеств X_k^f и (или) X_k^φ. В случае 2, б) точка x_{k+1} выбрасывается из X_k^f и(или) X_k^φ, а шаговый множитель h_k уменьшается.

Второй способ позволяет исправить неправильность аппроксимации и сохранить информацию о значениях функций.

Пусть в точке x для некоторой функции φ выполнено неравенство $\varphi(x)+(\varphi'(x),\, x_r - x) > \varphi(x_r)$. Изменим аппроксимацию в точке x таким образом, чтобы она стала правильной для x_r. Для этого найдем минимальный по модулю вектор g такой, что $\varphi(x)+(\varphi'(x)+g,\, x_r - x) \le \varphi(x_r) - \Delta,$ где $\Delta > 0$ – параметр, существенно превосходящий критерий $\varepsilon > 0$ точности поиска решения по значению функции. Получаем $(g,\, x_r - x) \le \varphi(x_r) -$ $- \varphi(x) - (\varphi'(x),\, x_r - x) - \Delta.$ Наименьший по модулю вектор g колинеарен разности $x_r - x$, т. е. $g = t(x_r - x)$, где t – искомый параметр. Обозначив правую часть последнего неравенства $\Delta_x^\varphi < 0$ и найдя t, получаем $g =$ $= (x_r - x)\cdot \Delta_x^\varphi/(x_r - x)^2.$

Результаты вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты проводились для тестирования и сравнения работы метода при использовании дополнительных процедур изменения и коррекции кусочно-линейной аппроксимации задачи. В качестве тестовых примеров взяты задачи с невыпуклыми ограничениями из библиотеки тестов AMPL [8]. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

Название файла задачи	Количество ограничений, m	Количество переменных, n	Полученное решение	Время решения, с
hs111.mod	23	10	5463.9	0.13
hs114.mod	31	10	67.12	4.2
hs116.mod	41	13	32902.0	9.3
blend.mod	38	24	16483.9	0.42
chemeq.mod	50	38	478.38	6.8
grindneta.mod	96	60	0.47689	17.1
steenbre.mod	126	540	8.7349	94.5
weapon.mod	122	100	3789214.	88.2

Заключение. Выполненная работа и проведенные вычислительные эксперименты показывают, что для успешного применения PNK-метода для решения задач с невыпуклыми ограничениями необходимо использовать специальные процедуры анализа характера невыпуклости и процедуры построения и коррекции кусочно-линейной аппроксимации задачи. Такие процедуры были разработаны, протестированы и показали улучшение работы метода. Дальнейшее развитие работы будет направлено на увеличение вычислительной эффективности данного подхода.

В.В. Бойко, В.В. Горин, В.М. Кузьменко

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ PNK-МЕТОДУ У ВИПАДКУ НЕОПУКЛИХ ОБМЕЖЕНЬ

Описуються труднощі кусково-лінійної апроксимації неопуклих обмежень задач оптимізації та додаткові процедури PNK-методу, які дозволяють знаходити прийнятні локальні розв’язки у таких випадках. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

V.V. Boyko, V.V. Gorin, V.M. Kuzmenko

PECULIARITIES OF USING PNK-METHOD IN CASE OF NONCONVEX CONSTRAINTS

Hardships of linear piecewise approximation of non convex constraints in an optimization problem are considered. Additional procedures of PNK-method which allows to find appropriate local solutions in such case are considered too. Results of computational experiments are added.

1. *Кузьменко В.Н., Бойко В.В.* Использование PNK-метода для решения невыпуклых задач оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2012. – С. 47 – 52.
2. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н.* Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121 – 134.
3. *Noll D., Prot O., Rondepierre A.* A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex functions // Pac. J. Optim. – **4** (4). – 2008. – P. 569 – 602.
4. *Hare W., Sagastizabal C*. Computing proximal points of nonconvex functions // Math. Program. – **116** (1–2, Ser. B). – 2009. – P. 221 – 258.
5. *Hare W., Sagastizabal C.* A redistributed proximal bundle method for nonconvex optimization // SIAM J. Optim. – **20**. – 2010. – P. 2442 – 2473.
6. *Лаптин Ю.П.* Некоторые вопросы определения коэффициентов негладких штрафных функций // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2012. – С. 73 – 79.
7. *Лаптин Ю.П.* Использование штрафных функций для решения некоторых задач оптимизации // Там само. – 2013. – С. 95–102.
8. *AMPL* Examples – http://www.ampl.com/EXAMPLES/index.html

Получено 14.04.2014