

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ В ЯДЕРНОЙ И РАДИАЦИОННОЙ ФИЗИКЕ

Л.Н. Киценко, В.Ф. Клепиков

*Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины
Харьков, 61002, ул. Чернышевского, 28, а/я 8812*

*E-mail: ie@kipt.kharkov.ua,
тел./факс +38(057)704-13-60*

Рассмотрены проблемы радиационного материаловедения, радиационной и ядерной физики, решение которых требует использования нелинейных математических моделей. Проведен полный сравнительный анализ соответствия групповой структуры математических моделей с классификацией точек покоя. Полученные результаты могут быть использованы для анализа моделей, используемых для описания сложных многочастичных взаимодействий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем радиационного материаловедения, радиационной и ядерной физики является устойчивость многокомпонентных систем под влиянием внешних воздействий (электромагнитных, нейтронных, пучковых и т.д.). Для описания сложных многочастичных взаимодействий и корреляций в таких системах необходимо использовать нелинейные математические модели, которые описывают различные типы стабильных состояний, периодических колебаний, а также хаотические режимы (см., например, [1-4]). Одним из примеров таких моделей является система нелинейных дифференциальных уравнений типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = U_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = U_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

частные случаи которой и будем рассматривать ниже.

2. ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ ТИПА (1)

Как известно, весьма распространенными в ядерной физике являются случаи распада радиоактивных ядер с образованием не только стабильных, но и радиоактивных дочерних ядер. В последнем случае возникают цепочки распадов. Примером таких цепочек могут служить радиоактивные семейства (ряды). После альфа- и бета-радиоактивных превращений ряды заканчиваются образованием стабильных изотопов. Всего насчитывают 4 радиоактивных семейства. Из них 3 - естественных и 1 - искусственное, когда родоначальником семейства является искусственно получаемый в ядерных реакторах или в ядерных взрывах плутоний. Пример естественных радиоактивных рядов - семейство урана, где первым элементом в цепочке распада является элемент

${}_{92}^{238}U$, а последним - ${}_{82}^{206}Pb$, а также семейство тория, у которого первым элементом в цепочке распада есть ${}_{90}^{232}Th$, последним - ${}_{82}^{208}Pb$. Баланс числа радиоактивных ядер при этом определяется следующими уравнениями [5]:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_3}{dt} = -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2, \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

где λ - постоянная распада; N - число радиоактивных ядер; индекс 1 относится к первичным материнским ядрам, а индексы 2, 3, ... - к дочерним. Из системы (2) легко видеть, что распад ядер N_1 описывается обычным законом распада $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, где N_0 - число радиоактивных ядер в момент времени $t=0$, а баланс ядер каждого дочернего вещества определяется скоростью собственного распада (активностью) и скоростью рождения, равной скорости распада ядер-предшественников.

В динамике и управлении ядерных реакторов важными являются вопросы поведения реактора в различных диапазонах нейтронной мощности. Всего выделяют три основных диапазона: диапазон источника, промежуточный и энергетический. При этом важным является тот факт, что в каждом из этих диапазонов нейтронной мощности один и тот же реактор ведет себя по-разному. Во всех диапазонах нейтронной мощности зависимость среднего количества нейтронов в реакторе от времени можно описать с помощью уравнений точечной кинетики, которые согласно [5] имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\rho - \beta_{eff}) \frac{N}{\Lambda} + \sum_i \lambda_i C_i + Q, \\ \frac{dC_i}{dt} = \frac{N \beta_{eff,i}}{\Lambda} - \lambda_i C_i, \end{cases} \quad (3)$$

где $N(t)$ - среднее число нейтронов в реакторе; ρ - реактивность реактора; Λ - среднее время генерации нейтронов в реакторе; $C_i(t)$ - концентрация эмиттеров запаздывающих нейтронов i -й группы; λ_i - постоянная распада эмиттеров запаздывающих нейтронов i -й группы; $\beta_{eff,i}$ - доля запаздывающих нейтронов i -й группы; β_{eff} - эффективная доля запаздывающих нейтронов; $Q(t)$ - интенсивность внешнего источника нейтронов. Таким образом, система (3) описывает модель поведения среднего количества нейтронов в реакторе для всех диапазонов нейтронной мощности.

Система уравнений, описывающая кинетику реактора (без учета запаздывающих нейтронов) при изменении параметров (эти изменения могут быть достигнуты, например, в результате изменения количества реагирующего вещества, движения регулирующих стержней, которое, в свою очередь, может быть связано с изменением температуры и т.д.), имеет вид [6]:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N + \frac{M}{T_1}, \\ \frac{d\lambda}{dt} = \alpha - \beta N, \\ \frac{dM}{dt} = -\frac{M}{T_1} + \frac{K_1 N}{T}, \end{cases} \quad (4)$$

где λ - экспонента размножения; N - полное число нейтронов; M - число нейтронно-активных ядер с периодом T_1 (в первом уравнении предполагается, что каждое нейтронно-активное ядро испускает один нейтрон); K_1 - коэффициент размножения;

T - время жизни нейтрона в реакторе; α учитывает движение регулирующих стержней, не связанное с мощностью реактора, и другие подобные эффекты; βN включает температурное регулирование и регулирование, связанное с выделяемой мощностью. При рассмотрении данной системы следует учитывать, что второе уравнение не является общим уравнением регулировки реактора. (Здесь возможно введение в правую часть дополнительных членов, пропорциональных изменению полного числа нейтронов в единицу времени).

Автоколебательные процессы в кристаллах при ядерном облучении могут быть описаны системой типа (1). В случае однородного распределения дефектов концентрация дефектов и температура образца определяются следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{dn_i}{dt} = K - \frac{n_i}{\tau_i} - \gamma_{iv} n_i n_v - \gamma_{ii} n_i n_i^- + \\ + \gamma_{iv} n_i n_v^+ + \frac{n_i^+}{\tau_i}, \\ \frac{dn_i^+}{dt} = \gamma_{ii} n_i n_i^- - \frac{n_i^+}{\tau_i} - \gamma_{iv} n_i n_i^+, \\ C \frac{dT}{dt} = \zeta E_{iv} K + E_{iv} \gamma_{iv} n_i n_v + E_i \frac{n_i}{\tau_i} + \\ + E_i \frac{n_v}{\tau_v} + (E_{iv} - E_i) \gamma_{iv} n_i n_v + \\ + (E_{iv} - E_{iv}) \gamma_{iv} n_i n_v + E_{iv} \left(\gamma_{iv} n_i n_v^- - \frac{n_{iv}^+}{\tau_{iv}} \right) + \\ + E_i \left(\gamma_{ii} n_i n_i^- - \frac{n_i^+}{\tau_i} \right) - \beta(T - T_1), \end{cases} \quad (5)$$

где n_i , n_i^- , n_v , n_{iv} - концентрации межузельных атомов, захваченных межузельных атомов, вакансий и захваченных вакансий соответственно; K - количество дефектов (вакансий и межузельных атомов), возникающих под воздействием излучения в единице объема в единицу времени; γ_{iv} - скорость рекомбинации вакансий и межузельных атомов;

$\frac{1}{\tau_i}$ - вероятность флуктуационного отрыва межузельного атома. Также к системе (5) необходимо добавить 2 уравнения, которые получаются из первых двух заменой $i \leftrightarrow v$.

В большинстве случаев для систем нелинейных дифференциальных уравнений типа (1) невозможно найти аналитические решения. Основными методами их анализа являются различные численные методы расчета. Однако ряд важных свойств таких систем может быть найден аналитически. К таким свойствам относятся различные типы симметрии, допускаемые уравнениями, и классификация точек покоя. Важным также является связь между различными режимами поведения уравнений (1) (устойчивые режимы, периодические колебания либо хаотические режимы). Рассматриваемые уравнения позволяют описывать процессы самоорганизации в соответствующих физических системах.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Проведем исследование системы (1) на устойчивость для случая $n = 2$. После линеаризации будем иметь линейную однородную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = dx + ey, \end{cases} \quad (6)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, a, b, d, e - постоянные величины. Будем искать решение в виде $x = \alpha_1 e^{k_1 t}$, $y = \alpha_2 e^{k_2 t}$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \alpha_1(a-k) + \alpha_2 b = 0, \\ \alpha_1 d + \alpha_2(e-k) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решив систему (7), находим, что

$$k_{1,2} = \frac{(a+e) \pm \sqrt{(a-e)^2 + 4bd}}{2}. \quad \text{С учетом этого}$$

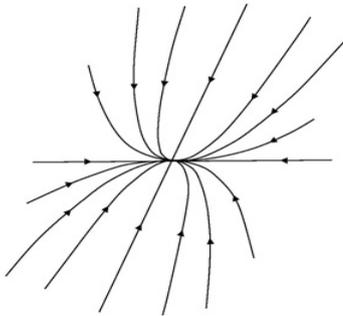
общее решение системы (6) может быть записано в виде

$$\begin{cases} x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \\ y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} \operatorname{Re} k_1 < 0, \\ \operatorname{Re} k_2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \operatorname{Im} k_1 = 0, \\ \operatorname{Im} k_2 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

что соответствует асимптотически устойчивой точке покоя $x = 0$, $y = 0$, поскольку из-за наличия множителей $e^{k_1 t}$ и $e^{k_2 t}$ в (8) все точки, находящиеся в начальный момент $t = t_0$ в любой δ -окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε -окрестности начала координат, а при $t \rightarrow \infty$ стремятся к началу координат. На рисунке изображено расположение траекторий около точки покоя рассматриваемого типа (стрелками указано направление движения по траекториям при возрастании t) [8].



Расположение траекторий около точки покоя типа "устойчивый узел"

Найдем значения параметров, соответствующие точке покоя "устойчивый узел". Из условий (9) видно, что нужно рассматривать систему таких неравенств:

$$\begin{cases} (a+e) + \sqrt{(a-e)^2 + 4bd} < 0, \\ (a+e) - \sqrt{(a-e)^2 + 4bd} < 0, \end{cases} \quad (10)$$

также должно выполняться условие:

$$(a-e)^2 + 4bd > 0. \quad (11)$$

В итоге, решив (10) и учитывая (11), получаем следующие значения для параметров рассматриваемой точки покоя:

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ -\frac{(a-e)^2}{4d} < b < \frac{ae}{d}, \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+e < 0, \\ \frac{ae}{d} < b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

Аналогично находим значения параметров для других точек покоя, в результате чего получаем следующий результат:

1) Устойчивый узел

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ -\frac{(a-e)^2}{4d} < b < \frac{ae}{d}, \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+e < 0, \\ \frac{ae}{d} < b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

2) Неустойчивый узел

$$\begin{cases} a+e > 0, \\ -\frac{(a-e)^2}{4d} < b < \frac{ae}{d}, \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+e > 0, \\ \frac{ae}{d} < b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

3) Седло

$$\begin{cases} a+e > 0, \\ b > \max\left(-\frac{(a-e)^2}{4d}, \frac{ae}{d}\right), \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a+e > 0, \\ b < \min\left(-\frac{(a-e)^2}{4d}, \frac{ae}{d}\right), \\ d < 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ b > \max\left(-\frac{(a-e)^2}{4d}, \frac{ae}{d}\right), \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ b < \min\left(-\frac{(a-e)^2}{4d}, \frac{ae}{d}\right), \\ d < 0. \end{cases}$$

4) Устойчивый фокус

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+e < 0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

5) Неустойчивый фокус

$$\begin{cases} a+e > 0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+e > 0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

6) Центр (граничный цикл)

$$\begin{cases} a+e=0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \text{ или } \\ d > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a+e=0, \\ b < -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d < 0. \end{cases}$$

7) Дикритический устойчивый узел

$$\begin{cases} a+e < 0, \\ b = -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d \neq 0. \end{cases}$$

8) Дикритический неустойчивый узел

$$\begin{cases} a+e > 0, \\ b = -\frac{(a-e)^2}{4d}, \\ d \neq 0. \end{cases}$$

4. НАХОЖДЕНИЕ ГРУППОВОЙ СТРУКТУРЫ И ЕЕ СООТВЕТСТВИЕ ТОЧКАМ ПОКОЯ

Найдем групповую структуру линеаризованной системы (1) для случая $n=2$, используя алгоритм Ли [9]. Для этого сведем систему (10) к уравнению от одной искомой функции $x(t)$:

$$\dot{x} = x(a+e) + x(bd-ae). \quad (12)$$

Допускаемый оператор имеет вид:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x},$$

где $\xi = \xi(t, x)$, $\eta = \eta(t, x)$. Тогда продолженный оператор запишется в виде

$$X_2 = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x_t} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial x_{tt}},$$

где $\zeta_1 = D_t(\eta) - x_t D_t(\xi)$ и $\zeta_{11} = D_t(\zeta_1) - x_{tt} D_t(\xi)$, а

$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + x_t \frac{\partial}{\partial x} + x_{tt} \frac{\partial}{\partial x_t}$. Подействовав X_2 на

уравнение (12), получим

$$\begin{aligned} X_2(x(a+e) + x(bd-ae)) &= -\eta(bd-ae) - \\ &- \zeta_1(a+e) + \zeta_{11}, \end{aligned}$$

тогда определяющее уравнение запишется так:

$$(-\eta(bd-ae) - \zeta_1(a+e) + \zeta_{11}) - x(a+e) + x(bd-ae) = 0. \quad (13)$$

После нахождения и подстановки коэффициентов ζ_1 и ζ_{11} в определяющее уравнение оно примет вид:

$$\begin{aligned} &(-\eta(bd-ae) - (a+e)\eta_t + \eta_{tt}) + \\ &+ x((bd-ae)\eta_x - 2(bd-ae)\xi_t) - 3x x_t (bd-ae)\xi_x + \\ &+ x_t(- (a+e)\xi_t + 2\eta_{xt} - \xi_{tt}) + \\ &+ (x_t)^2 (\eta_{xx} - 2(a+e)\xi_{xx} - 2\xi_{xt}) - (x_t)^3 \xi_{xxx} = 0. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при независимых переменных к нулю, имеем систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} -\eta(bd-ae) - (a+e)\eta_t + \eta_{tt} = 0, \\ (bd-ae)\eta_x - 2(bd-ae)\xi_t = 0, \\ 3(bd-ae)\xi_x = 0, \\ - (a+e)\xi_t + 2\eta_{xt} - \xi_{tt} = 0, \\ \eta_{xx} - 2(a+e)\xi_{xx} - 2\xi_{xt} = 0, \\ \xi_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Решая систему (14) относительно ξ и η , найдем групповую структуру уравнения (12).

Решение системы (14) имеет различный вид при различных значениях параметров a, b, d, e . Так в трех частных случаях (см. ниже пункты I, II, III) имеем векторные пространства с базисами X_1, X_2, X_3 , каждое из которых образует 3-мерную алгебру Ли, т. е. в этих случаях система допускает 3 группы симметрий.

I. Для параметров, когда $bd-ae \neq 0, a+e \neq 0, b \neq -\frac{(a-e)^2}{4d}$, имеем $X_1 = e^{\frac{1}{2}t((a+e)+\sqrt{(a+e)^2+4(bd-ae)})} \frac{\partial}{\partial x}$,

$$X_2 = e^{\frac{1}{2}t((a+e)-\sqrt{(a+e)^2+4(bd-ae)})} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

II. Для $bd-ae \neq 0, a+e \neq 0, b = -\frac{(a-e)^2}{4d}$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = e^{\frac{1}{2}t(a+e)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = te^{\frac{1}{2}t(a+e)} \frac{\partial}{\partial x}.$$

III. Для $bd-ae \neq 0, a+e = 0, b \neq -\frac{(a-e)^2}{4d}$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = e^{t\sqrt{bd-ae}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = e^{-t\sqrt{bd-ae}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

В двух остальных случаях (см. ниже пункты IV, V) имеем векторные пространства с базисами X_1, X_2, \dots, X_8 , образующие 8-мерную алгебру Ли. В этих случаях система допускает 8 групп симметрий.

IV. Если $bd-ae = 0, a+e \neq 0, b \neq -\frac{(a-e)^2}{4d}$, тогда

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = e^{t(a+e)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = e^{-t(a+e)} \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_5 &= xe^{-t(a+e)} \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_6 = e^{t(a+e)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (a+e)x \frac{\partial}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$X_7 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_8 = x \left(\frac{\partial}{\partial t} + (a+e)x \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

V. Если $bd-ae = 0, a+e = 0, b = -\frac{(a-e)^2}{4d}$, тогда

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 &= t \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_6 = t \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_7 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_8 &= tx \frac{\partial}{\partial t} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученную групповую структуру с точками покоя, которые были найдены в разд. 3, видим, что если линеаризованная система (1) в случае $n=2$ имеет какую-либо из точек покоя (пункты 1) - 8)), то она допускает 3 группы

симметрий (пункты I, II, III), а если система вырождена ($bd - ae = 0$), то в этом случае она допускает 8 групп симметрий (пункты IV, V).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены примеры задач радиационной физики, приводящие к системам дифференциальных уравнений типа (1).

С помощью алгоритма Ли найдена групповая структура линеаризованной системы (1) в окрестности точек покоя $\{x_{i0}\}$ (для $n = 2$), а также исследовано поведение ее решений вблизи точек покоя. Проведен полный сравнительный анализ соответствия групповой структуры системы (1) и классификации ее точек покоя.

Сравнительный анализ показал, что если линеаризованная система (1) в случае $n = 2$ имеет какую-либо из точек покоя, то она допускает 3 группы симметрий, а если система вырождена, то она допускает 8 групп симметрий. Обсуждаются полученные результаты и приложения моделей типа (1) к задачам радиационной и ядерной физики.

Эффективность взаимосвязи между групповой структурой и классификацией точек покоя для систем типа (1) существенно возрастает с увеличением n и позволяет точно решать широкий круг задач типа (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Martin. Contribution of dissipative processes to radiation-induced solid-solution instability // *Phys. Rev. B.* 1980, v.21, p. 2122 – 2133.
2. И.А. Ахиезер, Л.Н. Давыдов. *Введение в теоретическую радиационную физику металлов и сплавов*. К.: «Наукова думка», 1985, 142 с.
3. C. Abromeit. Microstructural Self-Organization In Irradiated Systems // *IJMP B.* 1989, v.3, N 9, p. 1303 – 1342.
4. E.P. Wigner. Theoretical Physics in the Metallurgical Laboratory of Chicago // *Journ. Appl. Phys.* 1946, v.17, p. 857.
5. В.Ф. Украинцев. *Эффекты реактивности в энергетических реакторах*. Обнинск: ИАТЭ, 2000, 60 с.
6. А.И. Ахиезер, И.Я. Померанчук. *Введение в теорию нейтронных мультиплицирующих систем (реакторов)*. М.: ИздАТ, 2002, 368 с.
7. В.И. Сугаков. *Основы синергетики*. Київ: «Обереги», 2001, 287 с.
8. Л.Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М., 1969, 424 с.
9. Н.Х. Ибрагимов. *Группы преобразований в математической физике*. М.: «Наука», 1983, 278 с.

Статья поступила в редакцию 10.09.2008 г.

ДО ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ МОДЕЛЕЙ В ЯДЕРНІЙ ТА РАДІАЦІЙНІЙ ФІЗИЦІ

Л.Н. Кіценко, В.Ф. Клепиков

Розглянуто проблеми радіаційного матеріалознавства, радіаційної і ядерної фізики, рішення яких вимагає використання нелінійних математичних моделей. Проведено повний порівняльний аналіз відповідності групової структури математичних моделей із класифікацією точок спокою. Отримані результати можуть бути використані для аналізу моделей, використовуваних для опису складних багаточасткових взаємодій.

TO THE THEORY OF MODELS STABILITY IN NUCLEAR AND RADIATION PHYSICS

L.N. Kitsenko, V.F. Klepikov

Problems of radiative study of materials, radiation physics and nuclear physics, solution of which demands use of nonlinear mathematical models are considered. Total comparative analysis of compliance between group structure of mathematical models and classification of stationary points is carried out. Received results can be used for the analysis of models used for the description of difficult multipartial interactions.