

# АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ГАУССОВЫМ ПУЧКОМ

В.П.Милантьев, С.П.Степина

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия  
vmilantiev@mx.pfu.edu.ru

Проведено исследование авторезонансного ускорения электронов в поле лазерного аксиально-симметричного пучка первого порядка. Показано, что на одном и том же интервале темп ускорения в пучке первого порядка может быть выше, чем в случае пучка низшей моды, при этом для эффективного ускорения необходимо, чтобы поперечные размеры электронного пучка не превосходили 1/4 сужения ускоряющего гауссова пучка. Дана оценка возможности ускорения электронов излучением высших мод.

## 1. МОДЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

При теоретическом описании лазерного излучения в процессе авторезонансного ускорения электронов обычно используется приближение гауссова пучка (ГП) низшей моды [1–4]. Однако при этом остается неясным вопрос о возможности авторезонансного ускорения электронов излучением высших мод. В общем, решение параболического уравнения в случае аксиально-симметричных пучков представляется в виде линейной суперпозиции мод высших порядков [5]:

$$A(r, z) = \exp\{-\zeta\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(0)}{(1+iD)^{m+1}} L_m[\zeta] \quad (1.1)$$

Здесь  $\zeta \equiv \frac{r^2}{a^2(1+iD)}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние от оси пучка (оси  $z$ ),  $a$  – сужение пучка,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  – волновое число,  $\omega$  – частота волны,  $c$  – скорость света в вакууме,  $D = \frac{2z}{ka^2}$  –

безразмерная дифракционная длина,  $L_m[\zeta]$  – полиномы Чебышева-Лягерра порядка  $m$ . Число  $m$  не может быть слишком большим, чтобы не выходить за границы применимости параболического уравнения.

Для рассмотрения движения заряженных частиц необходимо знать отдельные компоненты поля ускоряющего излучения. Будем считать, что выражением (1.1) определяется векторный потенциал электромагнитного поля. Для простоты положим, что вектор-потенциал имеет только компоненту  $A_x$ , и рассмотрим моду первого порядка ( $m=1$ ). В этом случае вектор-потенциал описывается выражением

$$A_x(r, z, t) = \frac{A(0)}{(1+iD)^2} (1-\zeta) \times \exp\{-\zeta\} \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad (1.2)$$

Такой пучок имеет максимальную амплитуду на оси и минимальную при  $z = a$ , т.е. «темное кольцо».

После вычислений векторов поля с учетом того, что ширина пучка должна быть больше длины волны ( $ka \gg 1$ ), получаем:

$$\begin{aligned} E_x &= \varepsilon_x e^{i(\theta_0 + \Psi_1)} + \text{к.с.}, E_y = \varepsilon_y e^{i(\theta_0 + \Psi_2)} + \text{к.с.}, \\ E_z &= \varepsilon_z e^{i(\theta_0 + \Psi_3)} + \text{к.с.}, B_x = 0, \\ B_y &= \beta_y e^{i(\theta_0 + \Psi_1)} + \text{к.с.}, B_z = \beta_z e^{i(\theta_0 + \Psi_3)} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

к.с. означает комплексное сопряжение.

В этих формулах введены обозначения для действительных амплитуд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \beta_y &= \frac{A(0)k\sqrt{(r^2 - a^2)^2 + a^4 D^2}}{a^2(1+D^2)^{3/2}} e^{-\eta}, \\ \varepsilon_y &= \frac{4A(0)xy\sqrt{(r^2 - 3a^2)^2 + 9a^4 D^2}}{ka^6(1+D^2)^{5/2}} e^{-\eta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{2A(0)x\sqrt{(r^2 - 2a^2)^2 + 4a^4 D^2}}{a^4(1+D^2)^2} e^{-\eta}, \\ \beta_z &= \frac{2A(0)y\sqrt{(r^2 - 2a^2)^2 + 4a^4 D^2}}{a^4(1+D^2)^2} e^{-\eta}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а также для фаз:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= kz - \omega t + \eta, \Psi_1 = \arctg \frac{1 - D^2 - \eta + 3\eta D^2}{2D - 3\eta D + \eta D^3}, \\ \Psi_2 &= \arctg \frac{(D^4 - 6D^2 + 1)(3 - \eta) + 4(1 - D^2)\eta D^2}{4D(1 - D^2)(3 - \eta) - \eta D(D^4 - 6D^2 + 1)}, \\ \Psi_3 &= \arctg \frac{(1 - 3D^2)\eta D - D(3 - D^2)(2 - \eta)}{(1 - 3D^2)(2 - \eta) + D(3 - D^2)\eta D}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\eta = \frac{r^2}{a^2(1+D^2)}$ .

Обратим внимание, что гауссов пучок не может быть строго поперечным.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА

Рассмотрим релятивистское движение электрона в поле лазерного излучения (1.3), распространяющегося вдоль однородного магнитного поля  $B_0 = (0, 0, B_0)$ . Для выделения циклотронного вращения электрона введем стандартную замену:

$$p = p_{\parallel} e_z + p_{\perp} (e_x \cos \theta_c + e_y \sin \theta_c) \quad (2.1)$$

Здесь  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  – величины продольной и поперечной составляющих импульса по отношению

к направлению магнитного поля,  $\theta_c$  – фаза циклотронного вращения.

Уравнения движения электрона в указанных полях имеют довольно громоздкий вид. Их можно несколько упростить, усредняя по быстрым фазам  $\theta_0$  и  $\theta_c$  и считая резонансную комбинацию фаз  $\theta = \theta_0 + \theta_c + \Psi_1$  полубыстрой переменной. В результате получаем упрощенную систему уравнений движения электрона в области электронно-циклотронного резонанса (ЭЦР):

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{d\tau} &= -\frac{\mu p_{\perp} \varepsilon}{\gamma} e^{-\eta} \cos \theta ; \\ \frac{dp_{\perp}}{d\tau} &= -\mu \varepsilon \left(1 - \frac{p_{\parallel}}{\gamma}\right) e^{-\eta} \cos \theta ; \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\frac{\mu p_{\perp} \varepsilon}{\gamma} e^{-\eta} \cos \theta ; \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{p_{\parallel}}{\gamma} - 1 + \frac{\Omega}{\gamma} + \frac{\mu \varepsilon}{p_{\perp}} \left(1 - \frac{p_{\parallel}}{\gamma}\right) e^{-\eta} \sin \theta + \delta ; \\ \frac{dD}{d\tau} &= \frac{2p_{\parallel}}{k^2 a^2 \gamma}, \text{ где } \varepsilon = \frac{\sqrt{(\rho^2 - 1)^2 + D^2}}{(1 + D^2)^{3/2}}, \\ \delta &= \frac{2p_{\parallel} (1 - D^2)}{\gamma k^2 a^2} \left\{ \rho^2 (1 - D^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\rho^4 - \rho^2 (D^2 - 5) + 2(D^2 + 1)}{(\rho^2 - 1)^2 + D^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры: безразмерные компоненты импульса в единицах  $m_0 c$ ; безразмерное время  $\tau = \omega t$ ; релятивистский фактор  $\gamma = \sqrt{1 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}$ ; безразмерное отклонение электронов от оси  $\rho = \frac{r}{a}$ ; безразмерная амплитуда волны  $\mu = \frac{ekA(0)}{m_0 c \omega}$ ; отношение классической циклотронной частоты к частоте волны  $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{eB_0}{m_0 c \omega}$ .

Нетрудно видеть, что система уравнений (2.2) содержит интеграл

$$\gamma - p_{\parallel} = \text{const} \equiv Y. \quad (2.3)$$

В случае плоской вакуумной электромагнитной волны условие циклотронного резонанса

$$\gamma - p_{\parallel} = \Omega \quad (2.4)$$

совпадает с интегралом (2.3) при  $Y = \Omega$ . Это и есть авторезонанс.

В рассматриваемом случае ГП условие циклотронного резонанса отличается от (2.4) на добавочный малый член  $\delta$ , который зависит от параметров инжектируемых электронов. Хотя этот член имеет порядок  $\frac{1}{(ka)^2}$ , однако при резонансе он становится существенным, поэтому отбрасывать его нельзя. Ясно, что в этом случае условие точного

электронного циклотронного резонанса (ЭЦР), заданное в начальный момент времени, не сохраняется во все время движения электрона, поскольку оно не совпадает с интегралом движения (2.3). Это связано с расстройкой фазового синхронизма частицы с волной. Вместе с тем для частиц, инжектируемых строго на оси ГП ( $\rho_0 = 0$ ), дополнительный малый член  $\delta$  обращается в нуль, так что на начальной стадии ускорения условие циклотронного резонанса мало отличается от интеграла движения. Действительно, как показывают расчеты, на ускоряющем интервале порядка рэлеевской длины нарушение условия циклотронного резонанса (2.4) оказывается не слишком большим. Это и обеспечивает возможность авторезонансного ускорения лазерным пучком (рис.1).

z, см

Рис. 1. Отклонение от условия точного циклотронного резонанса

Выполнение условия циклотронного резонанса в начальный момент времени приводит к ограничению, налагаемому на начальную энергию электронов:

$$\gamma \geq \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}. \quad (2.5)$$

В случае лазерного излучения параметр  $\Omega \ll 1$ , поэтому начальные энергии ускоряемых электронов должны быть достаточно велики:  $\gamma_0 \approx \frac{1}{2\Omega} \gg 1$ . Другими словами, рассматриваемый режим ускорения возможен для ультрарелятивистских электронов.

С помощью усредненной системы уравнений (2.2) можно провести качественную оценку набора энергии электронами, находящимися вблизи оси симметрии ускоряющего поля:

$$\gamma(z) \approx \gamma_0 + \mu p_{\perp} \Omega \left( zk - \frac{4z^3}{3ka^4} \right). \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что на начальном этапе ускоряющего промежутка прирост энергии мало отличается от линейного закона. Однако, приведенная оценка является весьма ограниченной и не дает полной картины ускорения.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Точная система уравнений движения электрона и усредненная система (2.2) решались численно по методу Рунге-Кутты. Вычисления проводились в случае  $CO_2$ -лазера с интенсивностью  $I = 1,8 \cdot 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>, длиной волны  $\lambda = 10,6$  мкм, при условии циклотронного резонанса в момент инжекции. Ширина гауссова пучка считалась равной  $a = 0,16$  см. При данных параметрах гауссова пучка рэлеевская длина равна  $z_R = 75,8$  см. Величина магнитного поля  $B_0 = 100$  кГс. Рассматривается

движение частицы с начальной минимальной энергией  $E = 25,9$  МэВ ( $\gamma_0 = 50,8$ ). Вычисления проводились на интервале порядка двух рэлеевских длин ( $\approx 120$  см).

Исследование изменения энергии электронов, инжектируемых в точке  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  при различных резонансных фазах в достаточно широком диапазоне  $\theta = [0, 2\pi]$ , показывает, что в режим синхронного ускорения попадают все электроны, независимо от их начальной фазы (рис.2).

E, МэВ  
z, см

Рис. 2. Набор энергии частицей с начальными фазами в интервале  $[0, 2\pi]$ : а)  $\theta = \pi + \pi/6$ , б)  $\theta = \pi$ , в)  $\theta = \pi - \pi/6$

Видно, что на интервале порядка рэлеевской длины (около 70 см) все частицы достигают примерно одинаковой энергии – около 275 МэВ, т.е. энергия частиц возрастает более чем на порядок. Поперечное отклонение частиц от оси симметрии на интервале ускорения является небольшим и не достигает даже половины ширины ГП (рис. 3). Ускоряющаяся частица в плоскости  $x, y$  раскручивается по спирали, пока не достигается предельный цикл (на расстоянии порядка 120 см).

Наряду с решением усредненной системы (2.2) проводилось численное решение точной системы уравнений. Точная система уравнений является намного сложнее усредненной системы, поскольку в нее входит не только полубыстрая резонансная фаза, но также и быстрые фазы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_c$ . Некоторые результаты численного решения представлены на рис. 4.

z, см

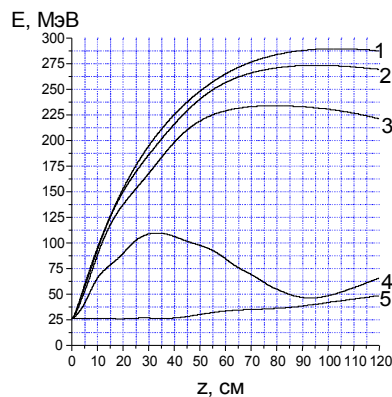


Рис. 5. Набор энергии частицами и поперечное отклонение частиц от оси симметрии на ускоряющем промежутке: 1)  $x = 0, y = 0$ ; 2)  $x = 0, y = a/8$ ; 3)  $x = 0, y = a/4$ ; 4)  $x = 0, y = a/2$ , 5)  $x = 0, y \approx a$

Рис. 3. Поперечное отклонение частиц от оси симметрии на ускоряющем промежутке при разных фазах: а)  $\theta = \pi + \pi/6$ , б)  $\theta = \pi$ , в)  $\theta = \pi - \pi/6$

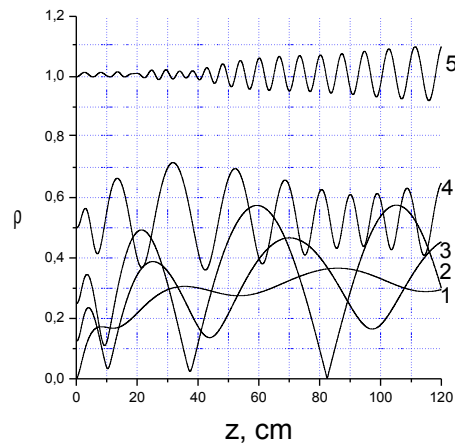
Видно, что характер изменения энергии существенно зависит от начальных соотношений между быстрыми фазами и не является монотонным. Расчеты, проведенные при различных начальных значениях быстрых фаз, показывают, что в подавляющем большинстве случаев происходит ускорение частиц на расстоянии порядка рэлеевской длины, и лишь при некоторых «неблагоприятных» фазах резонанс срывается на сравнительно небольшом расстоянии. Частицы с такими фазами выбывают из режима синхронного ускорения.

E, МэВ  
z, см

Рис. 4. Набор энергии частицей с начальными фазами  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ : 1)  $\theta_c = 0, \theta_1 = \pi$ ; 2)  $\theta_c = 5\pi/6, \theta_1 = \pi/6$ ; 3)  $\theta_c = 2\pi/3, \theta_1 = \pi/3$ ; 4)  $\theta_c = \pi/2, \theta_1 = \pi/2$

Расчет показывает, что поперечное отклонение частиц оказывается несколько меньшим, чем это следует из решения усредненной системы уравнений. Вместе с тем в поперечной плоскости независимо от фаз предельный цикл на расстоянии 120 см не существует.

На рис. 5 показан характер набора энергии электронами в зависимости от их положения в плоскости симметрии ГП в момент инжекции. Кривая 1 соответствует частице, инжектируемой в центре сужения пучка, т.е.  $x = y = z = 0$ . Кривая 2 отвечает частице, инжектируемой на  $1/8$  ширины пучка. Кривые 3, 4 – на  $1/4$  и  $1/2$  ширины пучка, соответственно. Кривая 5 описывает частицу, инжектируемую на границе ускоряющего ГП ( $\rho = 1$ ).



Видно, что для эффективного ускорения начальный поперечный размер электронного пучка не должен превышать  $1/4$  сужения ускоряющего ГП, при этом амплитуда осцилляций ширины электронного пучка по мере ускорения не превышает половины ширины ГП. Таким образом, для эффективного ускорения электронного пучка в синхронном режиме необходимо, чтобы размеры электронного пучка были менее  $1/4$  сужения ускоряющего ГП.

Анализ ускорения ультрарелятивистских электронов гауссовым лазерным излучением в синхронном режиме проводился при условии, что электроны инжектируются в плоскости сужения ГП при циклотронном резонансе. Синхронность взаимодействия электронов с излучением обеспечивается тем, что условие циклотронного резонанса почти сохраняется на расстоянии порядка рэлеевской длины (см) (рис. 1). Были рассмотрены также частицы, для которых заведомо существует начальная расстройка частот. Оказалось, что при расстройке соответствующей максимальному значению (см. рис. 1), на одном и том же расстоянии электрон набирает даже большую энергию, чем при выполнении точного циклотронного резонанса. При расстройках, несколько больших и меньших указанного максимального значения, набор энергии уменьшается.

Расчеты показывают, что с увеличением интенсивности ускоряющего ГП существенно возрастает не только конечная энергия, набираемая частицей, но и темп ускорения. Таким образом, создание высокоэффективных авторезонансных ускорителей малых размеров, с помощью мощного лазерного излучения возможно также с использованием ГП первой моды.

Для заключения об эффективности ускорения электронов первой модой ГП проведено сравнение результатов в данной работе с результатами работы [2] (рис. 6). Кривые 1 – 3 описывают характер набора энергии электронами в синхронном режиме в случаях плоской вакуумной волны (1), ГП при пренебрежении продольной составляющей электрического поля (2) и при точном решении уравнений Максвелла (3), кривая 4 соответствует первой моде ГП при одинаковых параметрах.

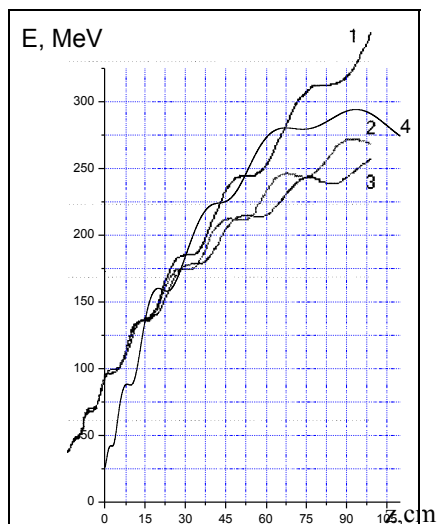


Рис. 6. Энергия электронов, ускоряемых: 1) линейно-поляризованной вакуумной плоской волной, 2) ГП при пренебрежении продольной составляющей электрического поля, 3) ГП при точном решении уравнений Максвелла, 4) модой первого порядка

Видно, что темп ускорения частицы в поле ГП первой моды оказывается выше, чем в поле ГП низшей моды. При этом на расстоянии порядка рэлеевской длины частицы набирают практически такую же энергию, как и в случае вакуумной плоской волны. Анализ полученных результатов показывает, что даже при «неблагоприятных» фазах ускорение электронов в поле ГП первой моды происходит с большей эффективностью, чем в случае ГП низшей моды, рассмотренного в работе [2]. Таким образом, можно предположить, что возможно подобрать такую конфигурацию ГП, которая обеспечила бы более эффективное ускорение частиц, чем в случае ГП низшей моды.

Для оценки возможности ускорения электронов лазерным излучением высших мод рассмотрим отношение двух последовательных членов в разложении (1.1):

$$\left| \frac{A_{m+1}(0)L_{m+1}(\zeta)}{A_m(0)(1+iD)L_m(\zeta)} \right|$$

При небольшом поперечном отклонении ускоряющихся частиц параметр  $|\zeta| \ll 1$ . Тогда, учитывая разложение полиномов  $L_m(\zeta)$ , получаем, что  $A_{m+1}(0) \ll \frac{A_m(0)}{m+1}$ . Это значит, что эффективность ускорения частиц излучением высших мод существенно уменьшается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V.P.Milantiev, Y.N.Shaar // *Int. Conf. Phenomena in Ion Gases. Warsaw. 1999-Proc.*, v. 2. p. 105 – 108.
2. В.П.Милантьев, Я.Н.Шаар // *ЖТФ*. 2000, т. 70(8), с. 100 – 103.

3. В.П.Милантьев, Я.Н.Шаар // *Вопросы атомной науки и техники*. 2000, №1. с. 117 – 121.
4. J.L.Hirshfield, C.P.Wang // *Phys.Rev.* 2000, v. E61, p. 7252.
5. М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков // *Теория волн.*; М.: Наука. 1990.

Работа выполнена по программе  
Минобразования РФ «Университеты  
России – Фундаментальные исследования».