УДК 621.371

ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СКОРОСТЬЮ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В.И. Ткаченко, И.В. Ткаченко
Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", Харьков, Украина
E-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua

Рассмотрено взаимодействие гармонического осциллятора, движущегося с нерелятивистской скоростью, со средой, диэлектрическая проницаемость которой изменяется по синусоидальному закону. Рассмотрены два предельных случая движения такого осциллятора в среде: когда взаимодействие между собственными волнами среды отсутствует и когда собственные волны связаны параметрически. Показано, что длина волны излучения в первом случае может значительно превышать период неоднородности, а во втором случае – одного порядка с ним. Показано, что в среде с периодической неоднородностью возможно достижение мощностей излучения, сравнимых с мощностями излучения осциллятора в вакууме (первый случай). Во втором случае получено выражение мощности излучения, которое по виду соответствует потерям частицы при параметрическом черенковском излучении. Показано, что излучение дискретно по параметру, равному отношению характерного размера осциллятора к длине волны.

Исследование излучения гармонически осциллирующего заряда, движущегося с нерелятивистской скоростью в среде с периодически изменяющейся (по синусоидальному закону) диэлектрической проницаемостью, представляет большой практический интерес в связи с возможностью генерации электромагнитного излучения. Известно, что такие осцилляторы могут эффективно излучать "длинноволновое" (длина волны значительно превышает период неоднородности) излучение [1,2]. Однако, для исследования излучения таких осцилляторов в области длин волн, сравнимых с периодом неоднородности, необходимо дополнительное исследование. Поэтому в данной работе продолжено исследование взаимодействия осциллирующего заряда, движущегося с нерелятивистской скоростью в периодически изменяющейся среде.

Аналогично [1,2] считаем диэлектрическую проницаемость заданной в виде

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + q\cos(\kappa \cdot r), \qquad (1)$$

где: k – вектор обратной решетки периодически неоднородной среды; $q \ll \varepsilon_0$ – показатель пространственной неоднородности среды; r – пространственная координата.

Поле излучения будем описывать уравнениями Максвелла:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},\; rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad (2)$$

где $D = \varepsilon(r)E$, $B = \mu H$ – векторы электрической и магнитной индукций соответственно. В рассматриваемом случае среда немагнитная, поэтому в (2) можно положить $\mu = 1$.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены материальными уравнениями, описывающими траекторию осциллятора

$$r' = v_0 t + r_0 \sin\Omega t \qquad (3)$$

и плотность создаваемого им тока

$$j = e\delta(r - v_0 t - r_0 \sin\Omega t)(v_0 + r_0\Omega\cos\Omega t). \qquad (4)$$

Здесь $\delta(a)$ – трехмерная дельта–функция Дирака, v_0 и Ωr_0 – произвольные, никакими условиями не ограниченные, постоянная и осцилляторная скорости заряженной частицы соответственно; $e < 0$ – элементарный заряд электрона. Считаем, что потери энергии осциллятора малы и вследствие этого полагаем неизменной его траекторию. В этом случае уравнения (2) и соотношение (4) могут быть приведены к Фурье-образам, результаты анализа которых приведем ниже.

Аналогично [1, 2] в работе рассмотрены два предельных случая движения такого осциллятора в среде: когда взаимодействие между собственными волнами среды отсутствует ($D_0(\omega,k) \approx 0$ и $D_0(\omega,k \pm \kappa) \neq 0$, дополнение к результатам работ [1, 2]) и когда собственные волны параметрически связаны между собой ($D_0(\omega,k)D_0(\omega,k-\kappa) \approx 0$, где $D_0(\omega,k)$ – дисперсионное соотношение, описывающее распространение в среде собственной волны с частотой ω и волновым числом k.

В первом случае проанализировано излучение нерелятивистского осциллятора в периодической среде со следующими параметрами: $\kappa \parallel r_0 \parallel oz$, $|\kappa| >> |k|$, $v_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$. При этих предположениях мощность излучения получена в [1, 2] и имеет следующий вид:

$$Q_c = \frac{dW_c}{dt} = \frac{e^2\Omega^2}{c}\frac{q^2\beta_\perp^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{m^2}J_n^2(m)\int_0^{\pi}(\sin\theta)^3 d\theta, \qquad (5)$$

где $\pm\, m = (k \pm \kappa) r_0 >> 1$; $\beta_\perp = \dfrac{\Omega\, r_0}{c} << 1$ – отношение осцилляторной скорости к скорости света; r_0 и κ – радиус-векторы, характеризующие размер осциллятора и пространственную периодичность среды соответственно; $q << \varepsilon_0$ – показатель пространственной неоднородности среды; ε_0 – диэлектрическая проницаемость среды; v_0 – постоянная скорость заряженной частицы.

В выражении (5) бесконечная сумма преобразуется в простое выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{m^2} J_n^2(m) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} m^2 . \qquad (6)$$

В этом случае вычисление отношения мощности излучения (5) к мощности излучения осциллятора в вакууме [3] $Q_c / Q_{\text{вак}}$ дает величину порядка $3 q^2 m^2 / 8$, которая при значениях параметров $q \approx m^{-1} \approx 10^{-5}$ может быть сравнима или превосходить единицу. При этом диаграммы направленности излучений в вакууме и периодической среде совпадают.

На Рис.1 приведен результат численного расчета $Q_c / Q_{\text{вак}}$ при следующих значениях параметров $q = 10^{-5}$ и $m = 3 \cdot 10^5$. Изображенная на этом рисунке кривая, образованная пересечением плоскости $Q_c / Q_{\text{вак}} = 1$ с поверхностью $Q_c / Q_{\text{вак}}$, соответствует равенству мощностей излучения осцилляторов в обеих средах. Из рисунка следует, что при малых значениях $\beta_\perp$ отношение пропорционально m^2. С приближением $\beta_\perp$ к своему предельному значению – единице, мощности излучения сравниваются с ростом параметра m.

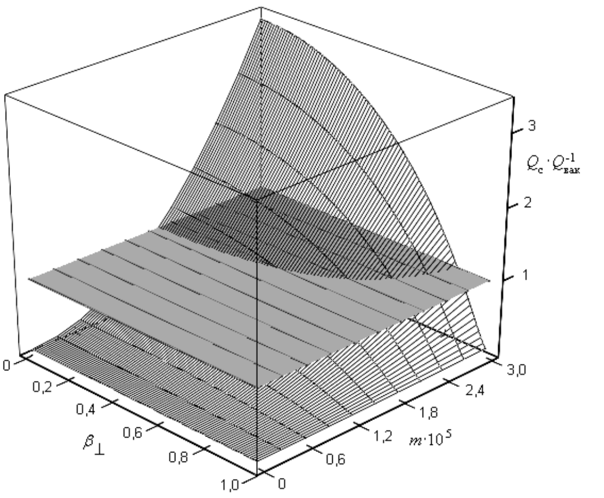

Рис.1. Зависимость отношения мощности излучения осциллятора в периодической среде к мощности излучения в вакууме от параметров m и $\beta_\perp$

Таким образом, приведенный пример показывает, что в среде с периодической неоднородностью возможно достижение мощности излучения, сравнимой и превосходящей мощность излучения осциллятора в вакууме.

Во втором случае, когда собственные волны параметрически связаны между собой

$$(D_0(\omega, k) D_0(\omega, k - \kappa) \approx 0),$$

получено выражение для мощности излучения движущегося осциллирующего заряда в периодически неоднородной среде. Это выражение по виду соответствует потерям частицы при параметрическом черенковском излучении, так как оно пропорционально параметру неоднородности среды в первой степени. При этом всегда должно быть выполнено условие взаимодействия собственных волн среды $2\vec{k}\vec{\kappa} = (\vec{\kappa})^2$.

Рассмотрен случай излучения осциллирующего заряда в периодически неоднородной среде, когда $\kappa \parallel r_0 \parallel oz$, $\mathrm{v}_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$.

Из условия $v_0 = 0$, а также условия взаимодействия собственных мод $\omega_-^{(n)} = \omega_+^{(m)}$ следует, что мощность излучения определяется выражением:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{|q| \cdot e^2 \Omega^2}{3 \cdot 8 \cdot c} \int_0^{\pi} (\sin\theta)^3 d\theta \left[-\frac{3}{4} S_1(\kappa\, r_0) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\beta_\perp^2}{\kappa^2 r_0^2} S_2(\kappa\, r_0) - \frac{\beta_\perp^4}{\kappa^4 r_0^4} S_3(\kappa\, r_0) \right], \qquad (7)$$

где $S_p(\kappa\, r_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2p} J_n((\vec{k} - \vec{\kappa}) \vec{r}_0) J_n((\vec{k} + \vec{\kappa}) \vec{r}_0)$, $p = 1; 2; 3$.

На Рис.2 приведены результаты численных расчетов выражения (7) после предварительного вычисления в аналитическом виде сумм $S_p(x)$, значения которых не приводятся из-за их громоздкой записи.

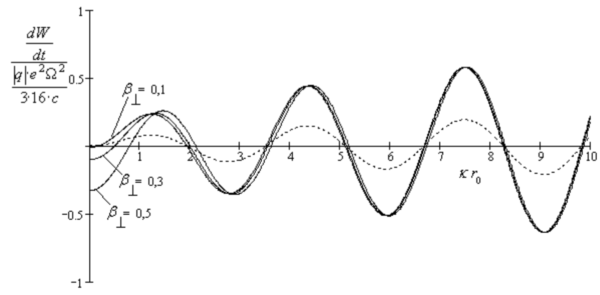

Рис.2. Зависимость мощности излучения осциллятора в периодической среде от параметров $\kappa\, r_0 \approx m$ и $\beta_\perp$ при параметрическом взаимодействии собственных волн среды

Из Рис.2 следует, что излучение дискретно по параметру $\kappa\, r_0$. При $\kappa\, r_0 > 3{,}0$ точки положительных значений мощности излучения (области существования излучения) близки к корням функции Бесселя первого рода $J_1(x) = 0$ (положение корней функции Бесселя показано пунктирной кривой на Рис.2). Более точные значения областей существования излучения определяются из условия равенства нулю выражения (3). Например, для значения параметра $\beta_\perp = 0{,}3$ две первые области существования излучения определяются следующими неравенствами: $0{,}484 < (\kappa r_0) < 1{,}985$, $3{,}546 < (\kappa\ r_0) < 5{,}113$. Диаграмма направленности излучения совпадает с аналогичной в периодически неоднородной среде в отсутствие взаимодействия между собственными модами. В приведенном случае мощность излучения (3) значительно больше мощности излучения, которая реализуется при отсутствии параметрического взаимодействия собственных волн (в $1/10 \cdot q$ раз).

В случае, когда постоянная скорость отлична от нуля ($v_0 \neq 0$), а осцилляторная равна нулю ($|r_0| = 0$, $\Omega = 0$) выражение для мощности излучения имеет вид:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3\pi \cdot |q| \cdot e^2 \kappa^2 v_0^2}{8 \cdot (\varepsilon_0)^{\frac{5}{2}} c} \sqrt{1 - \beta_\text{ф}^2} (1 - \frac{1}{2}\beta_\text{ф}^{-2}) \times$$
$$\times (1 - a^2 \beta_\text{ф}^{-2})(1 + b^2 \beta_\text{ф}^{-2}), \qquad (8)$$

где $\beta_\text{ф}^2 = c^2 / \varepsilon_0 v_0^2 < 1$ – отношение квадрата фазовой скорости распространения волны в среде к квадрату скорости частицы,

$$a^2 = -\frac{13}{12} + \frac{\sqrt{193}}{12}, \quad b^2 = \frac{13}{12} + \frac{\sqrt{193}}{12}.$$

При получении (4) использовано условие

$$k^2 \cdot \kappa^{-2} \approx 0{,}25 \cdot \beta_\text{ф}^{-2}, \qquad (9)$$

которое эквивалентно условию излучения Вавилова-Черенкова: $\cos\theta = \beta_\text{ф}$.

Из выражения (8) следует, что излучение возможно только в двух интервалах значений отношения фазовой скорости волны в среде к скорости частицы:

$$0 < \beta_\text{ф} < a \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}} < \beta_\text{ф} < 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Буц. “Длинноволновое” излучение заряженных частиц в средах с периодической неоднородностью // *Радиотехника*. 1997, №9, с.9-12.
2. В.А. Буц. Коротковолновое излучение нерелятивистских заряженных частиц // *ЖТФ*. 1999, т.69, в.5, с.132-134.
3. А.А. Соколов, И.М. Тернов. *Релятивистский электрон.* М.: «Наука», 1974, 392 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2008 г.

RADIATION OF THE OSCILLATING CHARGE MOVING WITH A NON-RELATIVISTIC VELOSITY IN A PERIODICALLY NON-UNIFORM MEDIA

V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko

Interaction of harmonic oscillator, moving with non-relativistic velocity, through the medium which dielectric permeability changes periodically is considered. Two limiting cases of movement such oscillator through the media are considered: when interaction between own waves of media is absent and when own waves are connected parametric. It is shown, that the radiation length of a wave in the first case can considerably exceed the period of non-homogeneity, and in the second case – one order with it. It is shown, that in the media with periodic non-homogeneity, the achievement of the radiation powers which are comparable to radiation powers of the vacuum oscillator (the first case) is possible. In the second case expression of the radiation power which by the form corresponds to losses of a particle at parametric Cherenkov radiation is received. It is shown, that the radiation is discrete on the parameter equal to the ratio of the characteristic size of the oscillator to the wave length.

ВИПРОМІНЮВАННЯ ОСЦИЛЮЮЧОГО ЗАРЯДУ, ЩО РУХАЄТЬСЯ З НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЮ ШВИДКІСТЮ В ПЕРІОДИЧНО НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В.І. Ткаченко, І.В. Ткаченко

Розглянуто взаємодію гармонійного осцилятора, що рухається з нерелятивістською швидкістю, із середовищем, діелектрична проникність якої змінюється за синусоїдальним законом. Розглянуто два граничних випадки руху такого осцилятора в середовищі: коли взаємодія між власними хвилями середовища відсутня і коли власні хвилі зв'язані параметрично. Показано, що довжина хвилі випромінювання в першому випадку може значно перевищувати період неоднорідності, а в другому випадку – одного порядку з ним. Показано, що в середовищі з періодичною неоднорідністю, можливе досягнення потужностей випромінювання, порівняних з потужностями випромінювання осцилятора у вакуумі (перший випадок). У другому випадку отримано вираз для потужності випромінювання, що по виду відповідає втратам частки при параметричному черенківському випромінюванні. Показано, що випромінювання дискретне по параметру, рівному відношенню характерного розміру осцилятора до довжини хвилі.