О СИНЕРГЕТИКЕ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.В. Бабич, С.В. Березовский, В.Ф. Клепиков
Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины,
г. Харьков, Украина; E-mail: ntcefo@yahoo.com

В рамках синергетического подхода обсуждается возникновение динамического дальнего порядка при переходе твердых тел в сверхпластическое состояние. Исследованы возникающие при описании сверхпластичности неабелевы калибровочные поля. Изучены нелинейные дифференциальные уравнения, возникающие при анализе автодуальных SU(2)- и SU(3)- калибровочных полей. Найдены некоторые классы их точных решений.

PACS: 62.20.Fe, 64.60.Ht, 68.65.Cd

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхпластичности – одна из недостаточно исследованных проблем физики твердого тела. Связано это в первую очередь с тем, что явление сверхпластичности является сильно неравновесным и нестационарным явлением, для микроскопического описания которого необходимо учитывать сложное коллективное поведение различных дефектов кристаллической решетки [1,2]. Есть несколько разновидностей сверхпластических состояний твердых тел, но общие закономерности таких состояний наиболее ярко проявляются при полевом описании этого явления, аналогичном описанию явлений в системах со спонтанно нарушенной симметрией (в частности, сверхтекучести и сверхпроводимости) [3,4,5].

Переход образца в сверхпластическое состояние является сильно неравновесным процессом и представляет собой динамическое фазовое превращение. Аналогия с другими кооперативными явлениями проявляется в том, что получить сверхпластическое состояние можно только тогда, когда плотность точечных структурных дефектов превышает некоторое критическое значение, и дефекты проявляют тенденцию к корреляции и самоорганизации (что отчасти напоминает поведение критических флуктуаций при фазовых переходах).

Динамический дальний порядок, обобщающий понятие дальнего порядка на случай неравновесных нестационарных систем, проявляется во временизависящей корреляционной связи значений физических величин в достаточно удалённых пространственных точках.

Количественной мерой динамического дальнего порядка могут являться те же величины, что и в случае обычного, равновесного дальнего порядка, но уже зависящие от времени. Аналогия между равновесными кооперативными эффектами (такими, как сверхтекучесть, сверхпроводимость, магнетизм, сегнетоэлектричество и т.п. [6]) и неравновесными (сверхизлучательная лавина и сверхизлучательное усиление [7-11], сверхпластичность) проявляется не только в подобии методов количественного описания, но и в более глубоких, симметрийных проявлениях в рамках теорем Голдстоуна и Хиггса. Так, калибровочные симметрии типа U(1), характерные для сверхпроводимости и сверхтекучести, обобщаются в случае динамического дальнего порядка до неабелевых групп SU(2), SU(3) и т.д. [12-16].

С помощью синергетических методов оказывается возможным создать полевое калибровочное описание процессов сверхпластической деформации. Такая возможность связана с тем, что при приближении к состоянию, в котором твердое тело проявляет сверхпластические свойства, число дефектов кристаллической решетки становится очень велико, и их поведение становится коллективным и может быть описано полевыми методами. Вопреки ожиданиям при таком описании динамическая самоорганизация для точечных дефектов протекает более сложным образом, чем для дефектов большей размерности [4]. Если для большинства кооперативных явлений (например, сверхтекучести, сверхпроводимости в системах с синглетным s-спариванием) достаточно ограничиться калибровочными полями с коммутативной группой симметрии $U(1)$ (как и при описании дислокаций), то в случае сверхпластичности в калибровочном подходе точечные дефекты порождают некоммутативные симметрии.

Именно такие калибровочные поля и соответствующие нелинейные уравнения, возникающие в физике сверхпластичности, рассмотрены в данной работе.

2. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АВТОДУАЛЬНЫХ SU(2)- И SU(3)-КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Изучение $SU(2)$-калибровочных автодуальных полей приводит к построению точных решений нелинейной системы уравнений в частных производных второго порядка [17]:

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2007. № 2.
Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (90), с. 232-235.

$$\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial\bar{y}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}+$$
$$+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{z}}=0, \qquad (1)$$

$$\varphi\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial\bar{y}}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}}\right)-2\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)=0, \qquad (2)$$

где φ – действительная, а ρ – комплексная искомые функции действительных переменных x_1, x_2, x_3, x_4, а y и z комплексные переменные

$$y=\frac{x_1+ix_2}{\sqrt{2}},\; z=\frac{x_3-ix_4}{\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

черта над буквами означает комплексное сопряжение.

Класс точных решений системы уравнений (1) и (2) дается формулами:

$$\varphi=\varphi(u),\; \rho=\rho(u), \qquad (4)$$

где u – решения уравнения Лапласа в комплексной записи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial\bar{y}}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}=0, \qquad (5)$$

а φ и ρ удовлетворяют уравнениям [17]:

$$\varphi\varphi''-\varphi'^2+\rho\bar{\rho}'=0, \qquad (6)$$

$$\varphi\rho''-2\rho'\varphi'=0. \qquad (7)$$

В справедливости этого утверждения несложно убедиться прямой проверкой.

Уравнения (6) и (7) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно φ и ρ. Для решения этого уравнения заметим, что уравнение (7) эквивалентно

$$\rho'=c\varphi^2, \qquad (8)$$

где c – произвольная комплексная константа.

Подставляя выражение (8) в (6) и делая замену $(\varphi')^2=v(\varphi)$, получаем:

$$\varphi v'-2v+2c\bar{c}\varphi^4=0. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) дается формулой:

$$v=\varphi^2\left(c_1-c\bar{c}\varphi^2\right), \qquad (10)$$

где c_1 – константа интегрирования.

Используя (10) получаем уравнение первого порядка для φ:

$$(\varphi')^2=c_1\varphi^2-c^2\varphi^4. \qquad (11)$$

Так как u – произвольное решение уравнения Лапласа, то решение уравнения (11) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi=\pm\frac{1}{|c|\,ch\,u}. \qquad (12)$$

Используя (8) и (12) находим:

$$\rho=\frac{1}{|c|}th\,u. \qquad (13)$$

Таким образом, определяемые формулами (12) и (13) функции φ и ρ представляют собой класс точных решений уравнений (1), (2), содержащий произвольную гармоническую функцию переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

Рассмотрим уравнения, соответствующие калибровочной автодуальной группе $SU(3)$. В матричной записи эти уравнения имеют следующий вид [17]:

$$\bar{\nabla}\left(P^{-1}\bar{\nabla}P\right)=0, \qquad (14)$$

где дифференциальный оператор $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$; P – эрмитова матрица с единичным детерминантом, зависящая от действительных функций Φ_1, Φ_2 и комплексных ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Покажем, что функции $\Phi_1, \Phi_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3$, рассматриваемые как функции от произвольной гармонической функции $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_1'-\Phi_1^{-1}\Phi_1'^2+\Phi_1^{-1}\Phi_2\rho_1'\bar{\rho}_1'+$$
$$+\Phi_2^{-1}(\rho_3'-\rho_2\rho_1')(\bar{\rho}_3'-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_1')=0;$$
$$\Phi_2'-\Phi_2^{-1}\Phi_2'^2+\Phi_2^{-1}\Phi_1\rho_2'\bar{\rho}_2'+$$
$$+\Phi_1^{-1}(\rho_3'-\rho_2\rho_1')(\bar{\rho}_3'-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_1')=0; \qquad (15)$$
$$\rho_3''-\rho_2\rho_1''-\rho_1'\rho_2'-\left(\Phi_1^{-1}\Phi_1'+\Phi_2^{-1}\Phi_2'\right)(\rho_3'-\rho_2\rho_1')=0;$$
$$\rho_1''+\left(\Phi_2^{-1}\Phi_2'+2\Phi_1^{-1}\Phi_1'\right)\rho_1'-\Phi_1\Phi_2^{-2}(\rho_3'-\rho_2\rho_1')\bar{\rho}_2'=0;$$
$$\rho_2''+\left(\Phi_1^{-1}\Phi_1'+2\Phi_2^{-1}\Phi_2'\right)\rho_2'-\Phi_2\Phi_1^{-2}(\rho_3'-\rho_2\rho_1')\bar{\rho}_1'=0.$$

В предположении

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi, \qquad (16)$$

уравнение для Φ будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi\Phi''-\Phi'^2+|c_1|\Phi^3+|c|^2\Phi^4=0, \qquad (17)$$

где c и c_1 – произвольные комплексные постоянные.

Преобразуем (15) к следующему виду:

$$\frac{\Phi\Phi''-\Phi'^2}{\Phi^2}+|c_1|\Phi+|c|^2\Phi^2=0. \qquad (18)$$

Замечая, что

$$\frac{\Phi\Phi''-\Phi'^2}{\Phi^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln(\Phi)\right), \qquad (19)$$

делаем замену $\ln(\Phi)=S$.

Уравнение (18) в новых переменных принимает вид:

$$\frac{d^2S}{dx^2}+|c_1|e^S+|c|^2e^{2S}=0. \qquad (20)$$

Доумножая на S' и интегрируя, имеем:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+|c_1|e^S+2|c|^2e^{2S}-D=0, \qquad (21)$$

где D – константа интегрирования.

Делая обратную замену, получим уравнение для Φ :

$$\Phi'^2=D\Phi^2-|c_1|\Phi^3-|c|^2\Phi^4. \qquad (22)$$

Уравнения такого типа с полиномом 4-й степени в правой части интегрируются в терминах эллиптических функций.

Общее решение уравнения (22) имеет вид:

$$\Phi=\frac{2\omega^2\delta v}{\left(\delta v+|c_1|^2\right)^2+|c|^2\omega^2}, \qquad (23)$$

где $v=e^{\omega u}$, а δ и ω - произвольные действительные постоянные.

В случае, когда $\rho_1=\rho_2=0$, система (15) переходит в (1), а уравнение (17) обладает масштабной симметрией, благодаря чему его решения будут описывать солитоноподобные состояния соответствующих полей. Кроме того, уравнение (17) допускает особые решения следующего вида:

$$\Phi(u)=\pm\frac{i}{|c|(u+B)}, \qquad (24)$$

где $i^2=1, B$ - произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение (ДУ) (20) при $|c_1|=0$ относится к классу ДУ типа:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+Ke^y=2\left(f^2+\frac{df}{dx}\right), \qquad (25)$$

которое при произвольной функции $f(x)$ допускает 2 группы Ли симметрии.

В уравнении (20) $f(x)$=0. Кроме того, это уравнение при $|c_1|=0$ является одномерной редукцией уравнения Лиувилля :

$$\frac{d^2S}{dx^2}+\frac{d^2S}{dy^2}+|c|^2e^S=0, \qquad (26)$$

допускающего бесконечномерную группу Ли, что отражает высокую скрытую симметрию исследуемого явления.

3. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ МОДУЛИРОВАННЫХ СТРУКТУР

Если предположение (16) заменить более слабым $\Phi_1=\lambda\Phi_2$, то уравнения типа (6) и (17) имеют вид:

$$\alpha\varphi\varphi''-\varphi'^2=P_n(\varphi). \qquad (27)$$

Уравнения вида (27), где P_n полином n-й степени, как правило, возникают при калибровочном описании пространственно модулированных фаз с нарушенной симметрией, соответствующих обычным точкам Кюри (n=4) [3]. В окрестности мультикритических точек в формуле (27) $n\geq 6$, и в этом случае в правой части уравнения (24) будут фигурировать фрагменты полиномов 6-й либо более высоких степеней. Анзатцы типа (27) обычно используются в теории модулированных (длиннопериодических) структур для классификации фаз по четности: $\varphi(\pm x)=\pm\varphi(x)$ [18].

Рассмотрим простейший из возможных мультикритических случаев $P_6(\varphi)=\mu\varphi^6$, соответствующий фазовому превращению в окрестности критической точки Кюри (трикритической точки):

$$\varphi\varphi''-2\varphi'^2=\mu\varphi^6. \qquad (28)$$

После замены

$$\varphi(x)=z^{-1}(x), \qquad (29)$$

получаем из (28)

$$z''-\mu z^{-3}=0. \qquad (30)$$

Это ДУ обладает самой высокой симметрией из всех нелинейных ДУ вида [19]

$$z''+V(z)=0. \qquad (21)$$

ДУ (27) допускает 3 группы симметрии: трансляции по x $(x^*=x+a)$, масштабные преобразования ($x^*=e^{\Delta}x, z^*(x^*)=e^{\frac{\Delta}{2}}z(x)$), а также группу конформных преобразований следующего вида:

$$x^*=\frac{x}{1-\xi x};\quad z^*(x^*)=\frac{z(x)}{1-\xi x}, \qquad (32)$$

причем одна из этих групп – группа вариационной симметрии. Поэтому и общее, и особое решения ДУ (30) имеют чисто алгебраический вид (без экспонент и эллиптических функций).

Таким образом, набор скрытых симметрий в калибровочных теориях сверхпластичности может быть более широким, чем в случае других кооперативных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Брюховецкий. О причинах высокотемпературной сверхпластичности крупнозернистого алюминиевого сплава типа “авиаль” //*ФММ.* 2001, т. 92, №1, с. 107–111.
2. V.V. Bryukhovetsy, R.I. Kuznetsova, N.N. Zhukov, V.P. Poida and V.F. Klepikov. Liquid-phase nucleation and evolution as a cause of superplasticity in alloys of

the Al-Ge system //*Phys. Stat. Sol. (a).* 2005, v. 202, N9,

p. 1740–1750
3. V.F. Klepikov, A.I. Olemskoy. The theory of spatiotemporal patterns in nonequilibrium systems //*Physics Reports*. 2000, v. 338, N6, p. 571–677.
4. А.В. Хоменко, А.И. Олемской. *Синергетика конденсированой среды.* Сумы: Изд.-во СумГУ, 2002, с. 372.
5. А.А. Кацнельсон, А.И. Олемской. *Микроскопическая теория неоднородных структур*. 1987, М., Изд.-во МГУ, с. 336.
6. Л.Д Ландау, Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика*. 1976, М.: «Наука», с. 584.
7. В.З. Кресин. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть.* М., 1978, с. 189.
8. В.Н. Попов, В.С. Ярунин. *Коллективные эффекты в квантовой статистике излучения и вещества*. Л.: Изд.-во Ленингр. ун.-та, 1985, с. 192.
9. R.H. Dicke //*Phys. Rev.* 1954, v. 93, N 1, p. 99–110.
10. F.Bloch //*Ibid*. 1946, v. 70, N7/8, p. 460–474.
11. А.В.Андреев //*УФН.* 1980, т. 131, №4, с. 653–694.
12. Р. Де Вит. *Континуальная теория дисклинаций*. М.: «Мир», 1977.
13. A. Kadic, D.G.B. Edelen. *A gauge theory of Dislocations anf Disclinations* / Lectures notes in physics. 1963, v. 174. Berlin, Heidberg, N.: Springer Verlag,
14. A.I. Olemskoi. *Theory of Structural Transformations in Non-Equilibrium Condensed Matter*. NY.: NOVA science, 1999.
15. А.А. Гриб, Е.В. Дамаскинский, В.М. Максимов. Проблемы нарушения симметрии и инвариантности вакуума в квантовой теории поля //*УФН*. 1970, т. 102, в. 4, с. 587–620.
16. А.М. Поляков. *Калибровочные поля и струны*. Ижевск, Изд.-во Ижевского ун.-та, 1999, с. 316.
17. А.В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: «Наука», 1972,
с. 286.
18. V.F. Klepikov *//J.de Phys.* C. 1988, v. 49, N12, p. 1805–1853.
19. В.И. Фушич, В.М. Штенель, Н.И. Серов. Симметрийный анализ и точные решения. Киев: «Наукова думка», 1989, 336 с.

ПРО СИНЕРГЕТИКУ НАДПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ТВЕРДИХ ТІЛ

А.В. Бабіч, С.В. Березовський, В.Ф. Клепіков

В рамках синергетичного підходу обговорюється виникнення динамічного дальнього порядку під час надпластичного переходу твердих тіл у надпластичний стан. Досліджено неабелеві калібровочні поля, які виникають під час опису надпластичності. Вивчено нелінійні диференційні рівняння які виникають під час аналізу автодуальних SU(2)- і SU(3)- калібровочних полів. Знайдено деєкі класи їх точних розв'язків

ABOUT SYNERGETIC OF THE SUPERPLASTIC STATE OF SOLIDS

A.V. Babich, S.V. Berezovsky, V.F. Klepikov

An appearance of the dynamical long range order during the transition of a solid to the superplastic state is disscused from the synergetic wievpoint. Nonabelian gauge fields which arise when describing the superplastisity are investigated. The nonlinear differential equations used to analyze the autodual SU(2) and SU(3) gauge fields are studied. Some classes of exact solutions of such equations are found.