

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ РЕЖИМОМ КАСКАДНОГО ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАДИТЕЛЯ

М.П. Коцур¹, А.Г. Наконечный²

¹*Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича*

²*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*

Предложен способ решения задачи оптимального управления объектом с распределенными параметрами, который описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа с нестандартными граничными условиями. Способ заключается в дискретизации объекта и переходе к объекту с сосредоточенными параметрами, для оптимизации которого применяется принцип максимума Понтрягина. Такой метод использован для оптимизации нестационарного процесса термоэлектрического охлаждения. Рассчитаны оптимальные зависимости тока питания каскадного термоэлектрического модуля от времени, которые обеспечивают минимальную температуру охлаждения.

Ключевые слова: объект с распределенными параметрами, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, оптимизация, нестационарное термоэлектрическое охлаждение.

Запропоновано спосіб розв'язування задачі оптимального керування об'єктом з розподіленими параметрами, що описується системою нелінійних диференційних рівнянь параболического типу з нестандартними крайовими умовами. Спосіб полягає у дискретизації об'єкту і переході до об'єкту з зосередженими параметрами, для оптимізації якого використовується принцип максимуму Понтрягіна. Такий метод застосовано для оптимізації нестационарного процесу термоелектричного охолодження. Розраховано оптимальні залежності струму живлення каскадного термоелектричного модуля від часу, які забезпечують мінімальну температуру охолодження.

Ключові слова: об'єкт з розподіленими параметрами, оптимальне керування, принцип максимуму Понтрягіна, оптимізація, нестационарне термоелектричне охолодження.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории и методов оптимального управления объектами с распределенными параметрами, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, весьма актуально для многих областей науки и техники. Многие явления и процессы в физике и технике моделируются как объекты с распределенными параметрами. Процессы нагрева и охлаждения тел [2–4], химической диффузии [5], явления деформации и вибрации [6,7], распространение акустических, световых, электромагнитных волн [2, 8], движение потоков жидкостей и газов, процессы квантовой механики [9, 10], газодинамики, горения, химических и ядерных реакций [11–14] — все это примеры объектов с распределенными

параметрами, которые описываются функциями пространственных координат и времени. Эффективное функционирование таких объектов возможно при решении задач оптимального управления, результатами которых являются оптимальные функции управления.

Теория оптимального управления широко используется для оптимизации объектов с сосредоточенными параметрами, состояние которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений [15–18]. Для них сформулированы необходимые условия оптимальности, например, принцип максимума Понтрягина [19], на основании которых создаются алгоритмы и компьютерные методы поиска функций управлений, оптимизирующих объект.

Развитие теории оптимального управления для объектов с распределенными параметрами и методов определения их характеристик является более сложной проблемой по сравнению с аналогичной задачей для систем с сосредоточенными параметрами, так как приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных, учитывая сложность реальных граничных условий, которые характеризуют поведение объекта. Граничные условия задачи могут содержать частные производные, функции управления и т.п. Необходимые условия оптимальности получены только для некоторых задач с распределенными параметрами с простыми граничными условиями [20–23]. Поэтому актуальной задачей является разработка теории оптимального управления для объектов, которые описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных с нетривиальными граничными условиями.

Примером объекта с распределенными параметрами является нестационарный процесс термоэлектрического охлаждения. Самое глубокое охлаждение достигается при использовании каскадного охладителя, работающего в нестационарном режиме. В таких устройствах каждый последующий каскад охлаждает предыдущий, обеспечивая таким образом существенное снижение температуры. Анализ результатов научных исследований [18, 24] показывает, что задачи оптимизации такого объекта были решены только для простейших физических моделей термоэлектрического преобразователя, или вообще не рассматривались. Это объясняется сложностью математической модели нестационарного процесса каскадного охлаждения.

Цель работы — разработка метода оптимизации управления нестационарным режимом термоэлектрического охладителя путем построения метода оптимального управления и алгоритма численного решения соответствующей математической задачи оптимизации нестационарных одномерных процессов с распределенными параметрами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССОМ КАСКАДНОГО ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

На примере нестационарного процесса каскадного термоэлектрического охлаждения рассмотрим постановку задачи оптимального управления

объектом с распределенными параметрами, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений параболического типа с нестандартными граничными условиями. Объектом исследования является охлаждающий каскадный модуль (рис. 1а). Каждый каскад состоит из термоэлементов (рис. 1б), соединенных последовательно в электрическую цепь и параллельно по отношению к тепловому потоку. Каждый термоэлемент содержит две ветви из полупроводниковых материалов n - и p -типов проводимости. При протекании электрического тока указанной на рис. 1а полярности, спай 4 охлаждается вследствие поглощения тепла Пельтье, а противоположный спай нагревается. Для обеспечения более глубокого охлаждения каждый последующий каскад охлаждает предыдущий. Каскады отделены один от другого электроизоляционными пластинами из материала с высокой теплопроводностью. Как правило, электрическое соединение каскадов последовательное, поэтому сила тока в ветвях термоэлементов разных каскадов одинаковая. Охлаждаемый объект размещается на теплопоглощающей поверхности верхнего (холодного) каскада. Обычно путем интенсивного отвода тепла температура горячих спаев термоэлементов нижнего (горячего) каскада поддерживается на уровне температуры окружающей среды.

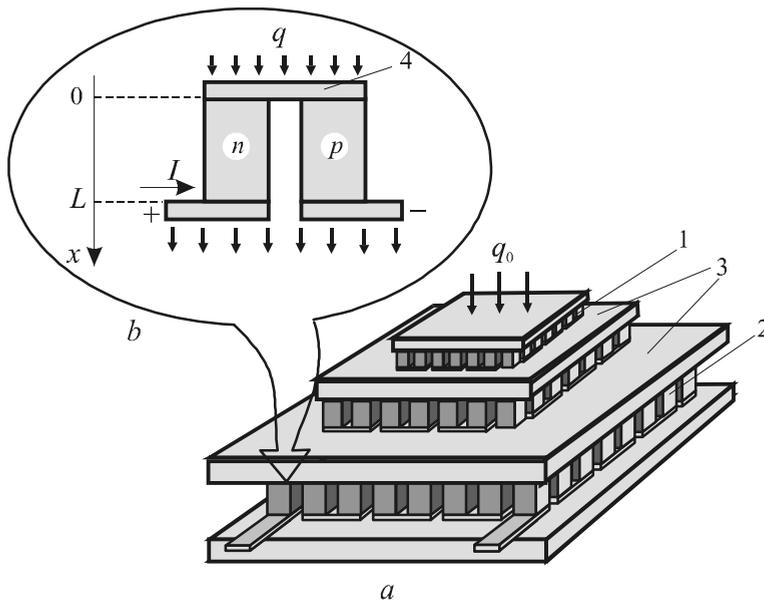


Рис. 1. Схема охлаждающего каскадного модуля (а) и термоэлемента (б).

1 — 1-й (холодный) каскад, 2 — K -й (горячий) каскад, 3 — электроизоляционные пластины, 4 — охлаждающий спай термоэлемента.

Нестационарный режим работы каскадного термоэлектрического охладителя описывается системой одномерных уравнений нестационарной теплопроводности в ветвях термоэлементов n - и p -типов проводимости для K -каскадного устройства, которая имеет вид [18]:

$$\frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial t} = \frac{1}{c_{n,p}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa_{n,p} \frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial x_k} \right) + \rho_{n,p} \frac{I^2}{s_{n,p}^2} - T_{n,p}^{(k)} \frac{I}{s_{n,p}} \frac{\partial \alpha_{n,p}}{\partial T} \frac{\partial T_{n,p}^{(k)}}{\partial x_k} \right], \quad (1)$$

$$k = 1, \dots, K,$$

где T — температура, I — ток питания ветвей термоэлементов. Начальные условия задачи следующие:

$$T_{n,p}^{(k)}(x,0) = T_a, \quad (2)$$

Совокупность граничных условий записывается следующим образом:

— условие теплового баланса для холодной поверхности первого каскада, на которой находится охлаждаемый объект с теплоемкостью g_1 , выделяющий тепло q_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^{(1)}(0,t)}{\partial t} = \frac{n_1}{g_1} \left[q_0 - K_H(s_n + s_p)(T_n^{(1)} - T_a) + \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(1)}}{\partial x_1} - \alpha_n I T_n^{(1)} + \right. \\ \left. + \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(1)}}{\partial x_1} - \alpha_p I T_p^{(1)} + I^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) \right]_{x_1=0}; \end{aligned} \quad (3)$$

— условия теплового баланса между каскадами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^{(k+1)}(0,t)}{\partial t} = \\ = \frac{n_k}{g_{k+1}} \left[(\alpha_n + \alpha_p) I T_n^{(k)} - \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(k)}}{\partial x_k} - \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(k)}}{\partial x_k} + I^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) \right]_{x_k=L} - \\ - \frac{n_{k+1}}{g_{k+1}} \left[(\alpha_n + \alpha_p) I T_n^{(k+1)} - \kappa_n s_n \frac{\partial T_n^{(k+1)}}{\partial x_{k+1}} - \kappa_p s_p \frac{\partial T_p^{(k+1)}}{\partial x_{k+1}} - \right. \\ \left. - I^2 \left(\frac{r_0}{s_n} + \frac{r_0}{s_p} \right) \right]_{x_{k+1}=0}, \quad k = 1, \dots, K-1; \end{aligned} \quad (4)$$

— условия равенства температур на саях n - и p -ветвей:

$$T_p^{(k)}(0,t) = T_n^{(k)}(0,t), \quad T_p^{(k)}(L,t) = T_n^{(k)}(L,t), \quad k = 1, \dots, K, \quad (5)$$

— условия равенства температур между каскадами:

$$T_n^{(k+1)}(0,t) = T_n^{(k)}(L,t), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (6)$$

— условие стабилизации температуры основания охладителя:

$$T_n^{(N)}(L,t) = T_a. \quad (7)$$

В этих уравнениях характеристики полупроводниковых материалов ветвей, а именно: коэффициент Зеебека $\alpha(T)$, удельное сопротивление $\rho(T)$, теплопроводность $\kappa(T)$ являются функциями температуры. Экспериментальные температурные зависимости этих характеристик аппроксимируются полиномами. Удельная теплоемкость $c_{n,p}$, площадь сечения ветвей $s_{n,p}$, их длина L , количество термоэлементов в каскадах n_k , электрическое контактное сопротивление r_0 , коэффициент теплообмена K_H холодной поверхности устройства с окружающей средой, теплоемкости охлаждаемого объекта и электроизоляционных пластин g_k , мощность тепловой нагрузки q_0 , температура окружающей среды T_a являются константами. Током I , который протекает в ветвях и обеспечивает охлаждение, можно управлять, меняя во времени его величину в диапазоне $I \in G_I$, $G_I = \{0, I_{\max}\}$. Одна из рациональных оптимизационных задач заключается в определении оптимальной функции тока $I(t)$, которая минимизирует температуру охлаждения $T_n^{(1)}(0,\theta)$ каскадного устройства за определенный промежуток времени θ .

Анализ публикаций [18, 24, 25] позволяет утверждать, что до настоящего времени для общего случая зависимых от температуры характеристик материалов термоэлемента $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ способов решения данной задачи для каскадного охладителя не предложено.

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Эффективным способом решения задачи оптимизации объекта с распределенными параметрами является его дискретизация и переход к объекту с сосредоточенными параметрами, поведение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переход в уравнениях (1), (3) к безразмерной координате $x = \frac{x_k}{L}$, $x \in (0,1)$ и их дискретизация по x позволяют записать уравнения (1), (3) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующим образом.

Обозначим неизвестные температуры $T_{n,p}^k(x)$ через $T_{k,m,i}$, где индексы означают: $k = 1, \dots, K$ — номер каскада; $m = 1, 2$ — номер ветви ($m = 1$ — n -ветвь, $m = 2$ — p -ветвь); $i = 1, \dots, N+1$ — номер узла по координате ($N = 1/h$, h — шаг по координате). Тогда дискретизированные уравнения (1), (3), (4) запишутся в виде системы

$$\frac{dT_{k,1,1}}{\partial t} = F_k, \quad k=1, \dots, K, \quad (8)$$

$$\frac{dT_{k,m,i}}{\partial t} = f_{k,m,i}, \quad k=1, \dots, K, \quad m=1, 2, \quad i=1, \dots, N,$$

с начальными условиями

$$T_{k,m,i}(0) = T_a, \quad k=1, \dots, K, \quad m=1, 2, \quad i=1, \dots, N+1, \quad (9)$$

и дополнительными условиями на границах (5)–(7), которые принимают вид

$$\begin{aligned} T_{k,2,1}(t) &= T_{k,1,1}(t), \quad T_{k,2,N+1}(t) = T_{k,1,N+1}(t), \quad k=1, \dots, K, \\ T_{k,1,N+1}(t) &= T_{k+1,1,1}(t), \quad k=1, \dots, K-1, \\ T_{K,1,N+1}(t) &= T_a. \end{aligned} \quad (10)$$

F_k и $f_{k,mi}$ — дискретизированные правые части уравнений (1), (3), (4), которые принимают вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1}{g_1} \left[q_0 - K_H(s_n + s_p)(T_{1,1,1} - T_a) + \right. \\ &+ \kappa_n(T_{1,1,1}) \frac{s_n}{L} \frac{T_{1,1,2} - T_{1,1,1}}{h} - \alpha_n(T_{1,1,1}) I(t) T_{1,1,1} + \\ &\left. + \kappa_p(T_{1,2,1}) \frac{s_p}{L} \frac{T_{1,2,2} - T_{1,2,1}}{h} - \alpha_p(T_{1,2,1}) I(t) T_{1,2,1} + I^2(t) r_0 \left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_p} \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{n_{k-1}}{g_k} \left[-\kappa_n(T_{k-1,1,N+1}) \frac{s_n}{L} \frac{T_{k-1,1,N+1} - T_{k-1,1,N}}{h} + \right. \\ &+ \alpha_n(T_{k-1,1,N+1}) I(t) T_{k-1,1,N+1} - \kappa_p(T_{k-1,2,N+1}) \frac{s_p}{L} \frac{T_{k-1,2,N+1} - T_{k-1,2,N}}{h} + \\ &\left. + \alpha_p(T_{k-1,2,N+1}) I(t) T_{k-1,2,N+1} + I^2(t) r_0 \left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_p} \right) \right] - \\ &- \frac{n_k}{g_k} \left[-\kappa_n(T_{k,1,1}) \frac{s_n}{L} \frac{T_{k,1,2} - T_{k,1,1}}{h} + \alpha_n(T_{k,1,1}) I(t) T_{k,1,1} - \right. \\ &\left. - \kappa_p(T_{k,2,1}) \frac{s_p}{L} \frac{T_{k,2,2} - T_{k,2,1}}{h} + \alpha_p(T_{k,2,1}) I(t) T_{k,2,1} - I^2(t) r_0 \left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_p} \right) \right], \\ &k=2, \dots, K, \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_{k,m,i} = \frac{1}{c_m L^2 h^2} [\kappa_m(T_{k,m,i+1})T_{k,m,i+1} - (\kappa_m(T_{k,m,i+1}) + \kappa_m(T_{k,m,i}))T_{k,m,i} + \kappa_m(T_{k,m,i})T_{k,m,i-1}] + \rho_m(T_{k,m,i}) \frac{I^2(t)}{c_m s_m^2} - \frac{I(t)T_{k,m,i}}{c_m s_m L} \frac{\partial \alpha_m(T_{k,m,i})}{\partial T} \frac{T_{k,m,i} - T_{k,m,i-1}}{h}, \quad (13)$$

$$k = 1, \dots, K, \quad m = 1, 2, \quad i = 2, \dots, N.$$

Задача состоит в определении оптимальной функции управления $I(t)$, которая обеспечивает минимум функционала Φ :

$$\Phi = T_{1,1,1}(\theta). \quad (14)$$

Такая оптимизационная задача относится к задачам со свободным правым концом и фиксированным временем.

Решение такой оптимизационной задачи определяется принципом максимума Понтрягина [19]. Для каждого момента времени t должно удовлетворяться условие максимума

$$H(T(t), I(t), \psi(t)) = \max_{I \in G_I} H(T(t), I, \psi(t)), \quad (15)$$

где функция Гамильтона H имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^K \left(\Psi_k F_k + \sum_{m=1}^2 \sum_{i=2}^N \Psi_{k,m,i} f_{k,m,i} \right). \quad (16)$$

Вспомогательные (сопряженные T) переменные $\Psi_k, \Psi_{k,m,i}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= -\Psi_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial T_{1,1,1}} + \frac{\partial F_1}{\partial T_{1,2,1}} \right) - \Psi_{1,1,2} \frac{\partial f_{1,1,2}}{\partial T_{1,1,1}} - \Psi_{1,2,2} \frac{\partial f_{1,2,2}}{\partial T_{1,2,1}}, \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= -\Psi_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial T_{k,1,1}} + \frac{\partial F_k}{\partial T_{k,2,1}} + \frac{\partial F_k}{\partial T_{k-1,1,N+1}} + \frac{\partial F_k}{\partial T_{k-1,2,N+1}} \right) - \Psi_{k,1,2} \frac{\partial f_{k,1,2}}{\partial T_{k,1,1}} - \\ &- \Psi_{k,2,2} \frac{\partial f_{k,2,2}}{\partial T_{k,2,1}} - \Psi_{k-1,1,N} \frac{\partial f_{k-1,1,N}}{\partial T_{k-1,1,N+1}} - \Psi_{k-1,2,N} \frac{\partial f_{k-1,2,N}}{\partial T_{k-1,2,N+1}}, \quad k = 2, \dots, K, \\ \frac{d\Psi_{k,m,2}}{dt} &= -\Psi_k \frac{\partial F_k}{\partial T_{k,m,2}} - \Psi_{k,m,2} \frac{\partial f_{k,m,2}}{\partial T_{k,m,2}} - \Psi_{k,m,3} \frac{\partial f_{k,m,3}}{\partial T_{k,m,2}}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m = 1, 2, \\ \frac{d\Psi_{k,m,i}}{dt} &= -\Psi_{k,m,i-1} \frac{\partial f_{k,m,i-1}}{\partial T_{k,m,i}} - \Psi_{k,m,i} \frac{\partial f_{k,m,i}}{\partial T_{k,m,i}} - \\ &- \Psi_{k,m,i+1} \frac{\partial f_{k,m,i+1}}{\partial T_{k,m,i}}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m = 1, 2, \quad i = 3, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{d\Psi_{k,m,N}}{dt} = -\Psi_{k,m,N-1} \frac{\partial f_{k,m,N-1}}{\partial T_{k,m,N}} - \Psi_{k,m,N} \frac{\partial f_{k,m,N}}{\partial T_{k,m,N}} - \Psi_{k+1} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial T_{k,m,N}},$$

$$k = 1, \dots, K-1, m = 1, 2,$$

$$\frac{d\Psi_{K,m,N}}{dt} = -\Psi_{K,m,N-1} \frac{\partial f_{K,m,N-1}}{\partial T_{K,m,N}} - \Psi_{K,m,N} \frac{\partial f_{K,m,N}}{\partial T_{K,m,N}}, m = 1, 2.$$

с конечными условиями в виде

$$\Psi_1(\theta) = -1,$$

$$\Psi_k(\theta) = 0, \quad k = 2, \dots, K, \quad (18)$$

$$\Psi_{k,m,i}(\theta) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad m = 1, 2, \quad i = 2, \dots, N.$$

Производные в уравнениях (17) учитывают дополнительные условия (10).

Совокупностью уравнений (8)–(18) определяется решение поставленной оптимизационной задачи нестационарного термоэлектрического охлаждения.

АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Нелинейность правых частей основных дифференциальных уравнений (1), (3), (4) и сложность задачи в целом позволяют решить ее только численными методами. Для этого можно воспользоваться следующим алгоритмом метода последовательных приближений.

Задаем начальное приближение функции управления, например, в виде $I^{(0)}(t) = I_0$, где $I_0 \in G_I$.

1. С этим приближением решаем основную систему дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями (9), учитывая дополнительные условия (10), и находим вектор-функцию состояний объекта $T(t)$. Для численного метода решения этой системы можно использовать метод конечных разностей.

2. Определяем значение функционала Φ (14).

3. Вычисленную вектор-функцию состояния объекта $T(t)$ и начальное приближение $I^{(0)}(t)$ используем для решения вспомогательной системы (17) с конечными условиями (18), чтобы вычислить вектор-функции $\Psi(t)$, $\psi(t)$. Для численного решения системы (17) можно применить метод конечных разностей.

4. Используем решения основной и вспомогательной систем для вычисления максимальных значений функции Гамильтона H (16) по переменной I для каждого момента времени t . Для выбора оптимального значения I из области G_I можно воспользоваться, например, методом золотого сечения. Получим новое приближение вектор-функции управления $I^{(1)}(t)$.

5. С новой функцией управления решаем основную систему уравнений (8)–(10) и определяем новое значение функционала Φ (14). Повторяем итерационный процесс до достижения изменения функционала Φ в пределах заданной точности.

Такой алгоритм можно реализовать компьютерными методами и найти решение поставленной оптимизационной задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Оценки характеристик нестационарного процесса термоэлектрического охлаждения проводились на примерах одно- и двухкаскадного модулей, ветви которых изготовлены из полупроводниковых материалов на основе *Bi-Te* *n*- и *p*-типа проводимости. Типичные экспериментальные температурные зависимости термоэлектрических параметров $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ этих материалов [18] аппроксимировались полиномами и использовались для расчетов. Теплоемкость материалов *n*- и *p*-типов предполагалась одинаковой и равной $c = 1.4$ Дж/см³. Оценки выполнялись для термоэлементов с высотой ветвей $L = 0.14$ см, площадью поперечного сечения $s_{n,p} = 0.1 \times 0.1$ см², величиной контактного сопротивления $r_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом·см². Учитывался теплообмен теплопоглощающей поверхности модулей с окружающей средой, температура которой $T_0 = 300$ К, коэффициент теплообмена $K_H = 10^{-3}$ Вт/см²К. Рассматривалась работа модулей в режиме без тепловой нагрузки, т.е. количество тепла, выделяемого охлаждаемым объектом, принималось равным $q_0 = 0$ Вт. Теплоемкость изоляционных пластин в расчете на один термоэлемент равнялась $g_k/n_k = 0.0012$ Дж/К, коэффициент каскадирования для 2-каскадного модуля $n_{k-1}/n_k = 1/2$.

Предложенный алгоритм решения задачи оптимизации нестационарного процесса термоэлектрического охлаждения был реализован компьютерными методами в среде MATLAB.

Сначала задача (8)–(10) решалась для одно- и двухкаскадного охладителей при условии их питания постоянным током I . Примеры решения задачи, которые демонстрируют поведение нестационарного процесса термоэлектрического охлаждения, показаны на рис. 2–3. На рис. 2 показано, как изменяется температура охлаждения T_c во времени t при различных значениях постоянного тока питания однокаскадного охладителя. Аналогичные данные были получены в работе [26] несколько иным методом. Сравнение результатов, полученных двумя различными способами, показало, что они совпадают с точностью до 1–1.5%.

На рис. 3 приведены зависимости $T_c(t)$ для двухкаскадного устройства. Тут также показано поведение межкаскадной температуры (пунктирные линии).

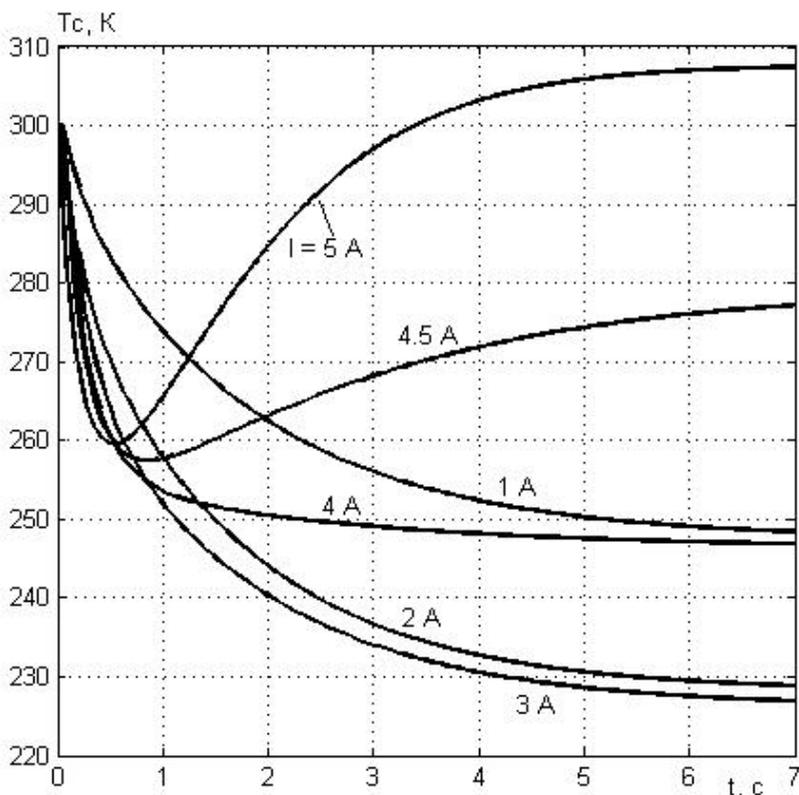


Рис. 2. Зависимости температуры охлаждения T_c от времени t для однокаскадного устройства при питании постоянным током I .

На рис. 2, 3 видно, что температура охлаждения в начальные моменты времени понижается, а затем зависимости $T_c(t)$ достигают насыщения, т.е. значений температуры в стационарном режиме. Очевидно, что существует оптимальное значение тока, при котором достигается самая низкая температура охлаждения. Минимальная температура на однокаскадном охладителе достигается при значении тока $I_{\text{опт}} = 3\text{ А}$ и равна $T_c = 228\text{ К}$, на двухкаскадном $T_c = 207\text{ К}$ при $I_{\text{опт}} = 2.5\text{ А}$. Время выхода однокаскадного модуля в стационарный режим составляет приблизительно $\theta = 5\text{ с}$, у двухкаскадного модуля $\theta = 8\text{ с}$. Таким образом, максимальный перепад температур, который достигается на однокаскадном модуле при $q_0 = 0$ в стационарном режиме, равен $\Delta T_{\text{max}} = 72\text{ К}$, на двухкаскадном $\Delta T_{\text{max}} = 93\text{ К}$. Такие температурные перепады соответствуют уровню охлаждения однокаскадных и двухкаскадных термоэлектрических модулей промышленного производства [27].

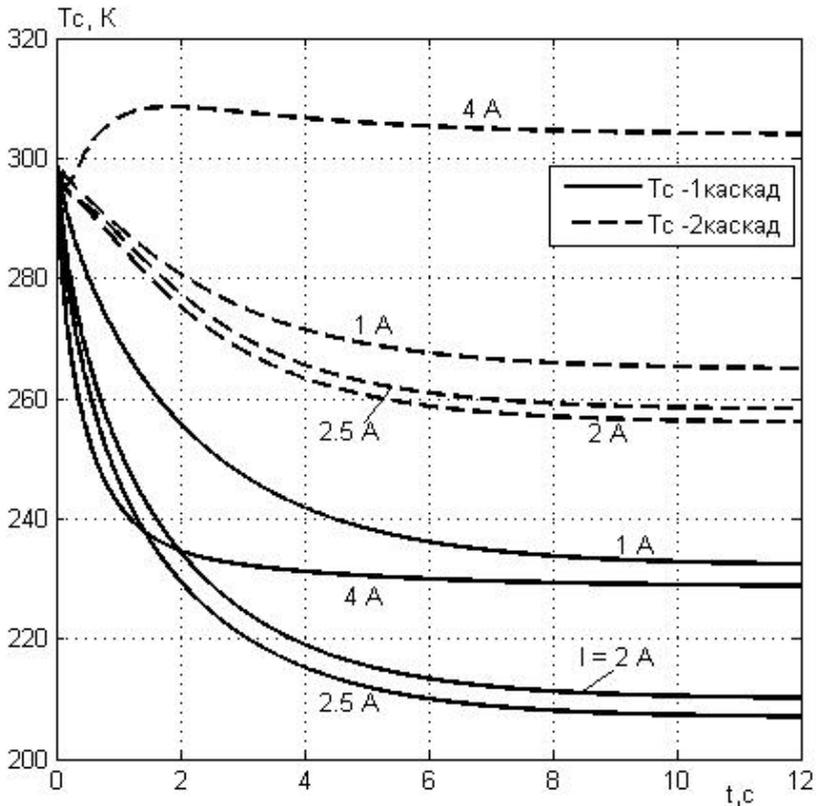


Рис. 3. Зависимости температуры охлаждения T_c от времени t для двухкаскадного устройства при питании постоянным током I .

Определенные таким образом оптимальные значения тока $I_{\text{опт}}$ использовались в качестве начального приближения для поиска оптимальных функций управления $I(t)$ нестационарными процессами одно- и двухкаскадного термоэлектрического охлаждения.

Примеры результатов расчета оптимальных функций тока питания для одно- и двухкаскадных модулей приведены на рис. 4, 5 соответственно. Тут показаны рассчитанные оптимальные зависимости тока от безразмерного параметра времени $I(t/\theta)$, которые минимизируют температуру охлаждения модулей T_c в разные конечные моменты времени θ . На этих же рисунках показано, как понижается температура охлаждения T_c в зависимости от времени при использовании таких оптимальных функций тока.

Температура, которая достигается за время $\theta = 5$ с на однокаскадном модуле равна $T_c = 218$ К, что на 10 К ниже минимальной температуры в стационарном режиме. Аналогичные результаты были получены в работе [26] путем использования вариационного метода для поиска оптимальных функций тока, минимизирующих температуру охлаждения однокаскадного устройства. При одинаковых исходных данных для решения задачи результаты совпадают с точностью до 1.5–2%.

На двухкаскадном модуле достигается $T_c = 197\text{ K}$ за $\theta=12\text{ с}$, что на 10 K ниже минимальной температуры в стационарном режиме.

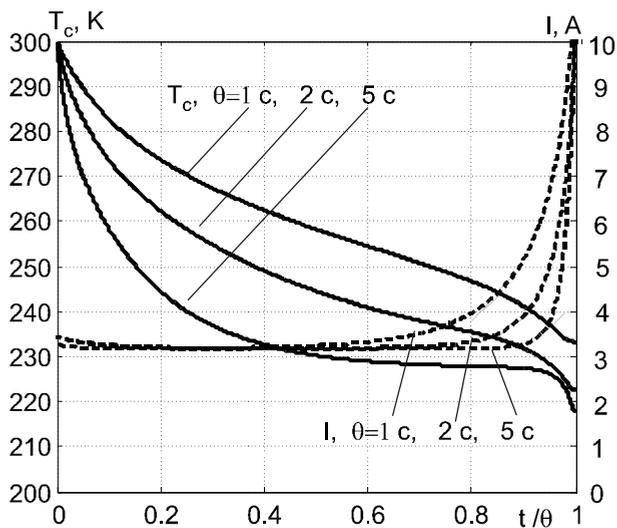


Рис. 4. Оптимальные зависимости тока I и соответствующие зависимости температуры охлаждения T_c однокаскадного модуля от безразмерного параметра времени t/θ для различных интервалов времени θ .

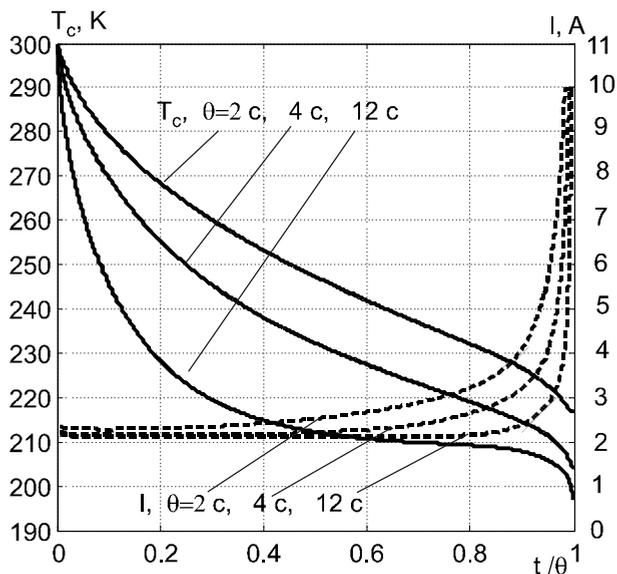


Рис. 5. Оптимальные зависимости тока I и соответствующие зависимости температуры охлаждения T_c двухкаскадного модуля от безразмерного параметра времени t/θ для различных интервалов времени θ .

На рис. 6 показано, какую минимальную температуру можно достичь за различные промежутки времени при использовании оптимальных функций тока питания одно- и двухкаскадного модулей. Эти же данные демонстрируют, за какое минимальное время достигается заданная температура охлаждения.

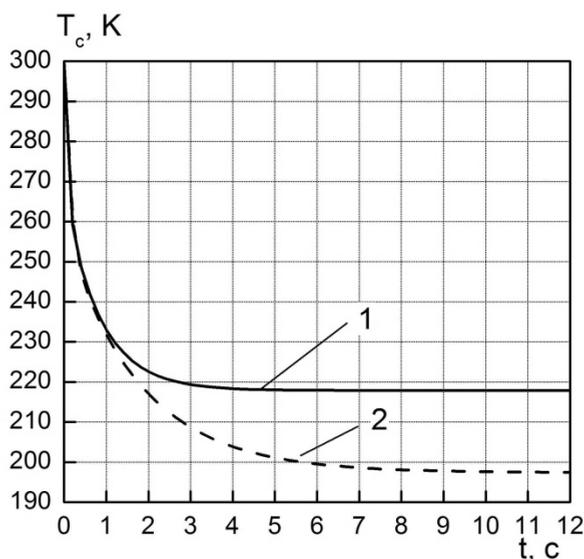


Рис. 6. Минимальная температура T_c нестационарного охлаждения, которая достигается за разные промежутки времени t однокаскадным (1) и двухкаскадным (2) охладителями при использовании оптимальных функций тока питания.

Таким образом, полученные результаты оптимизации нестационарного процесса термоэлектрического охлаждения доказывают, что применение оптимальных функций тока позволяет достичь существенно более низких температур, чем это возможно при использовании постоянного тока.

Выводы

Дискретизация по координате объектов с распределенными параметрами, поведение которых описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений параболического типа, дает возможность применить принцип максимума Понтрягина для моделирования оптимальных функций управления и является одним из рациональных способов решения задач оптимального управления такими объектами.

Примером такой задачи является оптимизация процесса нестационарного термоэлектрического охлаждения, результаты решения которой показали, что рассчитанные оптимальные зависимости тока питания от времени для одно- и двухкаскадных термоэлектрических модулей обеспечивают в нестационарном режиме температуру охлаждения на 10 К ниже минимальной температуры в стационарном режиме. Это свидетельствует о перспективности использования нестационарных режимов термоэлектрических устройств, рациональное функционирование которых возможно лишь при решении задач оптимального управления такими режимами.

1. Ahmed N.U. Distributed Parameter Systems / N.U. Ahmed // Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition). Academic PRESS, 2003. — P. 561–587.

2. Alessandri S.A. Feedback Optimal Control of Distributed Parameter Systems by Using Finite-Dimensional Approximation Schemes / S.A. Alessandri, M. Gaggero, R. Zoppoli // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. — 2012. — Vol. 23, No. 6. — P. 984–995.
3. Guangcao Ji. Optimal Boundary Control of the Heat Equation with Target Function at Terminal Time / Ji Guangcao, Martin Clyde // *Applied Mathematics and Computation*. — 2002. — Vol. 127. — P. 335–345.
4. Bokhari M.A. Optimal Control of Parabolic Systems with Infinite Time Horizons / M.A. Bokhari, I.S. Sadek // *Applied Mathematics and Computation*. — 2008. — Vol. 206. — P. 678–684.
5. El-Farra N.H. Analysis and Control of Parabolic PDE Systems with Input Constraints / N.H. El-Farra, A. Armaou, P.D. Christofides // *Automatica*. — 2003. — Vol. 39. — P. 715–725.
6. Kucuka I. Optimal Control of a Distributed Parameter System with Applications to Beam Vibrations Using Piezoelectric Actuators / I. Kucuka, I. Sadeka, Y. Yilmaz // *Journal of the Franklin Institute*. — 2014. — Vol. 351, issue 2. — P. 656–666.
7. Zuyev A. Partial Asymptotic Stabilization of Nonlinear Distributed Parameter Systems / A. Zuyev // *Automatica*. — 2005. — Vol. 41. — P. 1–10.
8. Zuazua E. Propagation, Observation, and Control of Waves Approximated by Finite Difference Methods / E. Zuazua // *SIAM Rev.* — 2005. — Vol. 47, No. 2. — P. 197–243.
9. Krstic M. Boundary Controllers and Observers for the Linearized Schrödinger Equation / M. Krstic, B.-Z. Guo, A. Smyshlyayev // *SIAM J. Control Opt.* — 2011. — Vol. 49, No. 4. — P. 1479–1497.
10. Subas M. An Optimal Control Problem Governed by the Potential of a Linear Schrödinger Equation / M. Subas // *Applied Mathematics and Computation*. — 2002. — Vol. 131. — P. 95–106.
11. Alvarez-Vazquez L.J. Optimal Control of a Bioreactor / L.J. Alvarez-Vazquez, F.J. Fernandez // *Applied Mathematics and Computation*. — 2010. — Vol. 216. — P. 559–575.
12. Ryu Sang-Uk. Optimal Control for an Adsorbate-Induced Phase Transition Model / Sang-Uk Ryu, Atsushi Yagi // *Applied Mathematics and Computation*. — 2005. — Vol. 171. — P. 420–432.
13. Hoffman K.H. Optimal Control of a Phase Field Model for Solidification / K.H. Hoffman, L. Jiang // *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* — 1992. — Vol. 13, No. 1&2. — P. 11–27.
14. Muresan V. Cascade Control of a Residual Water Blunting System / V. Muresan, M. Abrudean, M. Unguresan, T. Colosi // *Advances in Electrical and Computer Engineering*. — 2014. — Vol. 14, No. 2. — P. 135–144.
15. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузными процессами / А.И. Егоров. — М.: Наука, 1978. — 463 с.
16. Geering Hans P. Optimal Control with Engineering Applications / Hans P. Geering. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 134 p.
17. Sethi Suresh P. Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics / Suresh P. Sethi, Gerald L. Thompson. — Springer Science+Business Media, Inc., 2000. — 505 p.
18. Анатычук Л.И. Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов / Л.И. Анатычук, В. А. Семенов. — Черновцы: Прут, 1992. — 263 с.
19. Математическая теория оптимального управления / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
20. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
21. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т.К. Сиразетдинов. — М.: Наука, 1977. — 479 с.
22. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.

23. Шевяков А.А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А.А. Шевяков, Р.В. Яковлева. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 208 с.
24. Анатычук Л.И. Термоэлектричество. Том II. Термоэлектрические преобразователи энергии / Л.И. Анатычук. — Киев, Черновцы: Институт термоэлектричества, 2003. — 376 с.
25. Yang Ronggui. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices / Ronggui Yang, Gang Chen, A. Ravi Kumar, G. Jeffrey Snyder, Jean-Pierre Fleurial // Energy Conversion and Management. — 2005. — Vol. 46. — P.1407–1421.
26. Коцур М.П. Наближений метод оптимального керування в задачах нестационарного термоелектричного охолодження / М.П. Коцур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 4 (114). — С. 37–47.
27. Однокаскадные термоэлектрические модули. Available at: <http://www.kryothermtec.com/ru/standsard-single-stage-thermoelectric-coolers.html>.
Двухкаскадные термоэлектрические модули. Available at: <http://www.kryothermtec.com/ru/2-stage-thermoelectric-coolers.html>.

UDC 517.977

OPTIMAL CONTROL BY TRANSIENT MODE OF STAGE THERMOELECTRIC COOLER

M.P. Kotsur¹, A.G. Nakonechniy²

¹*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*

²*Taras Shevchenko National University of Kyiv*

Introduction. A large variety of optimization problems is related to distributed parameter systems (DPSs), whose behavior is described by partial differential equations. The optimal control theory is widely employed for optimization of lumped parameter systems (LPSs), which are modeled by ordinary differential equations. Development of the theory and methods for obtaining optimal control functions for DPSs is much more difficult as compared with solving such problem for LPSs.

The purpose of the present paper is to obtain optimality conditions and to develop numerical methods for solving the optimization problem of an unsteady one-dimensional process with distributed parameters, as well as their application to optimization of transient thermoelectric cooling.

Methods. A method is proposed for solving of optimal control problem for DPS described by nonlinear partial differential equations of parabolic type with nonstandard boundary conditions. A method consists in coordinate discretization of distributed object and transition to the problem for LPS. Optimal control theory based on the Pontryagin maximum principle can be used for such system optimization.

Results. This method is applied for optimization of transient thermoelectric cooling process. Optimal dependences of current on time have been calculated for stage thermoelectric cooler power supply with the purpose of minimizing the cooling temperature within a preset time interval. Results of computer experiment for one- and two-stage coolers are presented.

Conclusion. The obtained results show that the implementation of optimal functions for cooler power supply can provide the cooling temperature in transient mode by 10 K lower than minimum temperature reached at direct current.

Keywords: distributed parameter system, optimal control, Pontryagin maximum principle, optimization, transient thermoelectric cooling.

1. Ahmed N.U. *Distributed Parameter Systems*. Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), Academic PRESS, 2003, pp. 561–587.
2. Alessandri S.A., Gaggero M., Zoppoli R. Feedback Optimal Control of Distributed Parameter Systems by Using Finite-Dimensional Approximation Schemes. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, vol. 23, no. 6, pp. 984–995.
3. Guangcao Ji, Clyde Martin. Optimal Boundary Control of the Heat Equation with Target Function at Terminal Time. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, vol. 127, pp. 335–345.
4. Bokhari M.A., Sadek I.S. Optimal Control of Parabolic Systems with Infinite Time Horizons. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 206, pp. 678–684.
5. El-Farra N.H., Armaou A., Christofides P.D. Analysis and Control of Parabolic PDE Systems with Input Constraints. *Automatica*, 2003, vol. 39, pp. 715–725.
6. Kucuka I., Sadeka I., Yilmazc Y. Optimal Control of a Distributed Parameter System with Applications to Beam Vibrations Using Piezoelectric Actuators. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, issue 2, February, pp. 656–666.
7. Zuyev A. Partial Asymptotic Stabilization of Nonlinear Distributed Parameter Systems. *Automatica*, 2005, vol. 41, pp. 1–10.
8. Zuazua E. Propagation, Observation and Control of Waves Approximated by Finite Difference Methods. *SIAM Rev.*, 2005, vol. 47, no. 2, pp. 197–243.
9. Krstic M., Guo B.-Z., Smyshlyaev A. Boundary Controllers and Observers for the Linearized Schrödinger Equation. *SIAM J. Control Opt.*, 2011, vol. 49, no. 4, pp. 1479–1497.
10. Subas M. An Optimal Control Problem Governed by the Potential of a Linear Schrödinger Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, vol. 131, pp. 95–106.
11. Alvarez-Vazquez L.J., Fernandez F.J. Optimal Control of a Bioreactor. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, vol. 216, pp. 559–575.
12. Ryu Sang-Uk, Yagi Atsushi. Optimal Control for an Adsorbate-Induced Phase Transition Model. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, vol. 171, pp. 420–432.
13. Hoffman K.H., Jiang L. Optimal Control of a Phase Field Model for Solidification. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 1992, vol. 13, no. 1&2, pp. 11–27.
14. Muresan V., Abrudean M., Unguresan M., Colosi T. Cascade Control of a Residual Water Blunting System. *Advances in Electrical and Computer Engineering*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 135–144.
15. Egorov A.I. *Optimal control by thermal and diffuse processes*. Moscow: Science, 1978, 463 p. (in Russian).
16. Geering Hans P. *Optimal Control with Engineering Applications*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 134 p.
17. Sethi Suresh P. *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics*. Springer Science+Business Media, Inc., 2000. 505 p.
18. Anatyhuk L.I. *Optimal Control by Properties of Thermoelectric Materials and Devices*. Chernivtsi: Prut, 1992. 263 p. (in Russian).
19. Pontryagin L.S., Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.S., Mischenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Moscow: Nauka, 1976. 392 p. (in Russian).
20. Butkovskii A.G. *Theory of Optimal Control by Distributed Parameters Systems*. Moscow: Nauka, 1965. 474 p. (in Russian).
21. Sirazetdinov T.K. *Optimization of Distributed Parameters Systems*. Moscow: Nauka, 1977. 479 p. (in Russian).
22. Fursikov A.V. *Optimal Control by Distributed Systems. Theory and Application*. Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999. 352 p. (in Russian).
23. Shevyakov A.A., Yakovleva R.V. *Control by Thermal Objects with Distributed Parameters*. Moscow: Energoatomizdat, 1986. 208 p. (in Russian).

24. Anatyshuk L.I. *Thermoelectricity. Vol. II. Thermoelectric Energy Convertors*. Kiev, Chernovtsi: Institute of Thermoelectricity, 2003. 376 p.
25. Yang Ronggui, Chen Gang, Kumar A. Ravi, Snyder G. Jeffrey, Fleurial Jean-Pierre. Transient Cooling of Thermoelectric Coolers and its Applications for Microdevices. *Energy Conversion and Management*, 2005, vol. 46, pp.1407–1421.
26. Kotsur M.P. Approximate Method of Optimal Control in Problems of Transient Thermoelectric Cooling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, vol. 114, no. 4, pp. 37-47. (in Ukrainian)
27. *One-stage thermoelectric modules*. Available at: <http://www.kryothermtec.com/ru/standsard-single-stage-thermoelectric-coolers.html>.
Two-stage thermoelectric modules. Available at: <http://www.kryothermtec.com/ru/2-stage-thermoelectric-coolers.html>.

Получено 18.02.2015