

УДК 621.318.001.2

А. Е. Божко, член-кор. НАН УкраиныИнститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: bozhko@ipmach.kharkov.ua)**ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Определяются погрешности выходных сигналов динамических систем в зависимости от погрешностей входных воздействий и погрешностей в передаточных функциях. Также определяются погрешности амплитуд и углов сдвига в колебательных системах.

Визначаються похибки вихідних сигналів динамічних систем залежно від похибок входних впливів і похибок у передатних функціях. Також визначаються похибки амплітуд і кутів зсуву в коливальних системах.

Введение

В данной работе предпринята попытка теоретически показать проявление систематических погрешностей в динамических системах. Большое внимание уделяется колебательным системам. Систематические погрешности являются функциональными. При известных функциональных зависимостях в любой динамической системе автоматические погрешности могут корректироваться с помощью поправок, компенсации. Систематические погрешности могут быть детерминированными (Δ) и случайными (ξ). Теории погрешностей Δ и ξ разные. Здесь будем рассматривать систематические погрешности на основе использования известных функциональных зависимостей в исследуемой системе [1].

Вначале рассмотрим динамические системы в общем виде, в которых выходная величина $x(p)$ связана с входной величиной $U(p)$, где $p = \frac{d}{dt}$, зависимостью

$$x(p) = U(p)W(p), \quad (1)$$

где $W(p)$ – передаточная функция системы.

В данном объекте на основании (1) функциональные погрешности следующие: $\Delta x(p)$, $\Delta U(p)$, $\Delta W(p)$. Введя эти погрешности в (1), получаем

$$x + \Delta x = (U + \Delta U)(W + \Delta W) = UW + U\Delta W + \Delta UW + \Delta U\Delta W \quad (2)$$

Из (2) видно, что

$$\Delta x = U\Delta W + \Delta UW + \Delta U\Delta W \quad (3)$$

Приведем (3) к виду

$$x\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = UW\left(\frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta U\Delta W}{UW}\right), \quad (4)$$

На основе (1) в выражении (4) сократим x и UW . Тогда получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_W + \varepsilon_U + \varepsilon_U\varepsilon_W, \quad (5)$$

где $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$; $\varepsilon_W = \frac{\Delta W}{W}$; $\varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U}$.

Выражение (5) отражает изображение Лапласа функциональной относительной погрешности ε_x от относительных погрешностей ε_W , ε_U . Оригиналы этих погрешностей $\varepsilon_k(p)$, $k = U, W$ были найдены, и изображения $\varepsilon_k(t)$, $k = U, W$ определяются по формуле [2]

$$\varepsilon_k(p) = \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt.$$

Если динамическая система является следящей, то тогда $\Delta U = 0$, а

$$\varepsilon_x = \varepsilon_W. \quad (6)$$

В большинстве случаев при заданном $U(t)$ погрешности ε_x определяются выражением (6). А это значит, что следует более подробно рассмотреть погрешности ε_W различных динамических систем. Если система является разомкнутой с передаточной функцией $W(p)$, то ее относительная ошибка $\varepsilon_W = \frac{\Delta W}{W}$. При последовательном соединении различных звеньев с передаточными функциями $W_s(p)$, $s = 1, 2, \dots, n$ передаточная функция системы $W(p) = \prod_{s=1}^n W_s(p)$. Если в каждой передаточной функции $W_s(p)$ имеется абсолютная погрешность $\Delta W_s(p)$, то абсолютная погрешность $\Delta W(p)$ в общей передаточной функции $W_s(p)$ определяется из соотношения

$$W + \Delta W = \prod_{s=1}^n (W_s + \Delta W_s). \quad (7)$$

Осуществим в (7) преобразования вида

$$W \left(1 + \frac{\Delta W}{W} \right) = \prod_{s=1}^n W_s \left(1 + \frac{\Delta W_s}{W_s} \right) = W(1 + \varepsilon_W) = \prod_{s=1}^n W_s \prod_{s=1}^n (1 + \varepsilon_{W_s}),$$

откуда получаем $1 + \varepsilon_W = \prod_{s=1}^n (1 + \varepsilon_{W_s})$ и

$$\varepsilon_W = \left[\prod_{s=1}^n (1 + \varepsilon_{W_s}) \right] - 1. \quad (8)$$

Если одинаковые $\varepsilon_{W_s} = \varepsilon$, то $\varepsilon_W = (1 + \varepsilon)^n - 1$.

Итак, при последовательном соединении звеньев в динамической системе относительная погрешность в передаточной функции определяется выражением (8).

При параллельном соединении звеньев с передаточными функциями $W_s(p)$, $s = 1, 2, \dots, n$ общая передаточная функция системы выражается формулой $W(p) = \sum_{s=1}^n W_s(p)$.

Если в каждой передаточной функции $W_s(p)$ имеется погрешность $\Delta W_s(p)$, то тогда $\Delta W(p)$ системы находится из выражения

$$W + \Delta W = \sum_{s=1}^n (W_s + \Delta W_s). \quad (9)$$

Как и для (7), осуществим в (9) преобразования

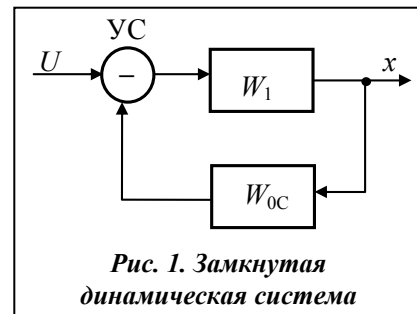
$$W \left(1 + \frac{\Delta W}{W} \right) = W(1 + \varepsilon_W) = \sum_{s=1}^n W_s \left(1 + \frac{\Delta W_s}{W_s} \right) = \sum_{s=1}^n W_s (1 + \varepsilon_s). \quad (10)$$

Если для всех звеньев $\varepsilon_s = \varepsilon$, то $\varepsilon_W = \varepsilon$.

Из (10) получаем общую относительную погрешность

$$\varepsilon_W = \left[\sum_{s=1}^n \frac{W_s}{W} (1 + \varepsilon_s) \right] - 1.$$

Далее рассмотрим замкнутую систему вида (см. рис. 1), где $W_1 = W_1(p)$, $W_{0c} = W_{0c}(p)$ – передаточные функции разомкнутой системы и звеньев отрицательной обрат-



ной связи соответственно; УС – устройство разности сигналов U и xW_{0C} ; x – выходной сигнал.

Передаточная функция данной системы следующая:

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_{0C}}. \quad (11)$$

При наличии погрешностей ΔW_1 , ΔW_{0C} в передаточных функциях W_1 и W_{0C} выражение (11) принимает вид

$$W + \Delta W = \frac{W_1 + \Delta W_1}{1 + (W_1 + \Delta W_1)(W_{0C} + \Delta W_{0C})}. \quad (12)$$

Представим (12) через относительные погрешности $\varepsilon_W = \frac{\Delta W}{W}$, $\varepsilon_{W_1} = \frac{\Delta W_1}{W_1}$, $\varepsilon_{0C} = \frac{\Delta W_{0C}}{W_{0C}}$. Для этого осуществим следующие преобразования:

$$W(1 + \varepsilon_W) = \frac{W_1(1 + \varepsilon_{W_1})}{1 + W_1 W_{0C}(1 + \varepsilon_{W_1})(1 + \varepsilon_{W_{0C}})},$$

откуда

$$\varepsilon_W = \frac{W_1}{W} \frac{1 + \varepsilon_{W_1}}{1 + W_1 W_{0C}(1 + \varepsilon_{W_1})(1 + \varepsilon_{W_{0C}})} - 1. \quad (13)$$

Выражением (13) описывается общая погрешность в передаточной функции замкнутой системы в функции погрешностей индивидуальных звеньев.

Далее перейдем к определению функциональных погрешностей колебательных систем (КС). Вначале рассмотрим КС с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F, \quad (14)$$

где m – масса; b , c – коэффициенты диссипации и жесткости соответственно; x – перемещение; F – сила.

Будем считать, что в (14) сила $F = F_0 + F_{\sim}$, где F_0 – постоянная, а F_{\sim} – переменная составляющие. Сила F_0 вызывает в КС постоянное смещение $x_0 = F_0/C$, которое может иметь абсолютную Δx_0 или относительную $\varepsilon_{x_0} = \frac{\Delta x_0}{x_0}$ погрешности. Рассмотрим более подробно

Δx_0 и ε_{x_0} . Для этого запишем

$$\Delta x_0 = \frac{F_0 + \Delta F_0}{C + \Delta C} - \frac{F_0}{C} = \frac{C \Delta F_0 - \Delta C F_0}{(C + \Delta C)C} = x_0 \frac{\varepsilon_{F_0} - \varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C},$$

откуда

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\varepsilon_{F_0} - \varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C}, \quad \varepsilon_C = \frac{\Delta C}{C}. \quad (15)$$

Индивидуальные зависимости ε_{x_0} от ε_{F_0} или ε_C на основании (15) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0}(F) &= \varepsilon_{F_0} \text{ при } \varepsilon_C = 0, \\ \varepsilon_{x_0}(C) &= -\frac{\varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C} \text{ при } \varepsilon_{F_0} = 0. \end{aligned}$$

Переменная составляющая силы F_{ω} , например $F_{\omega} = F_a \sin \omega t$, где F_a – амплитуда; ω – круговая частота, вызывает гармоническое колебание КС $x(t) = x_a \sin(\omega t - \varphi)$, где x_a – амплитуда; φ – угол сдвига между $F(t)$ и $x(t)$.

Известно [3], что амплитуда и угол φ определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \frac{F_a}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}, \\ \varphi &= \arctg \frac{b\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний КС.

Перейдем к определению погрешности Δx_a системы (16). С учетом (16)

$$\Delta x_a = \frac{F_a + \Delta F_a}{(m + \Delta m) \sqrt{[(\omega + \Delta\omega)^2 - (\omega_0 + \Delta\omega_0)^2]^2 + \left[\frac{b + \Delta b}{m + \Delta m} (\omega + \Delta\omega)\right]^2}} - \frac{F_a}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}. \quad (17)$$

Приведем (17) к относительным погрешностям

$$\varepsilon_{x_a} = \frac{\Delta x_a}{x_a}, \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m}, \quad \varepsilon_\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega}, \quad \varepsilon_{\omega_0} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}, \quad \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b}.$$

В результате получим

$$\varepsilon_{x_a} = \left\langle \frac{1 + \varepsilon_F}{1 + \varepsilon_m} \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b}{m} \omega\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[\omega^2 (1 + \varepsilon_\omega)^2 - \omega_0^2 (1 + \varepsilon_{\omega_0})^2 \right]^2 + \left[\frac{\omega b (1 + \varepsilon_b) (1 + \varepsilon_\omega)}{m (1 + \varepsilon_m)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right\rangle. \quad (18)$$

Индивидуальные зависимости ε_{x_a} от ε_F , ε_ω , ε_{ω_0} , ε_m , ε_b определяются из (18) при одной погрешности $\neq 0$ и при других погрешностях = 0. Абсолютная погрешность $\Delta\varphi$ угла сдвига φ в КС определяется выражением

$$\Delta\varphi = \arctg \frac{(\omega + \Delta\omega)(b + \Delta b)}{(\omega + \Delta\omega)^2 - (\omega_0 + \Delta\omega_0)^2} - \arctg \frac{\omega b}{\omega^2 - \omega_0^2} = \\ = \arctg \frac{\omega b \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right)}{\omega^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}\right)^2} - \arctg \frac{\omega b}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (19)$$

Из (19) получим относительную погрешность $\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ в виде

$$\varepsilon_\varphi = \arctg \frac{\omega b (1 + \varepsilon_\omega)^2 (1 + \varepsilon_{\omega_0})^2}{\omega^2 (1 + \varepsilon_\omega)^2 - \omega_0^2 (1 + \varepsilon_{\omega_0})^2} \left(\arctg \frac{\omega b}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^{-1} - 1. \quad (20)$$

Индивидуальные зависимости ε_φ от одной погрешности определяются из (20) при равенстве нулю остальных погрешностей.

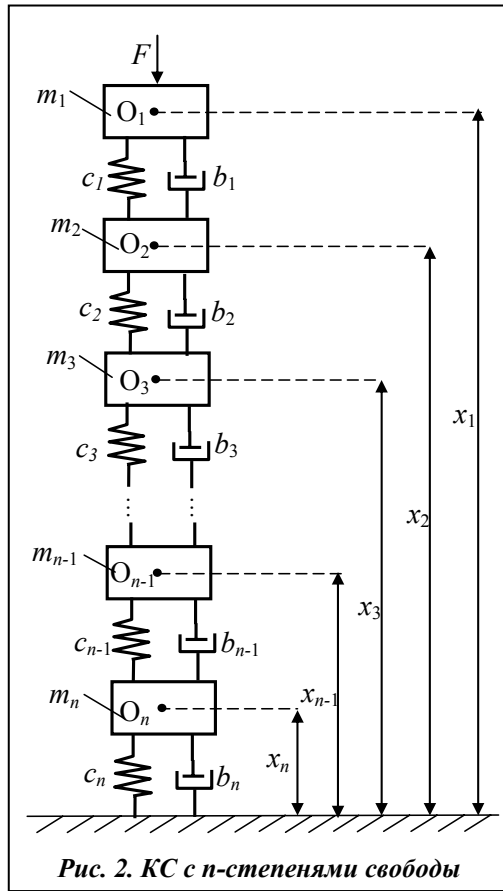


Рис. 2. КС с n -степенями свободы

Далее перейдем к КС с n -степенями свободы (см. рис. 2), где m_k – массы; C_k, b_k – коэффициенты жесткости и диссипации соответственно; x_k – перемещение, $k = 1, 2, \dots, n$.

Движение этой КС описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 &= F + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_2}{dt} + c_1 + c_2 &= b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1, \\ \dots & \\ m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + (b_{n-1} + b_n) \frac{dx_n}{dt} + c_{n-1} + c_n &= \\ &= b_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt} + c_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \right\} (21)$$

Здесь также будем считать, что сила $F = F_0 + F_n \sin \omega t$. Тогда F_0 вызывает смещение всей КС, описываемое системой уравнений (21) в виде

$$\left. \begin{aligned} c_1 x_{10} &= F_0 + c_1 x_{20}, \\ x_{20} (c_1 + c_2) &= c_1 x_{10} + c_2 x_{30}, \\ \dots & \\ x_{(n-1)0} (c_{n-2} + c_{n-1}) &= c_{n-3} x_{(n-2)0} + c_{n-1} x_{n0}, \\ x_{n0} (c_{n-1} + c_n) &= c_{n-1} x_{(n-1)0} \end{aligned} \right\} (22)$$

Из системы уравнений (22) видно, что каждое смещение $x_{k0}, k = 1, 2, \dots, n$ зависит от $(n - 1)$ смещений $x_{s0}, s = 1, 2, \dots, n - 1, s \neq k$, а это значит, что если имеем погрешности Δx_{k0} или $\varepsilon_{xk0} = \frac{\Delta x_{k0}}{x_{k0}}, k = 1, 2, \dots, n$, то из системы (20) можно найти зависимость ε_{xk0} ,

$k = 1, 2, \dots, n$ от погрешностей в силе F_0 , коэффициентов жесткости c_k и смещений $x_{s0}, s = 1, 2, \dots, n - 1, s \neq k$ на основании следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + \Delta c_1)(x_{10} + \Delta x_{10}) &= (F_0 + \Delta F_0) + (c_1 + \Delta c_1)(x_{20} + \Delta x_{20}), \\ (c_1 + \Delta c_1 + c_2 + \Delta c_2)(x_{20} + \Delta x_{20}) &= (c_1 + \Delta c_1)(x_{10} + \Delta x_{10}) + (c_2 + \Delta c_2)(x_{30} + \Delta x_{30}), \\ \dots & \\ (c_{n-2} + \Delta c_{n-2} + c_{n-1} + \Delta c_{n-1}) [x_{(n-1)0} + \Delta x_{(n-1)0}] &= \\ &= (c_{n-3} + \Delta c_{n-3}) [x_{(n-2)0} + \Delta x_{(n-2)0}] + (c_{n-1} + \Delta c_{n-1})(x_{n0} + \Delta x_{n0}), \\ (c_{n-1} + \Delta c_{n-1} + c_{n-2} + \Delta c_{n-2})(x_{n0} + \Delta x_{n0}) &= (c_{n-1} + \Delta c_{n-1}) [x_{(n-1)0} + \Delta x_{(n-1)0}] \end{aligned} \right\} (23)$$

Решение системы (23) дает результат Δx_{k0} или $\varepsilon_{xk0}, k = 1, 2, \dots, n$. Переменная составляющая силы $F_{\sim} = F_a \sin \omega t$ вызывает в КС с n -степенями свободы колебания $x_k(t) = x_{ak} \sin(\omega t - \varphi_k)$, где φ_k – углы сдвига между $x_{(k-1)}(t)$ и $x_k(t)$.

Амплитуды x_{ak} определяются по формуле [3]

$$\begin{aligned}
 x_{a1} &= \frac{\left| F_a + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2 \right|}{m_1 \sqrt{(\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 + \left(\frac{b_1 \omega}{m_1} \right)^2}}, & x_{a2} &= \frac{\left| b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 \right|}{m_2 \sqrt{(\omega^2 - \omega_{02}^2)^2 + \left[\frac{(b_1 + b_2) \omega}{m_2} \right]^2}}, \\
 x_{ak} &= \frac{\left| b_{k-1} \frac{dx_{k-1}}{dt} + b_{k+2} \frac{dx_{k+2}}{dt} + c_{k-1} x_{k-1} + c_k x_{k+2} \right|}{m_k \sqrt{(\omega^2 - \omega_{0k}^2)^2 + \left[\frac{(b_{k-1} + b_k) \omega}{m} \right]^2}}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Углы сдвига φ_k определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_2 &= \operatorname{arctg} \frac{(b_1 + b_2) \omega}{\omega^2 - \omega_{02}^2}, \\
 \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{(b_{k-1} + b_k) \omega}{\omega^2 - \omega_{03}^2}
 \end{aligned} \right\}. \tag{25}$$

Выражения (24), (25) по форме похожи на (16), а это значит, что погрешности Δx_{ak} , ε_{ak} , $\Delta \varphi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ могут определяться теми же методами, что ранее (для КС с одной степенью свободы [см. (17)–(20)]). Эти конкретные решения громоздки, а принципиально не отличаются от нахождения Δx_a , ε_{xa} , $\Delta \varphi$, ε_φ для КС с одной степенью свободы. Поэтому здесь они не приводятся.

Заключение

Таким образом, в результате данного исследования предложен метод определения функциональных погрешностей в динамических и, в частности, в колебательных системах. Результаты таких решений позволяют обеспечить или, в крайнем случае, повысить качество функционирования систем.

Литература

1. Божко А. Е. Теория функциональных погрешностей электромагнитных вибровозбудителей / А. Е. Божко // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 86–95.
2. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях / М. И. Конторович. – М.: Наука, 1964. – 328 с.
3. Божко А. Е. Динамико-энергетические связи колебательных систем / А. Е. Божко, Н. М. Голуб. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Поступила в редакцию
01.06.11