Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 39 – 54

Характеристические подгруппы бесконечного сплетения элементарных абелевых групп

Юрий Ю. Лещенко

(*Представлена Б. В. Новиковым*)

Аннотация. В работе исследуется характеристическое строение бесконечного сплетения элементарных абелевых групп ранга n. Основным результатом работы является формулировка критерия характеристичности подгрупп данного сплетения.

2000 MSC. 20E18, 20E22.

Ключевые слова и фразы. Сплетение, элементарная абелева группа, характеристическая подгруппа.

1. Введение

В работе [3] при изучении силовского строения финитарной симметрической группы естественным образом возникает конструкция обобщенного сплетения циклических групп простого порядка. Подобные обобщения имеют место также при исследовании различных индуктивных пределов конечных симметрических групп (см., например, [2, 6]). В статье [6] выделена одна из силовских p-подгрупп (обозначим ее U_p^∞) предельной группы прямого спектра симметрических групп степеней p^n $(n = 1, 2, \dots)$ со строго диагональными вложениями. Группу U_p^∞ можно представить как одну из модификаций бесконечного сплетения циклических групп простого порядка p. Позднее ([4]), основываясь на методе, предложенном в работе [1] Л. А. Калужниным, было изучено строение U_p^∞ (выделен класс, так называе-

Статья поступила в редакцию 30.09.2008

мых, параллелотопических подгрупп, сформулирован критерий нормальности подгрупп данного класса, описаны характеристические подгруппы). С другой стороны, в статье [7] В. И. Сущанский обобщил результаты, полученные в [1], на случай конечного сплетения элементарных абелевых p-групп ранга n.

Статья является продолжением работы [5], где изучается строение бесконечного (срезанного слева) сплетения $U_{p,n}^{\infty}$ элементарных абелевых p-групп ранга n. Модифицировав понятие высоты одночлена, предложенное В. И. Сущанским, в [5] также удалось выделить класс параллелотопических подгрупп, сформулировать критерий их нормальности и показать, что все характеристические подгруппы — параллелотопические.

В первых двух пунктах данной работы вводятся необходимые определения и обозначения, а также приведены главные результаты из [5]. Основной результат работы — критерий характеристичности подгрупп группы $U_{p,n}^{\infty}$ — сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.1. *При $p \neq 2$ подгруппа группы $U_{p,n}^{\infty}$ является характеристической тогда и только тогда, когда она является нормальной однородной параллелотопической подгруппой.*

2. Необходимые вспомогательные сведения

Рассмотрим группу $\mathbb{F}_p^n$ (элементарную абелеву p-группу ранга n) как адитивную группу арифметического n-мерного векторного пространства над полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов, где p — простое число ($p \neq 2$). Будем считать, что она действует на множестве своих элементов правыми сдвигами. В работе [5] рассматривается группа $U_{p,n}^{\infty}$ — так называемое *срезанное слева* сплетение по последовательности групп подстановок, каждая из которых изоморфна $\mathbb{F}_p^n$. Элементами $U_{p,n}^{\infty}$ являются бесконечные почти нулевые последовательности вида

$$[\overline{a}_1(\overline{v}_2,\dots,\overline{v}_k),\dots,\overline{a}_m(\overline{v}_{m+1},\dots,\overline{v}_k),\overline{0},\overline{0},\dots],\quad k>m\quad (k,m\in\mathbb{N}), \tag{2.1}$$

где $\overline{a}_j(\overline{v}_{j+1},\dots,\overline{v}_k)$ — функция из $\mathbb{F}_p^n\times\dots\times\mathbb{F}_p^n$ ($k-j$ множителей) в $\mathbb{F}_p^n$, $\overline{0}$ — нулевой вектор. При этом действие $U_{p,n}^{\infty}$ на декартовом произведении $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_p^n$ задается правилом:

$$(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_m,\dots)^u=(\overline{v}_1+\overline{a}_1(\overline{v}_2,\dots,\overline{v}_k),\dots,\overline{v}_m+\overline{a}_m(\overline{v}_{m+1},\dots,\overline{v}_k),\dots), \tag{2.2}$$

где $(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_m,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_p^n$, u — таблица вида (2.1).

Введем ряд вспомогательных обозначений: $\overline{v}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})^T$ — вектор-столбец из $\mathbb{F}_p^n$; $X_{i,j} = (\overline{v}_i, \ldots, \overline{v}_j)$ — упорядоченный набор векторов-столбцов (фактически $X_{i,j} = (x_{st})_{n\times(j-i+1)}$ — матрица над полем $\mathbb{F}_p$, где $s = 1, \ldots, n$, $t = i, \ldots, j$). Каждую из векторных функций $\overline{a_j}$ в записи таблицы (2.1) можно заменить набором редуцированных (степень переменных $\le p-1$) многочленов над $\mathbb{F}_p$. В итоге, последовательности (2.1) соответствует таблица

$$\left[\begin{array}{l} a_{11}(X_{2,k}), \quad \ldots, \quad a_{1m}(X_{m+1,k}), \quad 0, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(X_{2,k}), \quad \ldots, \quad a_{nm}(X_{m+1,k}), \quad 0, \quad \ldots \end{array}\right], \quad k > m \quad (k, m \in \mathbb{N}), \tag{2.3}$$

где $a_{ij}(X_{j+1,k})$ — редуцированный многочлен ($i = 1, \ldots, n$, $j \in \mathbb{N}$), который называется (i,j)-*координатой* таблицы (2.3). Таблица имеет *глубину* r и *ранг* k, если все ее столбцы, начиная с $(r+1)$-го, являются нулевыми, а r-й столбец — ненулевой, и каждый из координатных многочленов может зависеть только от переменных $x_{11}, \ldots, x_{nk}$ (второй индекс переменной не превышает k).

Таблицы вида (2.3) сокращенно записываем как $[a_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty}$. Обозначим $f(X_{s,t}^u)$ — многочлен, получаемый после приведения к редуцированному виду многочлена

$$f\begin{pmatrix} x_{1s} + a_{1s}(X_{s+1,k}) & \ldots & x_{1t} + a_{1t}(X_{t+1,k}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{ns} + a_{ns}(X_{s+1,k}) & \ldots & x_{nt} + a_{nt}(X_{t+1,k}) \end{pmatrix}.$$

Тогда произведением таблиц $u = [a_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty}$ и $v = [b_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty}$ является таблица $[a_{ij}(X_{j+1,k}) + b_{ij}(X_{j+1,k}^u)]_{j=1}^{\infty}$.

3. Необходимое условие характеристичности подгрупп в $U_{p,n}^{\infty}$

Пусть $[u]_{ij}$ — (i,j)-координата таблицы u вида (2.3), а $\mathsf{co}_{ij}(f(X))$ — таблица, (i,j)-координата которой равна $f(X)$, а все остальные координаты равны 0.

Определение 3.1. *Высотой одночлена* $x_{11}^{i_{11}} x_{21}^{i_{21}} \cdots x_{n1}^{i_{n1}} \cdots x_{1k}^{i_{1k}} \times x_{2k}^{i_{2k}} \cdots x_{nk}^{i_{nk}}$ *называется число*

$$h = \sum_{t=1}^{k} \left[d^{-t} \sum_{s=1}^{n} i_{st} \right] + 1,$$

где $d = n(p-1)+1$. *Высотой* $h[f]$ *многочлена* f *называется наибольшая из высот его одночленов. Старшим членом многочлена называется сумма входящих в него одночленов, высоты которых равны высоте многочлена. Высоту нулевого многочлена определим равной* 0.

Таким образом, $h[a_{ij}(X_{j+1,k})] \in \{0\} \cup [1; 1+d^{-j})$ для произвольного координатного многочлена $a_{ij}(X_{j+1,k})$ из j-го столбца таблицы (2.3).

Лемма 3.1 ([5]). 1. *Имеют место следующие формулы:*

1) $[u^{-1}]_{ij} = -a_{ij}(X^{u^{-1}}_{j+1,k})$;

2) $[vuv^{-1}]_{ij} = a_{ij}(X^{v}_{j+1,k}) + b_{ij}(X_{j+1,k}) - b_{ij}(X^{vuv^{-1}}_{j+1,k})$;

3) $[(uv)]_{ij} = a_{ij}(X_{j+1,k}) - a_{ij}(X^{uvu^{-1}}_{j+1,k}) + b_{ij}(X^{u}_{j+1,k})] - b_{ij}(X^{uvu^{-1}v^{-1}}_{j+1,k})$.

2. *Группа* $U^{\infty}_{p,n}$ *порождается всевозможными таблицами вида* $\mathsf{co}_{ij}(a_{ij}(X_{j+1,k}))$, $i = 1,\ldots,n$, $j \in \mathbb{N}$, *где* $a_{ij}(X_{j+1,k})$ — *произвольный редуцированный многочлен.*

3. *Группа* $U^{\infty}_{p,n}$ *порождается всевозможными таблицами вида* $\mathsf{co}_{ij}(x^{i_{1,j+1}}_{1,j+1}\ldots x^{i_{nk}}_{nk})$, $i = 1,\ldots,n$, $j \in \mathbb{N}$, *где* $i_{st} \in \mathbb{F}_p\backslash\{0\}$, $s = 1,\ldots,n$, $t = j+1,\ldots,k$.

4. *Если многочлены* $f(X_{1,k})$ *и* $g(X_{1,k})$ *не равны нулю одновременно, то*

1) $h[f(X_{1,k}) + g(X_{1,k})] \le \max\{h[f(X_{1,k})], g(X_{1,k})\}$,

2) $h[f(X_{1,k}) \cdot g(X_{1,k})] \le h[f(X_{1,k})] + h[g(X_{1,k})] - 1$.

Лемма 3.2 ([5]). 1. *Для произвольного многочлена* $f(X_{1,k})$ $(k \in \mathbb{N})$ *и произвольной таблицы* $u \in U^{\infty}_{p,n}$ *выполняется равенство*

$$h[f(X^{u}_{1,k})] = h[f(X_{1,k})].$$

2. *Для произвольного многочлена* $f(X_{1,k})$ $(k \in \mathbb{N})$ *и произвольной таблицы* $u \in U^{\infty}_{p,n}$ *выполняется неравенство*

$$h[f(X_{1,k}) - f(X^{u}_{1,k})] < h[f(X_{1,k})].$$

3. *Для произвольного многочлена* $f(X_{1,k})$ $(h[f(X_{1,k})] = h > 1$, $k \in \mathbb{N})$ *и произвольного натурального* m $(m \geq k)$, *существует таблица* $u \in U_{p,n}^{\infty}$ *такая, что*

$$h[f(X_{1,k}) - f(X_{1,k}^{u})] = h - d^{-m}.$$

4. *Для произвольного многочлена* $f(X_{s,t})$ *и произвольной таблицы* $u \in U_{p,n}^{\infty}$ *глубины* r *выполняется неравенство*

$$h[f(X_{s,t}) - f(X_{s,t}^{u})] < 1 + d^{1-s} - d^{-r}.$$

5. *Для произвольной таблицы* $u \in U_{p,n}^{\infty}$ *глубины* r *и ранга* k, *а также произвольного натурального числа* t $(t > k)$ *существует многочлен* $f(X_{s,t})$ $(s \leq r \leq t)$ *такой, что*

$$h[f(X_{s,t}) - f(X_{s,t}^{u})] = 1 + d^{1-s} - d^{-r} - d^{-t}.$$

Обозначим символом $|u|_{ij}$ высоту (i,j)-координаты таблицы u вида (2.3). Матрицу $|u| = (|u|_{ij})_{n\times\infty}$, $(i = 1,\dots,n,\ j \in \mathbb{N})$ будем называть *характеристикой таблицы* u. На множестве характеристик введем отношение частичного порядка: $|u| \preceq |v|$ тогда и только тогда, когда $|u|_{ij} \leq |v|_{ij}$ для всех $i = 1,\dots,n$, $j \in \mathbb{N}$.

Определение 3.2. *Подгруппа* R *группы* $U_{p,n}^{\infty}$ *называется параллелотопической, если для двух произвольных таблиц* $u, v \in U_{p,n}^{\infty}$ *из того, что* $u \in R$ *и* $|v| \preceq |u|$ *следует, что* $v \in R$.

Поставим в соответствие параллелотопической подгруппе R матрицу $|R| = (k_{ij}^{\varepsilon})_{n\times\infty}$, $i = 1,\dots,n$, $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+,-\}$ такую, что

1) $k_{ij} = \sup_{u\in R} |u|_{ij}$;

2) ε — знак "+", если в R содержится таблица u такая, что $|u|_{ij} = k_{ij}$;

3) ε — знак "−" в противном случае.

Матрицу $|R|$ назовем *характеристикой подгруппы* R. Параллелотопическая подгруппа имеет *глубину* r, если все столбцы ее характеристики, начиная с $(r+1)$-го, являются нулевыми, а r-й столбец — ненулевой.

На множестве $\mathbb{R}_j^\varepsilon$ ($j \in \mathbb{N}$) символов вида k^ε, где $k \in \{0\} \cup [1; 1+d^{-j}]$, $\varepsilon \in \{+,-\}$ введем отношение порядка $\preceq$ по правилу:

1) $k^- \preceq k^+$ для всех допустимых k;

2) $k^\varepsilon \preceq l^\eta$ для произвольных $\varepsilon, \eta \in \{+,-\}$, если $k < l$.

Теорема 3.1 ([5]). *Параллелотопическая подгруппа R глубины r с характеристикой $(k_{ij}^{\pm})_{n\times\infty}$ нормальна в $U_{p,n}^\infty$ тогда и только тогда, когда $k_{ij} \geq 1 + d^{-j} - d^{-r}$, $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, r)$. В частности, каждая собственная нормальная параллелотопическая подгруппа имеет конечную глубину.*

Определение 3.3. *Параллелотопическая подгруппа R называется однородной, если в ее характеристике элементы каждого столбца равны между собой (с учетом маркеров “+” и “−”).*

Однородная параллелотопическая подгруппа R однозначно определяется последовательностью $|R| = (k_j^\varepsilon)$, $k_j \in \{0\} \cup [1; 1+d^{-j}]$, $j \in \mathbb{N}$. Будем называть последовательность $|R|$ *характеристикой однородной подгруппы R*.

Теорема 3.2 ([5]). *Каждая характеристическая (вполне характеристическая, вербальная) подгруппа группы $U_{p,n}^\infty$ является однородной параллелотопической подгруппой.*

4. Достаточное условие характеристичности подгрупп в $U_{p,n}^\infty$

Лемма 4.1. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа U_r глубины r, $r \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1+d^{-1}]^-, \ldots, [1+d^{-r}]^-, 0, 0, \ldots \rangle$ является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^\infty$.*

Доказательство. Очевидно, что U_r — это подгруппа группы $U_{p,n}^\infty$, состоящая из всех таблиц, ранг которых не превышает r. Непосредственно подсчитав результат трансформации vuv^{-1}, где $u \in U_r$, $v \in U_{p,n}^\infty$, можно убедиться, что U_r — нормальная подгруппа. Далее применим метод математической индукции.

1) Покажем, что характеристической является подгруппа U_1 всех таблиц глубины не выше 1. Группа U_1 имеет характеристику $\langle [1 + d^{-1}]^-, 0, 0, \ldots \rangle$ и является нормальной абелевой подгруппой в $U_{p,n}^\infty$. Следовательно, образ подгруппы U_1 под действием произвольного автоморфизма из $\mathtt{Aut}\, U_{p,n}^\infty$ — нормальная абелева подгруппа в $U_{p,n}^\infty$.

Допустим, что подгруппа U_1 не является характеристической в $U_{p,n}^{\infty}$, то есть существует автоморфизм $\varphi \in \mathtt{Aut}\, U_{p,n}^{\infty}$ и $w \in U_1$ такие, что $\varphi(w) \notin U_1$. Причем для определенности можно считать, что $u = \varphi(w) = [\overline{a}_1(X_{2,k}), \overline{a}_2(X_{3,k}), 0, 0, \dots]$, где $a_{12}(X_{3,k}) \neq 0$ (более общие рассуждения являются полностью аналогичными, но более громоздкими).

Рассмотрим таблицу $v = \mathtt{co}_{11}(x_{12}^2) \in U_{p,n}^{\infty}$, и вычислим $(1,2)$- и $(1,1)$-координаты элементов $uvuv^{-1}$ и $vuv^{-1}u$:

$$[uvuv^{-1}]_{12} = a_{12}(X_{3,k}) + 0 + a_{12}(X_{3,k}^{uv}) - 0 = 2a_{12}(X_{3,k});$$
$$[vuv^{-1}u]_{12} = 0 + a_{12}(X_{3,k}^{v}) - 0 + a_{12}(X_{3,k}^{vuv^{-1}}) = 2a_{12}(X_{3,k});$$

$$\begin{aligned}
[uvuv^{-1}]_{11} = a_{11}(X_{2,k}) &+ (x_{12} + [u]_{12})^2 \\
&+ a_{11}(X_{2,k}^{uv}) - (x_{12} + [uvuv^{-1}]_{12})^2 \\
&= a_{11}(X_{2,k}) + (x_{12} + a_{12}(X_{3,k}))^2 \\
&+ a_{11}(X_{2,k}^{u}) - (x_{12} + 2a_{12}(X_{3,k}))^2 \\
&= a_{11}(X_{2,k}) + a_{11}(X_{2,k}^{u}) \\
&\quad - 2x_{12}a_{12}(X_{3,k}) - 3\,(a_{12}(X_{3,k}))^2\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[vuv^{-1}u]_{11} &= x_{12}^2 + a_{11}(X_{2,k}^{v}) - (x_{12} + [vuv^{-1}]_{12})^2 + a_{11}(X_{2,k}^{vuv^{-1}}) \\
&= x_{12}^2 + a_{11}(X_{2,k}) - (x_{12} + a_{12}(X_{3,k}))^2 + a_{11}(X_{2,k}^{u}) \\
&= a_{11}(X_{2,k}) + a_{11}(X_{2,k}^{u}) - 2x_{12}a_{12}(X_{3,k}) - (a_{12}(X_{3,k}))^2\,.
\end{aligned}$$

Так как $a_{12}(X_{3,k}) \neq 0$ и $1 \neq 3 \pmod p$ при $p > 2$, то $[uvuv^{-1}]_{11} \neq [vuv^{-1}u]_{11}$, то есть $uvuv^{-1} \neq vuv^{-1}u$ или $u \cdot u^v \neq u^v \cdot u$. Последнее неравенство противоречит коммутативности подгруппы $\varphi(U_1)$. Таким образом, сделанное предположение не верно, и подгруппа U_1 является характеристической.

2) Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$. Отображение $\phi_r : U_r \to U_r$, при котором таблица вида $[\overline{a}_1(X_{2,k}), \dots, \overline{a}_r(X_{r+1,k}), 0, 0, \dots]$ из U_r переходит в таблицу $[\overline{a}_1(X_{2,k}), 0, 0, \dots]$, является гомоморфизмом. Образ ϕ_r — подгруппа U_1, ядро — подгруппа, изоморфная U_{r-1}. Тогда по основной теореме о гомоморфизме $U_r/U_{r-1} \simeq U_1$. Аналогично можно показать, что $U_{p,n}^{\infty}/U_{r-1} \simeq U_{p,n}^{\infty}$.

3) Предположим, что U_t является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^{\infty}$ при $t = 1, 2, \dots, r-1$, а U_r — не характеристическая, то есть существуют $\psi \in \mathtt{Aut}\, U_{p,n}^{\infty}$ и $w \in U_r$ такие, что $\psi(w) \notin U_r$. Автоморфизм ψ (в силу характеристичности подгруппы U_{r-1}) индуцирует автоморфизм ψ' фактор-группы $U_{p,n}^{\infty}/U_{r-1}$.

Пусть $w' \in U_r/U_{r-1}$ — образ элемента $w \in U_r$ под действием естественного гомоморфизма $U^{\infty}_{p,n} \to U^{\infty}_{p,n}/U_{r-1}$. Тогда, с одной стороны, по предположению $\psi(w) \notin U_r$, значит, $\psi'(w') \notin U_r/U_{r-1}$. А с другой, так как $U_r/U_{r-1} \simeq U_1$, то U_r/U_{r-1} характеристическая подгруппа группы $U^{\infty}_{p,n}/U_{r-1}$ и, таким образом, $\psi'(w') \in U_r/U_{r-1}$. Полученное противоречие указывает на ложность предположения.

Следовательно, U_r — характеристическая подгруппа группы $U^{\infty}_{p,n}$.

□

Взаимным коммутантом подгрупп X и Y группы G называется подгруппа $[X,Y]$, порожденная коммутаторами $(x,y) = xyx^{-1}y^{-1}$, $x \in X$, $y \in Y$. Очевидно, взаимный коммутант нормальных подгрупп — нормальная, а характеристических — характеристическая подгруппа.

Лемма 4.2. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа $U^{r_2}_{r_1}$ глубины r_1, $r_1 \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1+d^{-1}-d^{-r_2}]^-, \dots, [1+d^{-r_1}-d^{-r_2}]^-, 0, 0, \dots\rangle$, $r_2 \in \mathbb{N}$, $r_2 > r_1$, является характеристической подгруппой группы $U^{\infty}_{p,n}$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1, подгруппы U_{r_1} и U_{r_2}, а, следовательно, и взаимный коммутант $U' = [U_{r_1}; U_{r_2}]$ — характеристические подгруппы. Докажем, что U' — подгруппа с нужной характеристикой.

Пусть $u = [a_{ij}(X_{i+1,k})]^{\infty}_{j=1} \in U_{r_2}, v = [b_{ij}(X_{i+1,k})]^{\infty}_{j=1} \in U_{r_1}$. Непосредственно проверяется, что при внутренних автоморфизмах группы $U^{\infty}_{p,n}$ глубина таблицы остается неизменной (более того, неизменным остается весь последний ненулевой столбец этой таблицы). Отсюда, в частности, следует, что таблицы v^u и $(u^{-1})^v$ имеют глубины r_1 и r_2, соответственно.

Зафиксируем индекс $i \in \{1,\dots,n\}$. Из леммы 3.1 (пункты 1.3 и 4.1) и леммы 3.2 (пункт 4) следует, что если $j = 1,\dots,r_1$, то

$$\begin{aligned}&|(u,v)|_{ij}\\ &\le \max\left\{h[a_{ij}(X_{j+1,k}) - a_{ij}(X^{uvu^{-1}}_{j+1,k})], h[b_{ij}(X_{j+1,k}) - b_{ij}(X^{vu^{-1}v^{-1}}_{j+1,k})]\right\}\\ &\qquad\qquad < \max\{1+d^{-j}-d^{-r_1}, 1+d^{-j}-d^{-r_2}\} = 1+d^{-j}-d^{-r_2};\end{aligned}$$

а если $j > r_1$, то

$$\begin{aligned}&[(u,v)]_{ij} = 0 - 0 + b_{ij}(X^{u}_{j+1,k}) - b_{ij}(X^{uvu^{-1}v^{-1}}_{j+1,k})\\ &\qquad\qquad = b_{ij}(X_{j+1,k}) - b_{ij}(X_{j+1,k}) = 0.\end{aligned}$$

Остается показать, что $1 + d^{-j} - d^{-r_2} = \sup_{u \in U'} |u|_{ij}$ при всех $j \in \{1, \dots, r_1\}$. Пусть

$$u = \mathtt{co}_{ir_2}(1) \in U_{r_2},$$
$$v = \mathtt{co}_{ij}(x_{1,j+1}^{p-1} \cdots x_{n,j+1}^{p-1} \cdots x_{1m}^{p-1} \cdots x_{nm}^{p-1}) \in U_{r_1},$$

где $m > r_2$. Тогда

$$[(u,v)]_{ij} = x_{1,j+1}^{p-1} \cdots x_{i-1,r_2}^{p-1}(x_{ir_2}+1)^{p-1} x_{i+1,r_2}^{p-1} \cdots x_{nm}^{p-1} - [v]_{ij}.$$

Старший член $[(u,v)]_{ij}$ — одночлен $f = C_{p-1}^1 x_{1,j+1}^{p-1} \cdots x_{i-1,r_2}^{p-1} x_{ir_2}^{p-2} \times x_{i+1,r_2}^{p-1} \cdots x_{nm}^{p-1}$, где

$$\begin{aligned}|(u,v)|_{ij} = h[f] = 1 + (d-1)d^{-(j+1)} + \dots + (d-1)d^{-m} \\ + \left[(d-2)d^{-r_2} - (d-1)d^{-r_2}\right] = 1 + d^{-j} - d^{-r_2} - d^m.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{m \to \infty} |(u,v)|_{ij} = 1 + d^{-j} - d^{-r_2},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.3. *Если $u \in U_{p,n}^{\infty}$ — таблица глубины r и порядка p, то $|u|_{ij} < 1 + d^{-j} - d^{-r}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r-1$.*

Доказательство. Пусть $u = [a_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty}$ имеет порядок p и глубину r. Последнее означает, что хотя бы одна из координат r-го столбца данной таблицы отлична от 0. Для удобства записи будем считать, что $[u]_{nr} \neq 0$.

Введем обозначение $\delta(X_{j+1,r}) = x_{1,j+1}^{p-1} \cdots x_{n-1,r}^{p-1}$. Очевидно, (i,j)-координату таблицы u (тут и далее $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, r-1$) всегда можно представить в виде

$$[u]_{ij} = a_{ij}(X_{j+1,k}) = \sum_{t=0}^{p-1} \delta(X_{j+1,r}) x_{nr}^t f_t(X_{r+1,k}) + f(X_{j+1,k}),$$

где многочлен $f(X_{j+1,k})$ не содержит одночленов кратных $\delta(X_{j+1,r})$, и, следовательно,

$$h\,[\,f\,(X_{j+1,k})\,] < 1 + d^{-i} - d^{-r}.$$

Допустим, что $f_{p-1}(X_{r+1,k}) \neq 0$, тогда

$$
\begin{aligned}
[u^p]_{ij} &= \sum_{m=0}^{p-1} a_{ij}(X_{j+1,k}^{u^m}) \\
&= \sum_{t=0}^{p-2}\left[\sum_{m=0}^{p-1}\delta(X_{j+1,r}^{u^m})(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^t f_t(X_{r+1,k})\right] \\
&\quad + \sum_{m=0}^{p-1}\delta(X_{j+1,r}^{u^m})(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^{p-1} f_{p-1}(X_{r+1,k}) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{p-1} f(X_{j+1,k}^{u^m}). \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим каждое из трех слагаемых из правой части последнего равенства. Во всех внутренних суммах в первом слагаемом одночлены, содержащие множитель $\delta(X_{j+1,r})$, можно сгруппировать в виде $\delta(X_{j+1,r})\sum_{m=0}^{p-1}(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^t f_t(X_{r+1,k})$ (следует заметить, что оставшаяся часть суммы имеет высоту, меньшую высоты этого многочлена). Однако $\sum_{m=0}^{p-1}(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^t = 0 \pmod p$, так как $\sum_{m=0}^{p-1} m^t = 0 \pmod p$ при всех $t = 0,1,\dots,p-2$. Следовательно, первое слагаемое не содержит одночленов кратных $\delta(X_{j+1,r})$. Очевидно, что и третье слагаемое из равенства (4.1) не содержит таких одночленов. Напротив, во втором слагаемом из (4.1) все одночлены, содержащие $\delta(X_{j+1,r})$, группируются в сумму $\delta(X_{j+1,r})\sum_{m=0}^{p-1}(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^{p-1} f_t(X_{r+1,k})$, где $\sum_{m=0}^{p-1}(x_{nr}+m\cdot[u]_{nr})^{p-1} \neq 0 \pmod p$, так как $\sum_{m=0}^{p-1} m^{p-1} \neq 0 \pmod p$. Таким образом, $[u^p]_{ij} \neq 0$, поскольку мы предположили, что $f_{p-1}(X_{r+1,k}) \neq 0$.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что (i,j)-координата таблицы u не может содержать одночленов с переменными $x_{1,j+1},\dots,x_{nr}$, имеющими степень $p-1$ одновременно. Тогда, как легко проверить непосредственно, $|u|_{ij} < 1 + d^{-j} - d^{-r}$. □

Лемма 4.4. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа L_r^- глубины r, $r \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1+d^{-1}-d^{-r}]^-, \dots, [1+d^{-(r-1)}-d^{-r}]^-, 1^+, 0, 0, \dots \rangle$ является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^\infty$.*

Доказательство. Учитывая лемму 4.2 и лемму 3.1 (пункт 2), достаточно показать, что образ $u = \mathtt{co}_{ir}(1)$, $i = 1,\dots,n$, при всех автоморфизмах из $\mathtt{Aut}\, U_{p,n}^\infty$ остается в L_r^-.

Так как $u \in U_r$, а подгруппа U_r, согласно лемме 4.1, характеристическая, в частности, инвариантная относительно всех внутренних автоморфизмов группы $U_{p,n}^\infty$, то

$$(u,v) = uvu^{-1}v^{-1} = u\left(u^{-1}\right)^v \in U_r$$

для произвольного $v = [b_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty} \in U_{p,n}^{\infty}$. Более того,

$$[(u,v)]_{ir} = 1 - 1 + b_{ir}(X_{r+1,k}^{u})] - b_{ir}(X_{r+1,k}^{uvu^{-1}v^{-1}})$$
$$= b_{ir}(X_{r+1,k})] - b_{ir}(X_{r+1,k}) = 0.$$

Пусть $\varphi \in \mathtt{Aut}\, U_{p,n}^{\infty}$. Тогда, во-первых, $w = \varphi(u) \in U_r$, то есть $w = [\overline{a}_1(X_{2,k}), \ldots, \overline{a}_r(X_{r+1,k}), 0, \ldots]$, и, во-вторых, $\varphi(u,v) \in U_{r-1}$ для произвольного $v \in U_{p,n}^{\infty}$, то есть $\varphi(u,v)$ имеет глубину, не превышающую $r-1$.

Обозначим $z = \varphi(v)$, тогда $\varphi(u,v) = wzw^{-1}z^{-1}$. Допустим, что $h[a_{ir}(X_{r+1,k})] > 1$, то есть многочлен $a_{ir}(X_{r+1,k})$ не является константой для некоторого конкретного индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$. Значит, если $[z]_{ir} = c_{ir}(X_{r+1,k})$ — (i,r)-координата таблицы z, то

$$[\varphi(u,v)]_{ir} = a_{ir}(X_{r+1,k}) - a_r(X_{r+1,k}^{z}).$$

Согласно лемме 3.2 (пункт 3), в группе $U_{p,n}^{\infty}$ найдется таблица v такая, что $|\varphi(u,v)|_{ir} > 1 > 0$, то есть $\varphi(u,v)$ имеет глубину r, что противоречит предыдущим оценкам.

Следовательно, сделанное выше предположение не верно, и $h[a_{ir}(X_{r+1,k})] \le 1$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Следует заметить, что найдется такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $h[a_{ir}(X_{r+1,k})] = 1$ (другими словами $[\varphi(u)]_{ir} = \mathrm{const} \ne 0$), поскольку в противном случае существование автоморфизма φ^{-1} противоречило бы лемме 4.1.

И, наконец, поскольку $\varphi(u)$ — таблица глубины r и порядка p, то, согласно лемме 4.3, получаем $|\varphi(u)|_{ij} < 1 + d^{-j} - d^{-r}$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, r-1\}$.

Таким образом, $\varphi(u) \in L_r^{-}$ и L_r^{-} — характеристическая подгруппа группы $U_{p,n}^{\infty}$. □

Следствие 4.1. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа H_r глубины r, $r \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1+d^{-1}-d^{-r}]^{-}, \ldots, [1+d^{-(r-1)}-d^{-r}]^{-}, [1+d^{-r}]^{-}, 0, 0, \ldots \rangle$ является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^{\infty}$.*

Следствие 4.2. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа F_r глубины r, $r \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1 + d^{-1}]^{-}, \ldots, [1+d^{-(r-1)}]^{-}, 1^{+}, 0, 0, \ldots \rangle$ является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^{\infty}$.*

Лемма 4.5. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа L_r^{+} глубины r, $r \in \mathbb{N}$, с характеристикой $\langle [1 + d^{-1} - d^{-r}]^{+}, \ldots, [1 + d^{-(r-1)} - d^{-r}]^{+}, 1^{+}, 0, 0, \ldots \rangle$ является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^{\infty}$.*

Доказательство. Учитывая лемму 4.4, достаточно доказать, что при всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r-1$ высота (i, j)-координаты образа таблицы $u = \mathtt{co}_{ij}(x_{1,j+1}^{p-1} \dots x_{nr}^{p-1})$ под действием всех автоморфизмов группы $U_{p,n}^{\infty}$ не превышает числа $1 + d^{-j} + d^{-r}$. Предположим, что это не так, и существует автоморфизм $\varphi \in \mathtt{Aut}\, U_{p,n}^{\infty}$ такой, что $|\varphi(u)|_{ij} = 1 + d^{-j} - d^{-r} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Пусть $v \in U_{p,n}^{\infty}$. Тогда, согласно лемме 3.1 (пункт 1.3) и лемме 3.2 (пункт 2), $|(u,v)|_{ij} < |u|_{ij} = 1 + d^{-j} - d^{-r}$, и, следовательно, $|\varphi(u,v)|_{ij} < 1 + d^{-j} - d^{-r}$ (поскольку таблица (u, v) имеет глубину r, а группы U_{j-1} и U_j^r — характеристические).

С другой стороны, $\varphi(u,v) = \varphi(u)\varphi(v)\varphi(u)^{-1}\varphi(v)^{-1}$, и, согласно лемме 3.2 (пункт 3), в группе $U_{p,n}^{\infty}$ найдется таблица v такая, что $|\varphi(u,v)|_{ij} > 1 + d^{-j} - d^{-r}$.

Таким образом, сделанное выше предположение не верно, и группа L_r^+ — характеристическая подгруппа группы $U_{p,n}^{\infty}$. $\square$

Обозначим символом $\ell(x)$ наименьшее натуральное r (если оно существует) такое, что вещественное число $x \in [1; 2)$ можно представить в виде конечной суммы $x = 1 + t_1 d^{-1} + \dots + t_r d^{-r}$, где $0 \le t_1, \dots, t_r \le d-1$, $t_r \ne 0$. Другими словами, в записи числа $x = [1, t_1 \dots t_r]_d$ в системе исчисления по основанию d имеется лишь r знаков после запятой (последний из которых не равен 0). Если такое r не существует, то $\ell(x) = \infty$.

Лемма 4.6. *Пусть характеристическая подгруппа R имеет глубину s, $s \in \mathbb{N}$, и характеристику $\langle [1 + d^{-1}]^-, \dots, [1 + d^{-(s-1)}]^-, \chi_s^-, 0, 0, \dots \rangle$, где $\chi_s > 1 + d^{-r}$ и $\ell(\chi_s) \le r$. Тогда подгруппа, имеющая характеристику $\langle [1 + d^{-1}]^-, \dots, [1 + d^{-(s-1)}]^-, [\chi_s - d^{-r}]^-, 0, 0, \dots \rangle$, также является характеристической подгруппой группы $U_{p,n}^{\infty}$.*

Доказательство. Пусть $u = [a_{ij}(X_{j+1,k})]_{j=1}^{\infty} \in R$, $v \in L_r^+$. Тогда $(u, v) = u(u^{-1})^v \in U_s$, и, проведя вычисления по формулам из леммы 3.1 (пункт 1.3), получим

$$|(u,v)|_{is} = h[a_{is}(X_{s+1,k}) - a_{is}(X_{s+1,k}^{uvu^{-1}})].$$

Обозначим символом $M = x_{1,s+1}^{t_{1,s+1}} \dots x_{nk}^{t_{nk}}$ один из входящих в многочлен $a_{is}(X_{s+1,k})$ одночленов. Положим $w = uvu^{-1}$ и рассмотрим разность $M_1 = M - M^w$.

Так как подгруппа L_r^+ характеристическая, то $w \in L_r^+$. Пусть $[w]_{ij} = b_{ij}(X_{j+1,k})$ (далее будем опускать символы переменных $X_{j+1,k}$

в записи многочлена $[w]_{ij}$). Тогда M_1 можно подать как сумму слагаемых вида

$$M_J = x_{1,s+1}^{t_{1,s+1}-j_{1,s+1}} \cdots x_{nr}^{t_{nr}-j_{nr}} b_{1,s+1}^{j_{1,s+1}} \cdots b_{nr}^{j_{nr}} x_{1,r+1}^{t_{1,r+1}} \cdots x_{nk}^{t_{nk}},$$

где $j_{yz} \in \{0, \ldots, t_{yz}\}$ при $y = 1, \ldots, n$, $z = s+1, \ldots, r$, причем хотя бы один из индексов j_{yz} не равен 0. Учитывая последнее замечание и лемму 3.1 (пункт 4.2), непосредственно подсчитав $h[M_J]$, можно показать, что $h[M_J] \leq h[M] - d^{-r} < \chi_s - d^{-r}$.

Следовательно, $|(u,v)|_{is} < \chi_s - d^{-r}$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Откуда следует, что s-й член характеристики взаимного коммутанта $[R, L_r^+]$ не превышает $[\chi_s - d^{-r}]^-$.

Так как $\ell(\chi_s) \leq r$, то $\chi_s = 1 + t_s d^{-s} + \cdots + t_m d^{-m}$, где $m \leq r$ и $t_m \neq 0$. Возможны два случая.

1) $m = r$ и $t_r = 1$. Тогда рассмотрим последовательность одночленов $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такую, что

$$f_j(X_{s+1,j}) = x_{1,s+1}^{t_{1,s+1}} \cdots x_{n,r-1}^{t_{n,r-1}} x_{1,r+1}^{p-1} \cdots x_{nj}^{p-1}$$

(одночлен f_j не содержит переменных, второй индекс которых равен r), где $t_s = \sum_{i=1}^n t_{is}, \ldots, t_{r-1} = \sum_{i=1}^n t_{i,r-1}$. Тогда

$$h[f_j] = 1 + t_s d^{-s} + \cdots + t_{r-1} d^{-(r-1)} + d^{-r} - d^{-j} = \chi_s - d^{-j}.$$

Для упрощения записи будем считать, что $t_{n,r-1} \neq 0$.

Пусть $v = \mathsf{co}_{n,r-1}(x_{1r}^{p-1} \cdots x_{nr}^{p-1}) \in L_r^+, u_j = \mathsf{co}_{ns}(f_j)$. Тогда, воспользовавшись леммой 3.1 (пункт 1.3) и правилом подсчета высоты многочлена, можно установить, что $|(v, u_j)|_{ns} = h[f_j(X_{s+1,j}^v) - f_j(X_{s+1,j})] = h[f_j] - d^{-r}$.

Таким образом, если $j \to \infty$, то $\lim |(v, u_j)|_{ns} = \lim (h[f_j] - d^{-r}) = \chi_s - d^{-r}$, то есть s-й член характеристики подгруппы $[R, L_r^+]$ равен $\chi_s - d^{-r}$. Тогда $R' = \langle U_{s-1}, [R, L_r^+] \rangle$ — подгруппа, порожденная U_{s-1} и взаимным коммутантом $[R, L_r^+]$, является характеристической и имеет нужную нам характеристику.

2) $m < r$ или $t_r \geq 2$. В этом случае рассуждения полностью аналогичны. Однако отличие заключается в том, что следует рассмотреть последовательность одночленов вида

$$f_j(X_{s+1,j}) = x_{1,s+1}^{t_{1,s+1}} \cdots x_{n-1,r}^{t_{n-1,r}} x_{nr}^{t_{nr}-1} x_{1,r+1}^{p-1} \cdots x_{nj}^{p-1},$$

где $t_s = \sum_{i=1}^n t_{is}, \ldots, t_r = \sum_{i=1}^n t_{ir}$, и положить $v = \mathsf{co}_{nr}(1)$. □

Лемма 4.7. *Пусть* $\varepsilon = t_{r+1}d^{-(r+1)} + \dots + t_k d^{-k}$, *где* $0 \leq t_{r+1}, \dots, t_k \leq d-1$. *Тогда нормальная однородная параллелотопическая подгруппа* R_r^{ε}, $r \in \mathbb{N}$, *имеющая характеристику* $\langle [1+d^{-1}]^-, \dots, [1+d^{-(r-1)}]^-, [1+d^{-r}-\varepsilon]^-, 0, 0, \dots \rangle$, *является характеристической подгруппой группы* $U_{p,n}^{\infty}$.

Доказательство. Согласно с леммами 4.1 и 4.5, все члены последовательности $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, где $R_0 = U_r$, а $R_j = [R_{j-1}; L_k^+]$ $(j = 1, 2, \dots)$, являются характеристическими подгруппами группы $U_{p,n}^{\infty}$. Положим $n = t_{r+1}d^{k-r-1} + t_{r+2}d^{k-r-2} + \dots + t_k$. При $j = 1, \dots, n$ для подгрупп R_{j-1} и L_k^+ выполняются условия леммы 4.6. Откуда следует, что r-я координата характеристики подгруппы R_n равняется $1 + d^{-r} - \varepsilon$. Наконец, $R_r^{\varepsilon} = \langle R_n, U_{r-1} \rangle$ — подгруппа, порожденная R_n и U_{r-1}, является характеристической и имеет нужную нам характеристику. $\square$

Лемма 4.8. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа* S_r^{χ} *глубины* r, $r \in \mathbb{N}$, *с характеристикой* $\langle [1+d^{-1}]^-, \dots, [1+d^{-(r-1)}]^-, \chi^-, 0, 0, \dots \rangle$, *где* $\chi \in (1; 1+d^{-r}]$, *является характеристической подгруппой группы* $U_{p,n}^{\infty}$.

Доказательство. Если $\ell(\chi) < \infty$, то утверждение сводится к предыдущему. Таким образом, допустим, что число χ может быть представлено только в виде бесконечной дроби в системе исчисления по основанию d: $\varepsilon = [0, \dots 0, k_{r+1}k_{r+2}\dots]_d$. Тогда можно построить последовательность чисел $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такую, что $\chi_i < \chi_{i+1}$, $\ell(\chi_i) < \infty$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\lim \chi_j = \chi$ при $j \to \infty$. В этом случае $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_r^{\chi_j}$ является характеристической подгруппой (как объединение возрастающей последовательности характеристических подгрупп). По теореме 3.2 подгруппа R — однородная параллелотопическая.

Для произвольного $u \in R$ существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $u \in R_r^{\chi_{j_0}}$. Так как $\chi_{j_0} < \chi$, то $u \in S_r^{\chi}$. Наоборот, если $v \in S_r^{\chi}$, то, поскольку χ — предельная точка последовательности $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, существует j_0 такое, что $v \in R_r^{\chi_{j_0}}$, то есть $v \in R$. Следовательно, $R = S_r^{\chi}$. $\square$

Так как подгруппы H_r и S_r^{χ} являются характеристическими (согласно следствию 4.1 и лемме 4.8, соответственно), то и их пересечение — подгруппа характеристическая. Отсюда непосредственно следует такое утверждение.

Следствие 4.3. *Нормальная однородная параллелотопическая подгруппа* T_r^{χ} *глубины* r, $r \in \mathbb{N}$, *с характеристикой* $\langle [1+d^{-1}-d^{-r}]^-, \dots, [1+d^{-(r-1)}-d^{-r}]^-, \chi^-, 0, 0, \dots \rangle$, *где* $\chi \in (1; 1+d^{-r}]$, *является характеристической подгруппой группы* $U_{p,n}^{\infty}$.

Теорема 4.1. *Каждая нормальная однородная параллелотопическая подгруппа группы $U_{p,n}^{\infty}$ является характеристической подгруппой.*

Доказательство. Все нормальные параллелотопические подгруппы группы $U_{p,n}^{\infty}$ имеют конечную глубину. Пусть $\langle[\chi_1]^-,\dots,[\chi_r]^-,0,\dots\rangle$ — характеристика такой подгруппы R.

Из теоремы 3.1 следует, что $\chi_j \geq 1+d^{-j}-d^{-r}$, $j=1,\dots,r$. Построим характеристическую подгруппу $R'=\langle T_1^{\chi_1},\dots,T_r^{\chi_r}\rangle$ — подгруппа, порожденная $T_j^{\chi_j}$, $j=1,\dots,r$.

Условимся обозначать i-й член характеристики однородной параллелотопической подгруппы R символом $|R|_i$. Тогда $|R'|_i = \max_j\{|T_j^{\chi_j}|_i\}=\chi_i$. Откуда $R=R'$.

В случае, когда подгруппа R имеет характеристику вида $\langle\dots,[\chi_j]^+,\dots\rangle$, где j-й член имеет маркер "+", то рассмотрим последовательность характеристических подгрупп $\{R_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ с характеристиками $\langle\dots,[\chi_j+1/n]^-,\dots\rangle$, выбрав n_0 достаточно большим, чтобы $\chi_j+1/n_0<1+d^{-j}$ (такое n_0 существует, поскольку $\chi_j<1+d^{-j}$).

Положим $R'=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}R_n$. Подгруппа R' — характеристическая, как пересечение характеристических подгрупп группы $U_{p,n}^{\infty}$. Кроме того, произвольная таблица $u\in R$ принадлежит также каждой из подгрупп R_n, $n\geq n_0$, то есть $u\in R'$. С другой стороны, если $v\in R'$, то высота j-го члена ее характеристики не превышает χ_j, то есть $v\in R$. Таким образом, $R=R'$. □

Объединяя теоремы 3.2 и 4.1, получаем критерий характеристичности подгрупп группы $U_{p,n}^{\infty}$ (теорема 1.1).

Литература

[1] L. Kaloujnine, *La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis* // Ann. Sci. l'Ecole Norm. Super., **65** (1948), 239–276.

[2] N. V. Kroshko, V.I. Sushchansky, *Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings* // Arch. Math. (Basel)., **71** (1998), 173–182.

[3] И. Д. Иванюта, *Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы* // Укр. мат. журн. **15** (1963), N 3, 240–249.

[4] Ю. Ю. Лещенко, *Характеристичні підгрупи не резидуально скінченної силовської p-підгрупи однорідної симетричної групи суперстепеня p^{∞}* // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. (2005),N 3, 4–50.

[5] Ю. Ю. Лещенко, *Бесконечное сплетение элементарных абелевых групп* // Математичні студії, **31** (2009), N 2 (to appear).

[6] Ю. Ю. Лещенко, В. И. Сущанский, *Силовские p-подгруппы однородных симметрических групп суперстепени* p^∞ // Доповіді НАН України, (2005), N 3, 12–16.

[7] В. И. Сущанский, *Сплетение элементарных абелевых групп* // Математические заметки, **11** (1972), N 1, 61–72.

Сведения об авторах

Юрий Ю. Лещенко

Черкасский национальный университет
имени Богдана Хмельницкого
бул. Шевченка, 81,
Черкассы, 18031
Украина
E-Mail: `ylesch@ua.fm`