Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 16 – 38

Оценки максимума решения задачи Неймана для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях, сужающихся на бесконечности. Случай быстрой диффузии

Ольга М. Болдовская, Анатолий Ф. Тедеев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача Неймана для уравнения

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du),$$

где $0 < m+\lambda \leq 2$. Устанавливаются двусторонние оценки L_∞ нормы решения задачи, зависящие от геометрии неограниченной области (с некомпактной границей), в которой рассматривается задача.

2000 MSC. 35K55, 35K57, 35K60, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Начально-краевая задача Неймана, квазилинейное параболическое уравнение, некомпактная граница.

1. Введение

Рассматривается следующая вторая смешанная задача

$$u_t - \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) = 0, \qquad \text{в } Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \qquad \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, — неограниченная область, $\operatorname{mes}_N \Omega = |\Omega|_N = \infty$,

Статья поступила в редакцию 4.11.2008

$\partial\Omega$ — некомпактная достаточно гладкая граница Ω, $\overrightarrow{n}$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega \times (0,T)$, $T>0$. Предполагаем, что $m+\lambda-2<0$, $\lambda>0$, $m+\lambda-1>\max\{0, 1-\frac{\lambda+1}{N}\}$; $u_0(x)\geq 0$ п.в. $x\in\Omega$ и $u_0\in L_{1,loc}(\Omega)$. Известно [1], что при $m+\lambda-2<0$, (1.1) относится к уравнениям, описывающим процесс с быстрой диффузией.

Опишем класс областей, в котором рассматривается задача (1.1)–(1.3). Определим функцию

$$l(v,\rho)=\inf\{|\partial Q\cap\Omega_\rho|_{N-1} : Q\subset\Omega_\rho, |Q|_N=v, \partial Q \text{ — липшицева}\},$$

для всех $\rho>0$ и $0<v\leq|\Omega_\rho|_N/2$; где $\Omega_\rho=\{x\in\Omega : |x|<\rho\}$, предполагаем что Ω_ρ непусто.

Пусть $V(\rho)=|\Omega_\rho\,|_N$ такое, что для всех $\delta>0$ выполнено неравенство

$$\nu_0(\delta)V(\rho)\leq V(\delta\rho)\leq\nu_1(\delta)V(\rho), \qquad \text{для всех } \rho\geq\max\left(1,\frac{1}{\delta}\right), \tag{1.4}$$

где ν_0,ν_1 — две заданные неубывающие положительные функции, такие что $\nu_1(\delta)<1$ для $\delta<1$. Также требуем, чтобы

$$l(v,\rho)\geq c_0\min\left(v^{\frac{N-1}{N}},\frac{V(\rho)}{\rho}\right):=g(v,\rho), \tag{1.5}$$

для всех $\rho\geq 1$, $0<v\leq V(\rho)/2$, и подходящей константой $c_0>0$. И

$$\rho\mapsto\frac{\rho^{1-\beta}}{V(\rho)} \quad \text{не убывает для } \rho\geq 1, \tag{1.6}$$

$\beta>\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что неограниченная область $\Omega\subset R^N$, $N\geq 2$, принадлежит классу $\mathbf{N_0}(g)$, если её граница $\partial\Omega$ локально непрерывна по Липшицу и выполняются* (1.4)–(1.6).

Отметим, что (1.5) — условие типа регулярности области, первая компонента, $v^{\frac{N-1}{N}}$, при $v<1$ появляется благодаря классическому изопериметрическому неравенству в ограниченных областях с липшицевой границей, вторая компонента, $\frac{V(\rho)}{\rho}$, имеет смысл площади $\Omega\cap\partial\Omega_\rho$ при достаточно больших ρ. Из (1.4) следует, что $|\Omega|_N=\infty$. Класс $\mathbf{N_0}(g)$ описывает области, "сужающиеся на бесконечности", то есть, [2], такие что $\underline{\lim}_{\rho\to\infty}\frac{V(\rho)}{\rho}=0$; для таких областей $\underline{\lim}_{v\to\infty} l(v,\rho)=0$. Классы областей типа $\mathbf{N_0}(g)$ были введены в работах [3, 4] (см. также близкие к ним в работах [2, 5, 6]).

Типичным представителем класса $\mathbf{N_0}(g)$ является область [4]:

$$\Omega^\epsilon = \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : |x'| < x_N^{-\epsilon},\ x_N > d\right\} \subset \mathbb{R}^N, \quad d > 0,$$

для $0 < \epsilon < \frac{1}{N-1}$. Здесь $V(\rho) = c\rho^{1-\epsilon(N-1)}$, $\rho = x_N > 2d$. Очевидно, что $|\Omega^\epsilon|_N = \infty$ и для всех $v > 0$ $l(v, \infty) = 0$. Различные примеры можно найти в работах [3, 4].

Цель настоящей работы — исследовать поведение решения задачи (1.1)–(1.3) в Q_T в зависимости от геометрии области Ω, а именно получить точные оценки сверху и снизу максимума решения $u(x,t)$.

Одними из первых работ, где изучена вторая смешанная задача для линейных дивергентных равномерно параболических уравнений с измеримыми коэффициентами, были [7, 8]. В этих работах для областей, "не сужающихся на бесконечности", удовлетворяющих глобальному условию изопериметрического типа, получены двусторонние оценки

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega} \sim \|u_0\|_{L_1,\Omega} V(\sqrt{t})^{-1} \tag{1.7}$$

для всех $t > 1$. Для получения этих оценок требовалась только конечность массы начальной функции. В работах [2, 5], где рассматривались области, "сужающиеся на бесконечности", точная оценка $\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega}$ дается также (1.7), но помимо конечности $\|u_0\|_{L_1,\Omega}$, требуется дополнительно предположить конечность момента начальной функции, то есть $u_0(x)|x| \in L_1(\Omega)$. Касаясь исследования начально-краевых задач в областях с некомпактными границами, отметим также работы [9] (случай третьей краевой задачи) и [10] (случай задачи Дирихле). В работе [11] получены оценки типа (1.7) для решения задачи (1.1)–(1.3) при $m = 1$ в случае "не сужающихся" областей. Оказалось, что геометрической характеристикой, дающей точную оценку $\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega}$, также является $V(\rho)$. При этом имеет место оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega} \sim \|u_0\|_{L_1,\Omega} V(R(t))^{-1}, \tag{1.8}$$

где $R(t)$ — обратная к $s^{\lambda+1}V(s)^{\lambda-1}$ функция. В работах [3, 4, 12] для решения задачи (1.1)–(1.3) в случае медленной диффузии, то есть при $m + \lambda - 2 > 0$, в узких и широких областях были получены аналогичные (1.8) оценки. По духу данная работа близка к работам [4] и [12].

Определение 1.2. *Будем говорить, что $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.3), если $u(x,t) \geq 0$ такое, что $u(x,t) \in C(0,T; L_{2,loc}(\overline{\Omega})) \cap L_{\infty,loc}(\overline{\Omega} \times (0,T))$, $u^{m-1}|Du|^{\lambda+1} \in L_{1,loc}(\overline{\Omega} \times (0,T))$; и, что*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(-u\xi_t + u^{m-1}\ |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\xi\right) dx\, dt = -\int\limits_\Omega\ u_0(x)\ \xi(x,0)\, dx,$$

$\forall\, \xi \in C_1^0(\mathbb{R}^N \times [0,T])$.

Всюду в работе пишем для $t \geq 0$

$$\mu(t) = \int\limits_{\overline{\Omega}}\ u(x,t)\ \frac{|x|}{V(|x|)}\, dx.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega \in \mathbf{N_0}(g)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \in L_1(\Omega), \mu(0) < \infty$. *Тогда задача* (1.1)–(1.3) *имеет глобальное решение, определенное для всех* $t > 0$ *и удовлетворяющее оценкам*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leq \gamma \max\Big(t^{-\frac{N}{k}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \mu(0)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}},$$
$$t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} \Big[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\Big]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\Big), \quad (1.9)$$

для всех $t > 0$, *где* $k = N(m+\lambda-2)+\lambda+1$. *Здесь* $P(\tau) \geq 1$ ($\tau = t\|u_0\|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2}$) *определяется как наибольшее решение* ρ *такое, что*

$$\rho\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{-\frac{m+\lambda-2}{2\lambda+m-1}} = \max\big(\tau^{\frac{1}{2\lambda+m-1}}, 1\big). \quad (1.10)$$

Также для достаточно больших t *имеет место двусторонняя оценка*

$$\gamma_1 \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))} \leq \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leq \gamma_2 \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))}. \quad (1.11)$$

Основным инструментом доказательства являются комбинации локальных подходов работ [3, 4] и работы [13].

Всюду в дальнейшем через γ, γ_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

Замечание 1.1. Отметим, что для достаточно больших t третья компонента в (1.9) является наибольшей. Следовательно, из (1.10) получаем

$$t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} \Big[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\Big]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} = \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))}.$$

Кроме того, очевидно, что $P(\tau)$ — обратная к $V(R)^{m+\lambda-2}R^{\lambda+1}$ функция. Первая компонента в функции максимума оценки (1.9) будет наибольшей при $t \to 0$, это ожидаемый результат, так как такая оценка имеет место для задачи Коши и имеет локальный характер.

Замечание 1.2. Результаты, изложенные в работе, остаются справедливыми и для случая $m+\lambda-2=0$, а следовательно и в линейном случае ($m=1, \lambda=1$), при этом доказательство проводится аналогично. (В последнем случае наши результаты следуют из работ [2, 5].)

В разделе 2 будут сформулированы результаты, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем, раздел 3 содержит локальную оценку максимума решения, раздел 4 — локальную оценку L_1 нормы решения, в разделе 5 будет получена оценка момента и, наконец, в последнем разделе будет доказана теорема 1.1.

2. Вспомогательные утверждения

Положим

$$\omega(z,\rho) = \frac{z^{\frac{N-1}{N}}}{g(z,\rho)} = \gamma \max\left(1, z^{\frac{N-1}{N}}\frac{\rho}{V(\rho)}\right),\ z \geq 0, \rho \geq 1.$$

В процессе доказательства нам потребуется следующий результат о вложении.

Лемма 2.1 ([4]). *Пусть* $\Omega \in \mathbf{N_0}(g)$, $\rho \geq 1$ *и* $v \in L_\infty((0,T); L_r(\Omega_\rho))$, $Dv \in (L_p(\Omega_\rho \times (0,T)))^N$, *с* $p > 1$, $r \geq 1$, *и предположим что для* $\theta \in (0,1)$

$$\sup_{(0,T)} |\operatorname{supp} v(\cdot,t)|_N \leq \theta V(\rho).$$

Тогда

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} |v|^{p+\frac{pr}{N}}\,dx\,dt \leq \gamma \sup_{0<t<T}\left[\omega(|\operatorname{supp} v(\cdot,t)|_N,\rho)^p \left(\int_{\Omega_\rho} |v(x,t)|^r\,dx\right)^{\frac{p}{N}}\right] \times \int_0^T\int_{\Omega_\rho} |Dv|^p\,dx\,dt,$$

где $\gamma = \gamma(p,r,N)$.

Не уменьшая общности, положим

$$\frac{\rho}{V(\rho)} = 1, \qquad 0 \le \rho \le 1.$$

Определим функцию

$$F(x) = \frac{1}{|x|} \int\limits_0^{|x|} \frac{s}{V(s)}\, ds, \qquad x \in \Omega.$$

Лемма 2.2. *Справедливы утверждения:* $F(x) \equiv 1$ *в* Ω_1, *и для* $\gamma_0 \in (0,1)$

$$\gamma_0 \frac{|x|}{V(|x|)} \le F(x) \le \frac{|x|}{V(|x|)}, \qquad x \in \Omega \setminus \Omega_1,$$

$$|DF(x)| \le \frac{1}{\gamma_0} \frac{1}{V(|x|)}, \qquad x \in \Omega \setminus \Omega_1.$$

Доказательство леммы базируется на (1.4) и (1.6).

3. Локальная оценка максимума решения

Для простоты будем полагать, что решение задачи (1.1)–(1.3) достаточно гладкое.

Предложение 3.1. *Пусть* u — *ограниченное решение задачи* (1.1)–(1.3) *в* $\Omega_{2\rho} \times (0,t)$. *Тогда для любого* $\theta > 0$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{\infty,\Omega_\rho \times (t/2,t)} \le \gamma \max\Big(t^{-\frac{N}{k_\theta}} G_\theta(t, \rho(1+\sigma))^{\frac{\lambda+1}{k_\theta}},$$
$$t^{-\frac{1}{H_\theta}} G_\theta(t, \rho(1+\sigma))^{\frac{\lambda+1}{H_\theta}} \Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{\frac{\lambda+1}{H_\theta}}, \Big[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\Big), \quad (3.1)$$

где

$$G_\theta(t,\rho) = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_\rho} u(x,\tau)^\theta\, dx, \qquad t > 0, \rho \ge 1,$$

$0 < \sigma < 1,\ k_\theta = N(m+\lambda-2) + \theta(\lambda+1),\ H_\theta = m + \lambda - 2 + \theta(\lambda+1).$

Доказательство. Положим $Q_\infty = \Omega_\rho \times (t/2, t)$. Оценим норму $\|u\|_{\infty, Q_\infty}$. Рассмотрим последовательности:

$$\rho_n = \rho(1 + \sigma 2^{-n}), \qquad t_n = \frac{t}{2}\Big(1 - \frac{\sigma}{2^n}\Big).$$

Положим

$$Q_n = \Omega_{\rho_n} \times (t_n, t),$$

Также рассмотрим возрастающую последовательность

$$k_n = k\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

где $k > 0$ будет выбрано позже.

Пусть $(x, \tau) \to \zeta_n(x, \tau)$ при каждом $n = 0, 1, \dots$ будет неотрицательная кусочно-гладкая срезающая функция в Q_n, то есть

$$\zeta_n(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{на } Q_{n+1}, \\ 0, & \text{вне } Q_n, \end{cases}$$

и такая что $0 \le \zeta_{n,t} \le \frac{2^{n+2}}{\sigma t}$, $|D\zeta_n| \le \frac{2^{n+1}}{\sigma\rho}$.

Умножим уравнение (1.1) на функцию $(u - k_n)_+^q \zeta_n^{\lambda+1}$ и интегрируя по Q_n по частям, стандартными вычислениями получим:

$$\begin{aligned} \sup_{t_n < \tau < t} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}(\tau)} & (u - k_n)_+^{q+1}\ \zeta_n^{\lambda+1}\, dx \\ & + \iint\limits_{Q_n} |D(u - k_n)_+^{\frac{m+q+\lambda-1}{\lambda+1}} \zeta_n|^{\lambda+1}\, dx\, d\tau \\ & \le \gamma\Bigg(\iint\limits_{Q_n} (u - k_n)_+^{q+1}\ \zeta_{n_t}\, dx\, d\tau \\ & + \iint\limits_{Q_n} (u - k_n)_+^{q+m-1}\ |Du|^\lambda\ \zeta_n^\lambda\ |D\zeta_n|\, dx\, d\tau\Bigg). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Оценим первое слагаемое слева в 3.2:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}} & (u - k_n)_+^{q+1} \zeta_n^{\lambda+1}\, dx \\ & \ge \int\limits_{\Omega_{\rho_n} \cap \{u > k_{n+1}\}} (u - k_n)_+^{q+1}\ \zeta_n^{\lambda+1}\, dx \end{aligned}$$

$$\geq (k_{n+1}-k_n)^{2-m-\lambda} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,\zeta_n^{\lambda+1}\,dx$$
$$\geq (k/2^{n+2})^{2-m-\lambda} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,\zeta_n^{\lambda+1}\,dx$$

и, используя последнюю оценку и выбор функции ζ_n, из (3.2) находим

$$(k/2^n)^{2-m-\lambda} \sup_{t_n<\tau<t} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}(\tau)} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,\zeta_n^{\lambda+1}\,dx + \iint\limits_{Q_n} \left|D((u-k_n)_+^{\frac{m+q+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_n)\right|^{\lambda+1} dx\,d\tau$$
$$\leq \gamma\Bigg(\frac{2^n}{\sigma t}\|u\|_{\infty,Q_0}^{2-m-\lambda} \iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau + \frac{2^{n(\lambda+1)}}{(\sigma\rho)^{\lambda+1}} \iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau\Bigg). \quad (3.3)$$

Далее, будем предполагать, что

$$\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\|u\|_{\infty,Q_0}^{m+\lambda-2} < 1, \quad (3.4)$$

так как в противном случае требуемая оценка очевидна. Обозначим: $M = \frac{\|u\|_{\infty,Q_0}^{2-m-\lambda}}{\sigma^{\lambda+1}t}$, тогда из (3.3) следует, что

$$(k/2^n)^{2-m-\lambda} \sup_{t_n<\tau<t} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}(\tau)} (u-k_{n+1})_+^{q+m+\lambda-1}\,\zeta_n^{\lambda+1}\,dx + \iint\limits_{Q_n} \left|D((u-k_{n+1})_+^{\frac{m+q+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_n)\right|^{\lambda+1} dx\,d\tau$$
$$\leq \gamma 2^{n(\lambda+1)} M \iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau. \quad (3.5)$$

Обозначим $v = (u-k_{n+1})_+^{\frac{m+q+\lambda-1}{\lambda+1}}\zeta_n$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$I_{n+1} \equiv \iint\limits_{Q_{n+1}} (u-k_{n+1})_+^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau \le \iint\limits_{Q_n} v^{\lambda+1}\,dx\,d\tau$$

$$\le \Bigg[\iint\limits_{Q_n} v^{\overline{q}}\,dx\,d\tau\Bigg]^{\frac{\lambda+1}{\overline{q}}} |A_{n+1}|_{N+1}^{1-\frac{\lambda+1}{\overline{q}}}, \quad (3.6)$$

где $A_{n+1} = \{(x,\tau) \in Q_n : u(x,\tau) > k_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Положим $\overline{q} = (\lambda+1)(1+\frac{\lambda+1}{N})$ и в лемме 2.1 $p = r = \lambda+1$, тогда продолжая оценку (3.6), получим

$$I_{n+1} \le \gamma\Bigg(\sup_{t_n<\tau<t}\Bigg[\omega(|A_{n+1}(\tau)|_N, C\rho)^{\lambda+1}\Bigg(\int\limits_{\Omega_{\rho_n}(\tau)} v(x,t)^{\lambda+1}\,dx\Bigg)^{\frac{\lambda+1}{N}}\Bigg]$$

$$\times \iint\limits_{Q_n} |Dv|^{\lambda+1}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{N}{N+\lambda+1}} |A_{n+1}|_{N+1}^{\frac{\lambda+1}{N+\lambda+1}}, \quad (3.7)$$

где C — достаточно большая константа, $A_{n+1}(\tau) = \{x \in \Omega_{\rho_n} : u(x,\tau) > k_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^N$. Оценим меры $|A_{n+1}|_{N+1}$, $|A_{n+1}(\tau)|_N$. Для этого рассмотрим:

$$I_n = \iint\limits_{Q_n} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau$$

$$\ge \iint\limits_{Q_n\cap\{u>k_{n+1}\}} (k_{n+1}-k_n)^{q+m+\lambda-1}\,dx\,d\tau$$

$$= \Big[\frac{k}{2^{n+1}}\Big]^{q+m+\lambda-1} |A_{n+1}|_{N+1};$$

откуда

$$|A_{n+1}|_{N+1} \le 2^{(n+1)(q+m+\lambda-1)} k^{-(q+m+\lambda-1)} I_n, \quad (3.8)$$

$$|A_{n+1}(\tau)|_N$$

$$\le 2^{(n+1)(q+m+\lambda-1)} k^{-(q+m+\lambda-1)} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}} (u-k_n)_+^{q+m+\lambda-1}\,dx$$

$$\le \gamma \frac{2^{n(q+m+\lambda-1)} k^{-(q+m+\lambda-1)}}{t\sigma^{\lambda+1}} I_0. \quad (3.9)$$

Исходя из определения функции ω и (1.6), получим

$$\omega(|A_{n+1}(\tau)|_N, C\rho) \le \gamma 2^{n(q+m+\lambda-1)} \omega\Big(\frac{k^{-(q+m+\lambda-1)}}{t\sigma^{\lambda+1}} I_0, \rho\Big). \tag{3.10}$$

К интегралам справа (3.7) применим оценку (3.5), и, учитывая (3.8)–(3.10), получим

$$I_{n+1} \le \gamma b^n \Big[\omega\Big(\frac{k^{-(q+m+\lambda-1)}}{t\sigma^{\lambda+1}} I_0, \rho\Big)\Big]^{\frac{(\lambda+1)N}{N+\lambda+1}} M k^{\frac{-(q+1)(\lambda+1)}{N+\lambda+1}} I_n^{1+\frac{\lambda+1}{N+\lambda+1}}, \tag{3.11}$$

где $b = 2^l > 1$, l — постоянная, зависящая от известных параметров.

Из леммы 5.6, [14, глава 2], имеем

$$I_n = \iint\limits_{Q_n} (u - k_n)_+^{q+m+\lambda-1} \, dx \, d\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть

$$\|u\|_{\infty, Q_\infty} \le k, \tag{3.12}$$

если

$$\gamma I_0^{\frac{\lambda+1}{N+\lambda+1}} \Big[\omega\Big(\frac{k^{-(q+m+\lambda-1)}}{t\sigma^{\lambda+1}} I_0, \rho\Big)\Big]^{\frac{(\lambda+1)N}{N+\lambda+1}} M k^{\frac{-(q+1)(\lambda+1)}{N+\lambda+1}} b^{\frac{N+\lambda+1}{\lambda+1}} \le 1,$$

тем более, если

$$\gamma \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta\frac{\lambda+1}{N+\lambda+1}} \Big[\omega\Big(\frac{k^{-\theta}}{t\sigma^{\lambda+1}} \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta}, \rho\Big)\Big]^{\frac{(\lambda+1)N}{N+\lambda+1}} M k^{\frac{-(q+1)(\lambda+1)}{N+\lambda+1}} b^{\frac{N+\lambda+1}{\lambda+1}} \le 1,$$

где $\theta = q + m + \lambda - 1$. Выберем k так, чтобы:

$$\gamma \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta\frac{\lambda+1}{N+\lambda+1}} \Big[\omega\Big(\frac{k^{-\theta}}{t\sigma^{\lambda+1}} \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta}, \rho\Big)\Big]^{\frac{(\lambda+1)N}{N+\lambda+1}} M k^{\frac{-(q+1)(\lambda+1)}{N+\lambda+1}} b^{\frac{N+\lambda+1}{\lambda+1}} = 1. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13), а также свойств функции ω с учетом (1.6) следует

$$\|u\|_{\infty, Q_\infty}^{q+1} \le \gamma \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta} M^{\frac{N+\lambda+1}{\lambda+1}} \Big[\omega\Big(\frac{\|u\|_{\infty, Q_\infty}^{-\theta}}{t\sigma^{\lambda+1}} \|u\|_{\theta, Q_0}^{\theta}, \rho\Big)\Big]^N. \tag{3.14}$$

Вспоминая определение M, (3.14) перепишем в виде

$$\|u\|^{q+1}_{\infty,Q_\infty} \le \gamma\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0}\Big[\frac{\|u\|^{2-m-\lambda}_{\infty,Q_0}}{t\sigma^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{N+\lambda+1}{\lambda+1}}\Big[\omega\Big(\frac{\|u\|^{-\theta}_{\infty,Q_\infty}}{t\sigma^{\lambda+1}}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{N}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим следующие последовательности

$$r_{i+1} = r_i + \sigma\rho 2^{-(i+1)};\quad r_0=\rho,\qquad t_{i+1} = t_i - \sigma t 2^{-(i+2)};\quad t_0 = t/2,$$

$$Q^i = \Omega_{r_i}\times(t_i,t);\;\; Q^0 = Q_\infty;\;\; Q^\infty = Q_0,\qquad Q^i\subset Q^{i+1},\; i=0,1,\dots$$

Введем обозначение $Y_i = \|u\|_{\infty,Q^i}$. Запишем неравенство (3.15) для пары цилиндров $Q^i \subset Q^{i+1}$

$$Y_i \le \gamma\|u\|^{\frac{\theta}{q+1}}_{\theta,Q_0}\, Y_{i+1}^{\frac{(2-m-\lambda)(N+\lambda+1)}{(\lambda+1)(q+1)}}\sigma^{-i\frac{N+\lambda+1}{q+1}} \times t^{-\frac{N+\lambda+1}{(\lambda+1)(q+1)}}\Big[\omega\Big(\frac{Y_i^{-\theta}}{t\sigma^{\lambda+1}}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{\frac{N}{q+1}}. \tag{3.16}$$

Применив к правой части (3.16) неравенство Юнга с показателями $\frac{(\lambda+1)(q+1)}{(2-m-\lambda)(N+\lambda+1)}$, $\frac{(\lambda+1)(q+1)}{(\lambda+1)(q+1)-(2-m-\lambda)(N+\lambda+1)} = \frac{(\lambda+1)(q+1)}{k_\theta}$, а также учитывая свойства функции ω, получим

$$Y_i \le \delta Y_{i+1} + \gamma(\delta)\sigma^{-i\frac{(N+\lambda+1)(\lambda+1)}{k_\theta}}t^{-\frac{N+\lambda+1}{k_\theta}}\|u\|^{\frac{\theta(\lambda+1)}{k_\theta}}_{\theta,Q_0} \times\Big[\omega\Big(\frac{Y_0^{-\theta}}{t\sigma^{\lambda+1}}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{\frac{N(\lambda+1)}{k_\theta}}. \tag{3.17}$$

Обозначим $\gamma(\delta)\sigma^{-i\frac{(N+\lambda+1)(\lambda+1)}{k_\theta}} = \gamma b^i$, $b>1$, и перепишем (3.17) в виде

$$Y_i \le \delta Y_{i+1} + \gamma b^i t^{-\frac{N+\lambda+1}{k_\theta}}\|u\|^{\frac{\theta(\lambda+1)}{k_\theta}}_{\theta,Q_0}\Big[\omega\Big(\frac{Y_0^{-\theta}}{t}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{\frac{N(\lambda+1)}{k_\theta}}. \tag{3.18}$$

Итерируя неравенство (3.18), получим

$$Y_0 \le \delta^{i+1}Y_{i+1} + \sum_{k=0}^{i}(b\delta)^k\gamma t^{-\frac{N+\lambda+1}{k_\theta}}\|u\|^{\frac{\theta(\lambda+1)}{k_\theta}}_{\theta,Q_0}\Big[\omega\Big(\frac{Y_0^{-\theta}}{t}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{\frac{N(\lambda+1)}{k_\theta}},$$

$i=0,1,2\dots$. Выбираем $\delta = \frac{1}{2b}$ и устремим i к бесконечности. Это приведет к неравенству

$$Y_0 \le \gamma t^{-\frac{N+\lambda+1}{k_\theta}}\|u\|^{\frac{\theta(\lambda+1)}{k_\theta}}_{\theta,Q_0}\Big[\omega\Big(\frac{Y_0^{-\theta}}{t}\|u\|^{\theta}_{\theta,Q_0},\rho\Big)\Big]^{\frac{N(\lambda+1)}{k_\theta}}.$$

Таким образом, имеем

$$\|u\|_{\infty,Q_\infty} \le \gamma t^{-\frac{N+\lambda+1}{k_\theta}} \|u\|_{\theta,Q_0}^{\frac{\theta(\lambda+1)}{k_\theta}} \left[\omega\Big(\frac{\|u\|_{\infty,Q_\infty}^{-\theta}}{t}\|u\|_{\theta,Q_0}^{\theta},\rho\Big)\right]^{\frac{N(\lambda+1)}{k_\theta}}. \quad (3.19)$$

Нетрудно заметить, что требуемая оценка (3.1) следует из (3.19) и определения функции ω. □

Замечание 3.1. Утверждение предложения остается справедливым, если формально заменить Ω_ρ на $A_\rho = \Omega_{2\rho} \setminus \Omega_\rho$, а $\Omega_{\rho(1+\sigma)}$ — на $\tilde{A}_\rho = \Omega_{4\rho} \setminus \Omega_{\rho/2}$.

4. Локальная оценка L_1 нормы решения

Предложение 4.1. *Пусть $u_0 \ge 0$, $u_0 \in L_{1,loc}(\Omega)$. Тогда для $t > 0$, $\rho \ge 1$ справедлива оценка*

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_\rho} u(x,\tau)\,dx \le \gamma\left(\left[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\right]^{\frac{1}{2-m-\lambda}} |\Omega_{2\rho}|_N + \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx\right). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть $\zeta(x)$ — неотрицательная кусочно-гладкая срезающая функция $\Omega_{2\rho}$, равная единице в Ω_ρ, и такая что $|D\zeta| \le \gamma\rho^{-1}$. Обозначим $Q_\rho = \Omega_\rho \times (0,t)$.

Умножим уравнение (1.1) на $\zeta(x)^{\lambda+1}$ и проинтегрируем по $Q_{2\rho}$, получим

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_\rho} u(x,\tau)\,dx \le \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx + \gamma\rho^{-1} \iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^\lambda\, u^{m-1}\,\zeta^\lambda\,dx\,d\tau. \quad (4.2)$$

Будем оценивать второй интеграл справа (4.2), применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^\lambda u^{m-1}\,\zeta^\lambda\,dx\,d\tau$$
$$\le \left(\iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^{\lambda+1} u^{m-1}\,\tau^{\frac{1}{\lambda+1}}\,(u+\epsilon)^{-\theta}\,\zeta^{\lambda+1}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$
$$\times\left(\iint\limits_{Q_{2\rho}} u^{m-1}\,\tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}(u+\epsilon)^{\theta\lambda}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}. \quad (4.3)$$

Оценим второй интеграл справа (4.3), для этого умножим уравнение

(1.1) на пробную функцию $\phi(x,t) = t^{\frac{1}{\lambda+1}}(u+\epsilon)^{1-\theta}\zeta^{\lambda+1}$, где $\zeta = \zeta(x)$, $1 < \theta < 2$ будет выбрано; проинтегрируем по $Q_{2\rho}$. Проделав элементарные преобразования, получим

$$\iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^{\lambda+1} u^{m-1}\, \tau^{\frac{1}{\lambda+1}} (u+\epsilon)^{-\theta}\, \zeta^{\lambda+1}\, dx\, d\tau$$
$$\leq \gamma\Big(1 + \frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big) \iint\limits_{Q_{2\rho}} (u+\epsilon)^{2-\theta}\ \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}\, dx\, d\tau. \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) продолжим оценку правой части (4.3)

$$\iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^{\lambda} u^{m-1}\, \zeta^{\lambda}\, dx\, d\tau$$
$$\leq \gamma\left[\Big(1 + \frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big) \iint\limits_{Q_{2\rho}} (u+\epsilon)^{2-\theta} \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}\, dx\, d\tau\right]^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$
$$\times \left[\ \iint\limits_{Q_{2\rho}} \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} (u+\epsilon)^{m-1+\theta\lambda}\, dx\, d\tau\right]^{\frac{1}{\lambda+1}}. \quad (4.5)$$

Положим $\theta = \frac{3-m}{\lambda+1}$, тогда из (4.5) имеем

$$\iint\limits_{Q_{2\rho}} |Du|^{\lambda} u^{m-1}\, \zeta^{\lambda}\, dx\, d\tau$$
$$\leq \gamma\Big(1 + \frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \iint\limits_{Q_{2\rho}} \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} (u+\epsilon)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\, dx\, d\tau. \quad (4.6)$$

Обозначив

$$\rho_n = \rho\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}, \qquad Q_n = \Omega_{\rho_n} \times (0,t), \qquad M_n = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_{\rho_n}} u(x,\tau)\, dx,$$

можем записать (4.2) с учетом введенных обозначений и (4.6)

$$M_n \leq \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\, dx + \gamma\rho^{-1}\Big(1 + \frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$
$$\times \iint\limits_{Q_{n+1}} \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} (u+\epsilon)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\, dx\, d\tau. \quad (4.7)$$

Продолжим оценку (4.7)

$$M_n \le \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx + \gamma\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \times 2^n\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{\rho_{n+1}}} \tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}\epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\,dx\,d\tau + t^{\frac{1}{\lambda+1}}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega_{\rho_{n+1}}} u^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\,dx\Bigg). \quad (4.8)$$

Следовательно, из (4.8) имеем

$$M_n \le \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx + \gamma\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} 2^n\Bigg(\epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}t^{\frac{1}{\lambda+1}}|\Omega_{\rho_{n+1}}|_N + t^{\frac{1}{\lambda+1}}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega_{\rho_{n+1}}} u^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\,dx\Bigg). \quad (4.9)$$

Применим в последнем интеграле справа в (4.9) неравенство Гёльдера с показателями $\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}$ и $\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}$:

$$M_n \le \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx + \gamma 2^n\rho^{-1}\Bigg(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \times\Big(\epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}t^{\frac{1}{\lambda+1}}|\Omega_{\rho_{n+1}}|_N + t^{\frac{1}{\lambda+1}}M_{n+1}^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}|\Omega_{\rho_{n+1}}|_N^{\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}\Big), \quad (4.10)$$

или

$$M_n \le \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx + \gamma 2^n\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}t^{\frac{1}{\lambda+1}}|\Omega_{\rho_{n+1}}|_N + \gamma 2^n\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}t^{\frac{1}{\lambda+1}}M_{n+1}^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}|\Omega_{\rho_{n+1}}|_N^{\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}. \quad (4.11)$$

Далее, применив к последнему слагаемому справа в (4.11) неравенство Юнга с показателями $\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}$ и $\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}$, находим

$$
\begin{aligned}
M_n \le \delta M_{n+1} &+ \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx \\
&+ \gamma 2^n \rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} t^{\frac{1}{\lambda+1}} |\Omega_{\rho_{n+1}}|_N \\
&+ \gamma(\delta)\Big(2^n\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} t^{\frac{1}{\lambda+1}}\Big)^{\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}} |\Omega_{\rho_{n+1}}|_N. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Итерируя по n в неравенстве (4.12) также, как при доказательстве предложения 3.1, получаем

$$
\begin{aligned}
M_0 = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_\rho} u(x,\tau)\,dx
&\le \gamma\Bigg(\Big[\rho^{-1}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \epsilon^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} t^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
&+ \rho^{-\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}\Big(1+\frac{t}{\rho^{\lambda+1}\epsilon^{2-m-\lambda}}\Big)^{\frac{\lambda}{2-m-\lambda}} t^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\Big] |\Omega_{2\rho}|_N \\
&+ \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx\Bigg). \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Выбираем

$$
\epsilon = \Big[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{1}{2-m-\lambda}},
$$

тогда (4.13) преобразуется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
M_0 \le \gamma\Bigg(\Big[\rho^{-1}\Big[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{2\lambda+m-1}{(\lambda+1)(2-m-\lambda)}} t^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
+ \Big[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\Big] |\Omega_{2\rho}|_N + \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx\Bigg). \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Таким образом, (4.14) дает

$$
M_0 \le \gamma\Bigg(\Big[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\Big]^{\frac{1}{2-m-\lambda}} |\Omega_{2\rho}|_N + \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_0\,dx\Bigg).
$$

□

5. Оценка момента

Предложение 5.1. *Имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u(x,t)\frac{|x|}{V(|x|)}\,dx \le \gamma\mu(0) + \gamma\Big(\frac{t}{\rho^{2\lambda+m-1}}\Big)^{\frac{1}{2-m-\lambda}}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Выберем срезающую функцию

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{в } \Omega\setminus\Omega_{2\rho}, \\ 0, & \text{в } \Omega_\rho, \end{cases}$$

и такую что $|D\zeta| \le \gamma/\rho$. Выбираем в качестве пробной функцию $\eta = \zeta^{\lambda+1}F(x)$, где F была определена перед леммой 2.2, и с помощью последней для произвольного фиксированного $\rho \ge 1$ получаем

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \zeta^{\lambda+1}\,u(x,t)\frac{|x|}{V(|x|)}\,dx \\
&\qquad\le \gamma\mu(0) + \gamma\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{2\rho}\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}|Du|^\lambda\,\zeta^\lambda|D\zeta|F(x)\,dx\,d\tau \\
&\qquad\quad + \gamma\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}|Du|^\lambda\,\zeta^{\lambda+1}|DF(x)|\,dx\,d\tau \\
&\qquad\le \gamma\mu(0) + \gamma\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}\;|Du|^\lambda\frac{1}{V(|x|)}\,\zeta^\lambda\,dx\,d\tau.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Оценим последний интеграл в (5.2) аналогично, как это делалось в доказательстве предложения 4.1:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}|Du|^\lambda\frac{1}{V(|x|)}\,\zeta^\lambda\,dx\,d\tau \\
&\qquad\le \Bigg(\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \tau^{\frac{1}{\lambda+1}}u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}\,\zeta^{\lambda+1}u^{-\theta}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \\
&\qquad\quad\times\Bigg(\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}\Big[\frac{1}{V(|x|)}\Big]^{\lambda+1}u^{\theta\lambda}\tau^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Чтобы провести оценку первого интеграла справа (5.3), домножим уравнение (1.1) на функцию $\tau^{\frac{1}{\lambda+1}}u^{1-\theta}\zeta^{\lambda+1}$, проинтегрируем по соответствующей области, и проведя очевидные преобразования, получим следующую оценку:

$$\int_0^t \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \tau^{\frac{1}{\lambda+1}} u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}\,\zeta^{\lambda+1}u^{-\theta}\,dx\,d\tau \\ \le \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}} \sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \zeta^{\lambda+1}u^{2-\theta}\,dx \\ + \gamma \int_0^t \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{t}{\rho^{\lambda+1}u^{2-m-\lambda}}\,\tau^{\frac{1}{\lambda+1}}u^{2-\theta}\,dx\,d\tau.$$

Можем считать, что

$$\frac{t}{\rho^{\lambda+1}u^{2-m-\lambda}} < 1,$$

значит

$$\int_0^t \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \tau^{\frac{1}{\lambda+1}} u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}\,\zeta^{\lambda+1}\; u^{-\theta}\,dx\,d\tau \\ \le \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}} \sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \zeta^{\lambda+1}u^{2-\theta}\,dx.$$

Выбираем θ так, чтобы $2-\theta = m-1+\theta\lambda$, то есть $\theta = \frac{3-m}{\lambda+1}$. С учетом последней оценки, из (5.3) следует

$$\int_0^t \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}|Du|^{\lambda}\frac{1}{V(|x|)}\,\zeta^{\lambda}\,dx\,d\tau \\ \le \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\,dx\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \\ \times \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\Big[\frac{1}{V(|x|)}\Big]^{\lambda+1}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ \equiv \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}} \sup_{0<\tau<t}\big(J_1^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} J_2^{\frac{1}{\lambda+1}}\big). \quad (5.4)$$

Оценим J_i, $i=1,2$.

$$J_1 = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\Big]^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\,dx$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\,dx\Bigg)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}}\,dx\Bigg)^{\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}. \quad (5.5)$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}}\,dx$$

$$= \int\limits_\rho^\infty \Big[\frac{\tau}{V(\tau)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}} \frac{d}{d\tau}V(\tau)\,d\tau$$

$$\le \gamma\int\limits_\rho^\infty F^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}}\frac{d}{d\tau}V(\tau)\,d\tau, \quad (5.6)$$

где F — функция из леммы 2.2. Интегрируя по частям и принимая во внимание (1.6), из (5.6) получаем:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}}\,dx \le \gamma\Big[\frac{\tau}{V(\tau)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}} V(\tau)\Big|_\rho^\infty$$

$$+\gamma\int\limits_\rho^\infty \Big[\frac{\tau}{V(\tau)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}-1}\frac{1}{V(\tau)}V(\tau)\,d\tau$$

$$\le \gamma\int\limits_\rho^\infty \Big[\frac{\tau}{V(\tau)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}-1}\,d\tau$$

$$\le \gamma\int\limits_\rho^\infty \Big[\frac{V(\tau)}{\tau^{1-\beta}}\Big]^{\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}\tau^{-\beta\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}\,d\tau$$

$$\le \gamma\Big[\frac{V(\rho)}{\rho^{1-\beta}}\Big]^{\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}\int\limits_\rho^\infty \tau^{-\beta\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}\,d\tau. \quad (5.7)$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \Big[\frac{|x|}{V(|x|)}\Big]^{-\frac{2\lambda+m-1}{2-m-\lambda}}\,dx \le \gamma\rho\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{-\frac{\lambda+1}{2-m-\lambda}}. \tag{5.8}$$

Из (5.5) и (5.8) следует

$$J_1 \le \gamma\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\,dx\Bigg)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} \rho^{\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{-1}. \tag{5.9}$$

Проводя аналогичные оценки для J_2, получим:

$$J_2 \le \gamma\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\,dx\Bigg)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} \rho^{\lambda+1-\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{\lambda}. \tag{5.10}$$

Применяя теперь к (5.4) оценки (5.9) и (5.10), получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} u^{m-1}|Du|^\lambda\,\frac{1}{V(|x|)}\,\zeta^\lambda\,dx\,d\tau \\
&\qquad\le \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}}\sup_{0<\tau<t}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\,dx\Bigg)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}} \\
&\quad\times\Big(\rho^{\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{-1}\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\Big(\rho^{\lambda+1-\frac{2-m-\lambda}{\lambda+1}}\Big[\frac{\rho}{V(\rho)}\Big]^{\lambda}\Big)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
&\quad= \gamma t^{\frac{1}{\lambda+1}}\sup_{0<\tau<t}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\cdot u\,dx\Bigg)^{\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}\rho^{-\frac{2\lambda+m-1}{\lambda+1}}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

В силу неравенства Юнга, примененного к правой части (5.11), с учетом (5.2), получим нужную оценку.

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \zeta^{\lambda+1}\,\frac{|x|}{V(|x|)}\,u(x,t)\,dx \le \gamma\mu(0)+\gamma\Big(\frac{t}{\rho^{2\lambda+m-1}}\Big)^{\frac{1}{2-m-\lambda}}.$$

$\square$

6. Доказательство теоремы 1.1

Будем искать решение нашей задачи как предел последовательности решений аппроксимирующих задач

$$u_{nt} - \operatorname{div}(u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}Du_n) = 0, \qquad \text{в } \Omega_n \times (0,\infty),$$

$$u_n(x,t) = 0, \qquad \text{на } (\partial\Omega_n \cap \Omega) \times (0,\infty),$$

$$u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}\frac{\partial u_n}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \qquad \text{на } (\partial\Omega_n \cap \partial\Omega) \times (0,\infty),$$

$$u_n(x,0) = u_{0n}(x) \geq 0 \qquad \text{в } \Omega_n.$$

Здесь $u_n \geq 0,\ n \geq 1$; $u_{0n} \in C_\infty(\overline{\Omega}_n)$, и u_{0n} сходится к u_0 в $L_1(\Omega)$; и можно предполагать

$$\|u_{0n}\|_{1,\Omega} \leq \gamma\|u_0\|_{1,\Omega}, \qquad \int\limits_\Omega \frac{|x|}{V(|x|)}\, u_{0n}(x)\, dx \leq \gamma\mu(0).$$

Заметим, что мы всегда понимаем u_n определенными на Ω, полагая $u_n \equiv 0$ вне Ω_n.

Благодаря стандартным аргументам компактности и гладкости начальных данных, из [15] (см. также [16, 17]) следует, что вышеописанная задача глобально разрешима.

Нам понадобится очевидная оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,\Omega} \leq \|u_0\|_{1,\Omega}, \qquad t > 0. \tag{6.1}$$

Воспользуемся результатом предложения 3.1 с $\theta = 1$, учитывая (6.1), получим

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\Omega_\rho} \leq \gamma \max\Big(\tau^{-\frac{N}{k}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}},$$
$$\tau^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\left[\frac{\rho}{V(\rho)}\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}, \left[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\right]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\Big). \tag{6.2}$$

Воспользуемся замечанием 3.1, и для $\rho \geq \gamma P(\tau)$ имеем

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,A_\rho} \leq \gamma \max\Bigg(t^{-\frac{N}{k}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}},$$
$$t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\left(\frac{\rho}{V(\rho)} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\tilde{A}_\rho} u(x,t)\, dx\right)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\Bigg). \tag{6.3}$$

Оценим следующее выражение, содержащееся в (6.3)

$$\frac{\rho}{V(\rho)} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\tilde{A}_\rho} u(x,t)\,dx \le \gamma \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\tilde{A}_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\,u(x,t)\,dx. \tag{6.4}$$

Соединяя оценки (6.3), (6.4), а также (6.2) с $\rho = P(\tau)$, получим

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le \gamma \max\Bigg(& t^{-\frac{N}{k}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, \\ & t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \Bigg[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \frac{|x|}{V(|x|)}\,u(x,t)\,dx\Bigg]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}, \\ & t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} \Big[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\Big]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\Bigg).\end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку (5.1) с $\rho = P(\tau)$, а также само определение $P(\tau)$, получаем нужную оценку (1.9). Правая часть оценки (1.11) следует из замечания 1.1. Осталось доказать левую часть (1.11), то есть оценку снизу. В силу закона сохранения массы, для любого $t > 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} u_0\,dx = \int\limits_{\Omega_R} u(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_R} u(x,t)\,dx. \tag{6.5}$$

Учитывая (5.1) из (6.5) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} u_0\,dx &\le \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} V(R) + \frac{V(R)}{R} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_R} \frac{|x|}{V(|x|)}\,u\,dx \\ &\le \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} V(R) + \gamma\Big[\mu(0) + \Big(\frac{t}{R^{2\lambda+m-1}}\Big)^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\Big]\frac{V(R)}{R}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Возьмем в (6.6) $R = CP(\tau) = CP(t\|u_0\|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2})$, вспоминая определение $P(\tau)$, то есть (1.10), вычислим

$$\Big(\frac{t}{P(\tau)^{2\lambda+m-1}}\Big)^{\frac{1}{2-m-\lambda}} \frac{V(P(\tau))}{P(\tau)} = \|u_0\|_{1,\Omega},$$

откуда при достаточно больших t и будет следовать левая часть оценки (1.11). Теорема 1.1 доказана.

Литература

[1] А. С. Калашников, *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук, **42** (1987), N 2, 135–176.

[2] А. К. Гущин, *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Мат. сб., **101 (143)** (1976), N 4 (12), 459–499.

[3] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Optimal bounds and blow up phenomena for parabolic problems in narrowing domains* // Proc. Royal Sosiety of Edinburgh, **128A** (1998), 1163–1180.

[4] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity* // Advances in Differential Equations, **5** (2000), 833–860.

[5] А. В. Лежнев, *О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Мат. сб., **129 (171)** (1986), N 2, 186–200.

[6] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, Ю. А. Михайлов, *О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Мат. сб., **128 (170)** (1985), N 2 (10), 147–168.

[7] А. К. Гущин, *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Тр. МИАН, **CXXVI** (1973), 5–45.

[8] А. К. Гущин, *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Мат. сб., **119 (161)** (1982), 451–508.

[9] В. И. Ушаков, *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области* // Мат. сб., **111 (153)** (1980), 95–115.

[10] Ф. Х. Мукминов, *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Мат. сб., **111(153)** (1980), 503–521.

[11] А. Ф. Тедеев, *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения, **27** (1991), N 10, 1795–1806.

[12] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary* // J. Math. Anal. Appl., **231** (1999), 543–567.

[13] E. Di Benedetto, M. A. Herrero, *Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$* // Arch. Ration. Mech. Anal., **111** (1990), 225–290.

[14] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М., 1967.

[15] M. Tsutsumi, *On solutions of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion* // J. Math. Anal. Appl., **132** (1988), 187–212.

[16] A. V. Ivanov, *Holder estimates near the boundary for generalized solutions of quasilinear parabolic equations that admit double degeneration* // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov., **188** (1991), 45–69.

[17] M. Porzio, V. Vespri, *Holder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations* // J. Diff. Eqns., **103** (1993), 146–178.

Сведения об авторах

Ольга Михайловна Болдовская,
Анатолий Федорович Тедеев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74,
340114 Донецк,
Украина
E-Mail: omboldovskaya@mail.ru,
tedeev@iamm.ac.donetsk.ua