Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 1 – 15

Об инвариантных подпространствах J-диссипативных операторов

Томас Я. Азизов, Ирина В. Гриднева

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Приведены новые признаки существования максимальных неотрицательных подпространств, инвариантных относительно J-диссипативных операторов.

2000 MSC. 47B50, 46C20.

Ключевые слова и фразы. Пространство Крейна, J-диссипативный оператор, инвариантное подпространство.

1. Введение

Настоящая статья посвящена проблеме существования максимальных семидефинитных инвариантных подпространств у операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой. Как известно, вопрос о наличии у оператора инвариантного подпространства, тем более специального, является одним из ключевых в теории операторов и различных ее приложениях. Впервые обсуждаемый нами вопрос для самосопряженного оператора в пространстве, впоследствии названном пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$, был решен в 1944 г. Л. С. Понтрягиным [10], а для случая $\varkappa = 1$ годом ранее С. Л. Соболевым [11]. С основной канвой дальнейшего развития этого вопроса до 90-х годов прошлого столетия читатель может ознакомиться в [3, 4]. Здесь мы только упомянем, что для J-диссипативного оператора в

Статья поступила в редакцию 12.12.2008
Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00566-а

ISSN 1810 – 3200.

$\Pi_\varkappa$ теорема об инвариантном подпространстве была получена независимо одним из авторов [1] и М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [8], затем в [2] — для диссипативных операторов в пространстве Крейна, удовлетворяющих условию (**L**) (определение см. ниже). В последнее время этой проблеме посвящен ряд статей А. А. Шкаликова [12–17], в частности, в работах [15] и [17] вместо упомянутого выше условия (**L**) предложены другие, более слабые. Следует отметить, что статья [17] является первой в этом направлении, в которой не предполагается наличие регулярных точек у исследуемого оператора. Прежде чем сформулировать цели настоящего исследования, напомним некоторые понятия из теории пространств с индефинитной метрикой. Более подробно с ними можно ознакомиться, например, в монографии [4].

Пусть на линейном пространстве $\mathcal{H}$ задана полуторалинейная эрмитова форма $[\cdot,\cdot]$, называемая в дальнейшем индефинитной метрикой. Если пространство $\mathcal{H}$ допускает разложение в ортогональную прямую сумму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+[\dot{+}]\mathcal{H}^-, \tag{1.1}$$

где $\{\mathcal{H}^\pm, \pm[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертовы пространства и $[x^+, x^-] = 0$, при всех $x^\pm \in H^\pm$, то $\{\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\}$ называют *пространством Крейна*, а разложение (1.1) — *фундаментальным*. Это разложение порождает ортопроекторы из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\pm$, которые мы будем обозначать $P^\pm$ соответственно. Пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением

$$(x, y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \quad x_\pm, y_\pm \in \mathcal{H}^\pm$$

является гильбертовым; обозначим $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. В этом случае, $[\,\cdot,\,\cdot] = (\,J\cdot,\,\cdot)$, где J — *фундаментальная симметрия*, J — самосопряженный и одновременно унитарный оператор, $J = P^+ - P^-$, $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm J)$.

Подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\{\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\}$ называется *неотрицательным*, если $[x, x] \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{L}$; *положительным*, если $[x, x] > 0$ для всех $x \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$; и *равномерно положительным*, если на $\mathcal{L}$ нормы $[x, x]^{1/2}$ и $\|x\|$ эквивалентны, т.е. (с учетом неравенства $[x, x] \leq \|x\|^2$) для некоторого $\varepsilon > 0$ при всех $x \in \mathcal{L}$ выполняется неравенство $[x, x] \geq \varepsilon\|x\|^2$. Аналогично определяются неположительные, отрицательные и равномерно отрицательные подпространства.

Понятие равномерно дефинитного подпространства допускает некоторое обобщение: неотрицательное (неположительное) подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\mathcal{H}$ назовем *подпространством класса* $\mathbf{h}^+$ *(класса* $\mathbf{h}^-$*)*, если оно допускает разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^+$

($\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^-$) в прямую сумму конечномерного изотропного подпространства $\mathcal{L}_0$ ($\dim \mathcal{L}_0 < \infty,\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$) и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространства $\mathcal{L}^+$ ($\mathcal{L}^-$).

Ограниченный оператор K, заданный соотношением: $K = P^-(P^+|\mathcal{L})^{-1}$, $K : P^+\mathcal{L} \to \mathcal{H}^-$, называется *угловым оператором* неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$. Для любого неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ существует угловой оператор K и $\mathcal{L} = \{x = x^+ + Kx^+ \mid x^+ \in \mathcal{L}_+\}$, где $\mathcal{L}_+ = P^+\mathcal{L}$.

Символами $(\mathfrak{M}^+(\mathcal{H}) =)\mathfrak{M}^+$ $(\mathfrak{M}^-(\mathcal{H}) =)\mathfrak{M}^-$ обозначим множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств пространства $\mathcal{H}$.

Определим некоторые классы линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой.

Оператор $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ назовем *J-несжимающим*, если: $[Vx, Vx] \geq [x, x],\ x \in \mathcal{H}$.

Если одновременно с оператором V J-несжимающим будет и сопряженный V^*, то V называют *J-бинесжимающим* оператором.

Оператор A, действующий в пространстве Крейна $\mathcal{H}$, называется *J-диссипативным*, если $\operatorname{Im}[Ax, x] \geq 0$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$; $\operatorname{dom} A$ — область определения оператора A. Оператор A называется максимальным J-диссипативным, если он не допускает нетривиальных J-диссипативных расширений.

Напомним, что аналогично случаю гильбертова пространства, J-диссипативный оператор называется максимальным в существенном, если его замыкание — максимальный J-диссипативный оператор.

Укажем на очевидную связь между диссипативными и J-диссипативными операторами: A является J-диссипативным оператором тогда и только тогда, когда оператор JA (а потому и AJ) является диссипативным. При этом A — максимальный J-диссипативный оператор тогда и только тогда, когда JA (а потому и AJ) является максимальным диссипативным.

При $J = I$ наше определение совпадает с определением диссипативного оператора по М. С. Лившицу, описывающее класс $\mathfrak{D}_L$ операторов, содержащий симметрические и, в частности, самосопряженные операторы. Другое определение диссипативного оператора дано Р. С. Филлипсом: $\operatorname{Re}(Bx, x) \leq 0$ и этот класс $\mathfrak{D}_{Ph}$ описывает процессы, связанные с вопросами устойчивости системы, диссипацией. Следующее тривиальное утверждение связывает эти классы операторов.

Предложение 1.1.

$$A \in \mathfrak{D}_L \quad \iff \quad B = -iA \in \mathfrak{D}_{Ph}; \tag{1.2}$$

при этом A — максимальный диссипативный по Лившицу тогда и только тогда, когда $B = -iA$ — максимальный диссипативный оператор по Филлипсу.

Будем говорить, что оператор A в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию ($\mathbf{L}$) и писать $A \in (\mathbf{L})$, если $\mathcal{H}^+ \subset \operatorname{dom} A$. Условие ($\mathbf{L}$) было введено Г. Лангером [7] при установлении существования максимальных неотрицательных инвариантных подпространств у самосопряженных операторов в пространстве Крейна.

Как обычно, символами $\sigma(A)$, $\rho(A)$, $\operatorname{dom} A$ и $\operatorname{ran} A$ будем обозначать спектр, резольвентное множество, область определения и область значений оператора A, соответственно. Множество вполне непрерывных (компактных) операторов, действующих в $\mathcal{H}$, обозначим $\mathfrak{S}_\infty$.

Напомним, что под *преобразованием Кэли–Неймана* оператора A в точке $(\overline{\lambda} \neq)\lambda \notin \sigma_p(A)$ мы будем понимать оператор $U = I + (\lambda - \overline{\lambda})(A - \lambda I)^{-1}$. При этом, обратное преобразование Кэли-Неймана определяется равенством $A = \lambda I + (\lambda - \overline{\lambda})(U - I)^{-1}$.

Пусть A — J-диссипативный оператор, являющийся замыканием оператора

$$A' := A|_{(\mathcal{H}^+ \cap \operatorname{dom} A) \oplus (\mathcal{H}^- \cap \operatorname{dom} A)} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Скажем, что J-диссипативный оператор A удовлетворяет условию $(\mathbf{S_1})$: $A \in (\mathbf{S_1})$, если:

(a) $-A'_{22}$ — максимальный диссипативный оператор в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{H}^-, -[\cdot,\cdot]\}$;

(b) при $\operatorname{Im}\mu > 0$ оператор $(A'_{22} - \mu)^{-1} A'_{21}$ — ограничен и плотно задан в $\mathcal{H}^+$;

(c) замыкание оператора $A'_{12}(A'_{22} - \mu)^{-1}$ — компактный оператор;

(d) передаточная функция $M(\mu) = A'_{11} - A'_{12}(A'_{22} - \mu)^{-1} A'_{21}$ — ограниченный плотно заданный в $\mathcal{H}^+$ оператор.

Если выполнены только условия (a)–(c), то будем говорить, что $A \in$($\mathbf{S_2}$) . Условия ($\mathbf{S_1}$) и ($\mathbf{S_2}$) введены А. А. Шкаликовым в [15] и [17], соответственно. В [15] приведен пример оператора, для которого выполнены условия ($\mathbf{S_1}$) , но не выполнено условие **(L)**. Нетрудно привести пример оператора, принадлежащего множеству ($\mathbf{S_2}$) $\setminus$ ($\mathbf{S_1}$) .

Основная цель данной работы — развить результаты [15], а также получить новые теоремы об инвариантном подпространстве для J-диссипативного оператора.

2. Инвариантные подпространства J-диссипативного оператора

Доказательству основного результата этого раздела, теоремы 2.1, предпошлем следующую лемму, представляющую самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \quad -$$

плотно заданный J-диссипативный оператор, $-A'_{22}$ — максимальный в существенном диссипативный оператор в $\{\mathcal{H}^-, -[\cdot,\cdot]\}$. Пусть A — замыкание оператора A'.

Если существует λ с $\operatorname{Im}\lambda > 0$ такое, что $\lambda \in \rho(A)$ и оператор $M(\lambda) = A'_{11} - \lambda - A'_{12}(A'_{22} - \lambda)^{-1}A'_{21}$ плотно задан, то A — максимальный J-диссипативный оператор тогда и только тогда, когда оператор

$$T(\lambda) := M(\lambda) + \overline{\lambda} \tag{2.1}$$

является максимальным в существенном диссипативным в $\{\mathcal{H}^+, [\cdot,\cdot]\}$.

Доказательство. В приводимых ниже рассуждениях мы используем известные результаты о связи классов операторов в пространстве Крейна (см., например, [4, Глава II]). Так как A — J-диссипативный оператор, $\lambda \in \rho(A)$, то его преобразование Кэли–Неймана $U = (A - \overline{\lambda})(A-\lambda)^{-1}$ — J-несжимающий оператор. В самом деле, пусть $f = (A-\lambda)x$ — произвольный вектор из $\mathcal{H}$. Тогда из равенства

$$[Uf, Uf] - [f,f] = 4 \operatorname{Im}\lambda \ \operatorname{Im}[Ax, x] \tag{2.2}$$

следует, что U является J-несжимающим тогда и только тогда, когда A — J-диссипативный оператор. Более того, A — максимальный J-диссипативный оператор тогда и только тогда, когда U — J-бинесжимающий оператор. Пусть

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad -$$

матричное представление J-несжимающего оператора U относительно (1.1). Непосредственно проверяется, что U_{11} — замыкание оператора

$$U'_{11} = (T(\lambda) - \overline{\lambda})(T(\lambda) - \lambda)^{-1} \tag{2.3}$$

и $\|U_{11}x^+\| \geq \|x^+\|$ при всех $x^+ \in \mathcal{H}^+$. Из равенства, аналогичного (2.2), получаем, что $T(\lambda)$ — диссипативный оператор в $\{\mathcal{H}^+, [\cdot,\cdot]\}$. Так как U — J-бинесжимающий оператор в том и только том случае, когда $0 \in \rho(U_{11})$, а это, в свою очередь, эквивалентно плотности области значений оператора $T(\lambda) - \overline{\lambda}$ в $\mathcal{H}^+$, то $T(\lambda)$ — максимальный в существенном диссипативный оператор тогда и только тогда, когда A — максимальный J-диссипативный оператор. □

Первая часть (i) следующей ниже теоремы 2.1 совпадает с основным результатом из [15], однако отличается подходом к доказательству, что позволило сформулировать и доказать также и вторую часть (ii).

Теорема 2.1. *Пусть J-диссипативный оператор $A \in (\mathbf{S_1})$. Тогда:*

(i) *у оператора A существует инвариантное подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} A$ и $\operatorname{Im} \sigma(A|\mathcal{L}) \geq 0$ [15];*

(ii) *если $\mathcal{L}^+$ — неотрицательное инвариантное подпространство оператора A : $\mathcal{L}^+ \subset \operatorname{dom} A$, $A\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^+$, то найдется $\widetilde{\mathcal{L}^+} \in \mathfrak{M}^+$ такое, что $\mathcal{L}^+ \subset \widetilde{\mathcal{L}^+}$, $\widetilde{\mathcal{L}^+} \subset \operatorname{dom} A$ и $A\widetilde{\mathcal{L}^+} \subset \widetilde{\mathcal{L}^+}$, т.е. каждое неотрицательное инвариантное относительно A подпространство допускает расширение до максимального с тем же свойством.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 2.1 оператор A является максимальным J-диссипативным. Следовательно, его преобразование Кэли–Неймана $U = (A - \overline{\lambda})(A - \lambda)^{-1}$ — J-бинесжимающий оператор. Условие (c) определения класса ($\mathbf{S_1}$) влечет компактность оператора $U_{12} = (U_{11} - I)\overline{A_{12}\prime(A'_{22} - \lambda)^{-1}}$. Следовательно [5], [4, Теорема 3.2.8], оператор U имеет инвариантное подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ такое, что $|\sigma(U|\mathcal{L})| \geq 1$. Для доказательства (i) достаточно проверить, что $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A и поскольку тогда $A|\mathcal{L}$ — обратное преобразование Кэли–Неймана оператора $U|\mathcal{L}$, то останется воспользоваться связью спектров оператора и его преобразования Кэли–Неймана.

Итак, докажем, что $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A. Пусть K — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}$. Тогда операторы $U|\mathcal{L}$ и $U_{11} + U_{12}K$ подобны:

$$U|\mathcal{L} = (P^+|\mathcal{L})^{-1}(U_{11} + U_{12}K)(P^+|\mathcal{L}).$$

Так как $1 \notin \sigma_p(U)$, то $1 \notin \sigma_p(U|\mathcal{L})$, а потому $1 \notin \sigma_p(U_{11} + U_{12}K)$. Поскольку в силу условия (d) класса $(\mathbf{S_1})$ оператор $M(\lambda)$ ограничен и плотно задан, то из (2.1) и (2.3) следует, что $1 \in \rho(U_{11})$. Из компактности $U_{12}K$ заключаем тогда, что $1 \in \rho(U_{11} + U_{12}K)$. Последнее эквивалентно условию $1 \in \rho(U|\mathcal{L})$, т.е. $(U - I)\mathcal{L} = \mathcal{L}$. Отсюда следует, что $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} A = \operatorname{ran}(U - I)$ и потому $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A.

Перейдем теперь к доказательству (ii). Для этого сперва проверим, что в $\operatorname{dom} A$ существует равномерно положительное подпространство $\mathcal{H}_1^+ \in \mathfrak{M}^+$. Для этого рассмотрим операторы $A_\varepsilon = A + i\varepsilon J$. Эти операторы J-диссипативные, $\operatorname{dom} A_\varepsilon = \operatorname{dom} A$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ вместе с A принадлежат классу $(\mathbf{S_1})$. Более того,

$$\operatorname{Im}[A_\varepsilon x, x] \geq \varepsilon \|x\|^2. \tag{2.4}$$

Согласно части (i) оператор A_ε имеет инвариантное подпространство $\mathcal{L}_\varepsilon \in \mathfrak{M}^+$, причем $\mathcal{L}_\varepsilon \in \operatorname{dom} A_\varepsilon = \operatorname{dom} A$ и $\operatorname{Im} \sigma(A_\varepsilon|\mathcal{L}_\varepsilon) \geq 0$. Пусть G_ε — оператор Грама подпространства $\mathcal{L}_\varepsilon$. Проверим, что $0 \in \rho(G_\varepsilon)$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы нормированная последовательность векторов $x_n \in \mathcal{L}_\varepsilon$, $\|x_n\| = 1$, такая, что $G_\varepsilon x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда и $\operatorname{Im}[A_\varepsilon x_n, x_n] \to 0$, что невозможно в силу (2.4). Таким образом, $0 \in \rho(G_\varepsilon)$, что равносильно равномерной положительности $\mathcal{L}_\varepsilon$. Остается положить $\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{L}_\varepsilon$. Без ограничения общности можно считать $\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}^+$, т.е. $\mathcal{H}^+ \subset \operatorname{dom} A$ и по определению $A \in (\mathbf{L})$.

Для оператора $A \in (\mathbf{L})$ согласно [4, Теорема 3.1.13] существует такая точка $\lambda \in \mathbb{C}^+$, что неотрицательные инвариантные подпространства оператора A и его преобразования Кэли–Неймана U совпадают, причем λ можно выбрать с достаточно большой мнимой частью. Выберем λ таким, что $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(A|\mathcal{L}^+)$, что возможно поскольку по условию $\mathcal{L}^+ \subset \operatorname{dom} A$ и потому $A|\mathcal{L}^+$ — ограниченный оператор. Следовательно, $\mathcal{L}^+$ — инвариантное подпространство преобразования

Кэли–Неймана U оператора A и, более того, $U\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$. Воспользуемся [4, Теорема 3.3.9] и получим существование такого подпространства $\widetilde{\mathcal{L}^+} \in \mathfrak{M}^+$, что $U\widetilde{\mathcal{L}^+} = \widetilde{\mathcal{L}^+}$ и $\mathcal{L}^+ \subset \widetilde{\mathcal{L}^+}$. В силу выбора λ согласно [4, Теорема 3.1.13] подпространство $\widetilde{\mathcal{L}^+}$ — искомое максимальное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно A, являющееся расширением заданного неотрицательного инвариантного подпространство $\mathcal{L}^+$. □

3. Инвариантные подпространств полугруппы класса C_0

Пусть $U(t)$, $t \in [0;\infty)$, — однопараметрическая полугруппа класса C_0, состоящая из J-бинесжимающих операторов. Пусть $B = -iA$ — генератор этой полугруппы:

$$Bx = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}. \tag{3.1}$$

Напомним, что B является замкнутым оператором, определенным на тех векторах $x \in \mathcal{H}$, для которых существует предел в правой части равенства (3.1) Поскольку функции $[U(t)x, U(t)x]$ и $[U(t)^*x, U(t)^*x]$ неубывающие при каждом $x \in \mathcal{H}$, то A — максимальный J-диссипативный оператор. В самом деле, это доказывается стандартным приемом, а именно дифференцированием функций $[U(t)x, U(t)x]$ и $[U(t)^*x, U(t)^*x]$ по t с учетом того, что производная неубывающей функции неотрицательна:

$$\begin{aligned} [U(t)x, U(t)x]' &= 2\,\mathrm{Re}[U'(t)x, U(t)x] \\ &= 2\,\mathrm{Re}(-i[AU(t)x, U(t)x]) = 2\,\mathrm{Im}[AU(t)x, U(t)] \geq 0, \end{aligned}$$

в частности, при $t \to 0$ имеем $\mathrm{Im}[Ax, x] \geq 0$. Аналогично, $\mathrm{Im}[-A^*x, x] \geq 0$. Для завершения доказательства воспользуемся связью между J-диссипативными и диссипативными операторами, предложением 1.2 и тем, что (см., например, [9, Теорема I.4.4]) замкнутый диссипативный оператор по Филлипсу является максимальным тогда и только тогда, когда сопряженный оператор также является диссипативным.

Следует отметить, что в отличие от гильбертова случая, не каждый максимальный J-диссипативный оператор порождает полугруппу класса C_0, а также существуют не максимальные J-диссипативные операторы, порождающие полугруппы класса C_0.

Пример 3.1. Пусть $A_\pm : \mathcal{H}^\pm \to \mathcal{H}^\pm$ — максимальные симметрические операторы с $\rho(A) = \mathbb{C}^-$. Тогда оператор

$$A = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

является J-диссипативным, но не максимальным, поскольку $-A_-$ не является максимальным диссипативным в $\mathcal{H}^-$. Тем не менее оператор A порождает C_0-полугруппу с генератором $B = -iA$. С другой стороны, рассмотрим максимальный J-диссипативный оператор

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_- \end{bmatrix},$$

где $-\widetilde{A}_-$ — максимальный диссипативный в $\mathcal{H}^-$ оператор, являющийся расширением диссипативного оператора $-A_-$. Оператор $\widetilde{A}$ не порождает C_0-полугруппу, поскольку, например, у него нет регулярных точек.

Следующие ниже теоремы устанавливают связь между инвариантными подпространствами полугруппы, ее генератора и когенератора.

Теорема 3.1. *Пусть $U(t)$ — C_0-полугруппа, $\|U(t)\| \leq M \exp(\omega t)$, $M > 0$, $\omega \geq 0$, $-iA$ — генератор $U(t)$, а $V = (A+\omega+I)(A-\omega-I)^{-1}$ — когенератор для $U(t)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно $U(t)$ при каждом t.*

(ii) *Подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A и $\omega + 1 \in \rho(A|_{\mathcal{L}})$.*

(iii) *Подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно V.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) немедленно следует из того, что $U(t)|_{\mathcal{L}}$ — C_0-полугруппа, $\|U(t)|_{\mathcal{L}}\| \leq \|U(t)\| \leq M \exp(\omega t)$ и ее генератор совпадает с $A|_{\mathcal{L}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из того, что $\omega + 1 \in \rho(A|_{\mathcal{L}})$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно оператора $(A - \omega - 1)^{-1}$. Пусть

$$\rho_\omega(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}.$$

Так как все $\lambda \in \rho_\omega(A)$ являются регулярными точками для A и $\omega+1 \in$

$\rho_\omega(A)$, то $\mathcal{L}$ инвариантно относительно всех операторов $(A-\lambda)^{-1}$ при $\lambda \in \rho_\omega(A)$. Заметим, что A является сильным пределом операторов $A_n := -\lambda_n - \lambda_n^2(A-\lambda_n)^{-1}$ при вещественных $\lambda_n \to +\infty$, $A_n\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, следовательно, $\operatorname{dom} A|_{\mathcal{L}} = \operatorname{dom} A \cap \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A. Из инвариантности $\mathcal{L}$ относительно V имеем $\omega + 1 \in \rho(A|_{\mathcal{L}})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Так как $\rho_\omega(A)$ состоит их точек регулярного типа оператора $A|_{\mathcal{L}}$ и $\omega+1 \in \rho(A|_{\mathcal{L}})$, то $\rho_\omega(A) \subset \rho(A|_{\mathcal{L}})$. Таким образом, $\mathcal{L}$ инвариантно относительно операторов $(A-\lambda)^{-1}$ при $\lambda > \omega$. Поскольку при $x \in \operatorname{dom} A$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$U(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(\lambda t)(A-\lambda)^{-1}x\,d\lambda,$$

то $x \in \operatorname{dom} A|_{\mathcal{L}}$ влечет $U(t)x \in \mathcal{L}$. Из непрерывности операторов $U(t)$ следует $U(t)\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. $\square$

Замечание 3.1. Если выполнены условия теоремы 3.1 и подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно V, то операторы $-iA|_{\mathcal{L}}$ и $V|_{\mathcal{L}}$ являются генератором и когенератором C_0-полугруппы $U(t)|_{\mathcal{L}}$, соответственно.

Скажем, что оператор A принадлежит *классу* $\mathbf{H}$, если у него есть хотя бы одна пара $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ инвариантных подпространств и каждые такие подпространства принадлежат $\mathbf{h}^\pm$ соответственно. Будем говорить, что оператор A принадлежит *классу* $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой J-бинесжимающий оператор $B \in \mathbf{H}$, что резольвенты операторов A и B коммутируют ($BA \subseteq AB$).

Аналогичным образом определяется принадлежность классам $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ C_0-полугруппы $U(t)$.

В работе [6] было доказано утверждение:

Лемма 3.1. *Пусть A — максимальный J-диссипативный оператор и $C_+^a = \{\lambda \mid \operatorname{Im}\lambda > a\} \subset \rho(A)$. Тогда для $\lambda \in C_+^a$:*

$$A \in \mathbf{H} \quad \Longleftrightarrow \quad U = (A-\overline{\lambda})(A-\lambda)^{-1} \in \mathbf{H}.$$

И более того, инвариантные подпространства операторов A и U совпадают.

Теорема 3.2. *Пусть $U(t)$ — C_0-полугруппа J-бинесжимающих операторов, $-iA$ — производящий оператор этой полугруппы. Тогда справедливы следующие импликации:*

(i) $U(t) \in \mathbf{H} \Longleftrightarrow A \in \mathbf{H}$;

(ii) $U(t) \in \mathbf{K}(\mathbf{H}) \Longleftrightarrow A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Доказательство. (i) Пусть $U(t) \in \mathbf{H}$. Согласно определению существуют подпространства $\mathcal{L}_\pm$ такие, что $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathbf{h}^\pm$ и $U(t)\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$ для каждого $t \in (0;\infty)$. Тогда для любого элемента $x \in \mathcal{L}_\pm$ имеем:

$$(A-\lambda I)^{-1}x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt \in \mathcal{L}_\pm.$$

Это эквивалентно тому, что $U\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, т.е. $U \in \mathbf{H}$. Следовательно, согласно лемме 3.1 имеем $A \in \mathbf{H}$.

Если же $A \in \mathbf{H}$, т.е. можно указать подпространства $\mathcal{M}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathbf{h}^\pm$, удовлетворяющие условию $A(\mathcal{M}_\pm \cap \operatorname{dom} A) \subset \mathcal{M}_\pm$, то для любого $x \in \mathcal{M}_\pm$ и $U(t)$ выполнено равенство

$$U(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}x\,d\lambda \in \mathcal{M}_\pm.$$

Таким образом, $U(t)\mathcal{M}_\pm \subset \mathcal{M}_\pm$ и на основании леммы 3.1 имеем $U(t) \in \mathbf{H}$.

(ii) Пусть $U(t) \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$. Это означает, что найдется оператор V из класса $\mathbf{H}$, коммутирующий с $U(t)$ для каждого $t \in (0;\infty)$. Поскольку $Ax = \lim_{t\to t_0}\frac{U(t)-I}{it}x$ ($x \in \operatorname{dom} A$), то оператор A будет также коммутировать с V:

$$VAx = \lim_{t\to 0} V\frac{U(t)-I}{it}x = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)-I}{it}Vx = AVx,$$

следовательно, $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Предположим, что $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$. Тогда существует оператор $V \in \mathbf{H}$ такой, что $VA \subseteq AV$. Последнее условие эквивалентно равенству: $(A-\lambda)^{-1}V = V(A-\lambda)^{-1}$ при $\lambda \in \rho(A)$.

Отсюда для любого оператора $U(t)$ имеет место соотношение:

$$U(t)Vx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}x\,d\lambda V$$
$$= V\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}x\,d\lambda = VU(t)x.$$

Теорема доказана полностью. □

Приведем *примеры* операторов класса $\mathbf{H}$. Для этого рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x} + iB\dot{x} - Cx = 0, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \end{cases} \tag{3.3}$$

для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$. Здесь C — положительный непрерывный оператор, а $-B$ — диссипативный оператор.

Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:

а) *C — вполне непрерывный оператор, а точка $\lambda = 0$ — либо регулярная точка оператора $-B$, либо это изолированная точка спектра, являющаяся конечнократным собственным значением, т.е. нормальной точкой диссипативного оператора* [4, *определение* 2.1.4].

б) *$B = D + F$, где D^{-1} и $\overline{D^{-1}F}$ — вполне непрерывные операторы.*

Рассмотрим элемент $x = C^{-1/2}z$, тогда $\dot{x} = C^{-1/2}\dot{z}$. Полагая $y = -iC^{-1/2}\dot{z}$, запишем задачу в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{1/2}x_0 \\ -i\dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$W = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & B \end{pmatrix}, \quad W(0) = W_0,$$

где

$$W_0 = \begin{pmatrix} C^{1/2}x_0 \\ -i\dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда (3.3) примет вид:

$$\dot{W} = iAW, \qquad W(0) = W_0. \tag{3.4}$$

Заметим, что оператор A является J-диссипативным в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_\pm = \mathcal{G}$, $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

Покажем, что каждое из условий а) и б) влечет принадлежность оператора A классу $\mathbf{H}$. Пусть, например, выполнено а). Тогда в силу выполненного условия $\mathcal{H}_+ \subset \operatorname{dom} A$ у оператора A существует инвариантное неположительное подпространство $\mathcal{L} = \{x + Kx\}_{x \in P^+\mathcal{L}}$, где K — угловой оператор для $\mathcal{L}$. Условие инвариантности $A\mathcal{L} \subset$

$\mathcal{L}$ эквивалентно тому, что для каждого $x \in \mathcal{H}^+$ найдется $y \in \mathcal{H}^+$, являющийся решением уравнения $A(x + Kx) = y + Ky$, т.е.:

$$\begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ Ky \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу следует равенство:

$$-C^{1/2} + BK - KC^{1/2}K = 0. \tag{3.5}$$

Поскольку $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора B, то умножая последнее равенство на B^{-1}, будем иметь:

$$-B^{-1}C^{1/2} + K - B^{-1}KC^{1/2}K = 0$$

или

$$K = B^{-1}C^{1/2} + B^{-1}KC^{1/2}K.$$

В силу компактности операторов, стоящих в правой части, делаем вывод о компактности оператора слева, т.е. оператора K. Остается воспользоваться результатами упражнения 18 [1, с. 84] и получить, что $\mathcal{L} \in \mathbf{h}^+$. Таким образом, заключаем, что $A \in \mathbf{H}$.

Если же выполнено условие б), то подставляя в (3.4) вместо оператора B сумму $D + F$ и умножая затем на D^{-1}, снова будем иметь компактность оператора K. Следовательно, оператор $-iA$ является производящим для полугруппы $\{\exp(-itA)\}_{t=0}^{\infty} \in \mathbf{H}$ и решение задачи (3.4) представляется в виде $W(t) = \exp(-itA)W_0$. А потому, решение исходной задачи Коши (3.3) имеет вид $x(t) = C^{-1/2}PW(t)$, где P — проектор на $\mathcal{G} \oplus 0$.

Из теорем 3.1 и 3.2 сразу получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Если $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, то у полугруппы $U(t)$ класса C_0 J-бинесжимающих операторов существует максимальное неотрицательное подпространство класса $\mathbf{h}^+$ и максимальное неположительное подпространство класса $\mathbf{h}^-$.*

Более того, если $\mathcal{L}^{\pm} \in \mathbf{h}^{\pm}$ — инвариантные подпространства оператора A, то существуют подпространства $\widetilde{\mathcal{L}^{\pm}} \in \mathbf{h}^{\pm} \cap \mathfrak{M}^{\pm}$, $\mathcal{L}^{\pm} \subset \widetilde{\mathcal{L}^{\pm}}$ инвариантные относительно $U(t)$.

Литература

[1] Т. Я. Азизов, *Инвариантные подпространства и критерии полноты корневых векторов J-диссипативных операторов в пространстве Понтрягина Π_κ* // ДАН СССР, **200** (1971), N 5, 1015–1017.

[2] Т. Я. Азизов, Е. И. Иохвидов, *Об инвариантных подпространствах максимальных J-диссипативных операторов* // Матем. заметки, **12** (1972), N 6, 747–754.

[3] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой*, Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Математический анализ, т. 17, М.: Наука, 1979.

[4] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, М.: Наука, 1986.

[5] Т. Я. Азизов, С. А. Хорошавин, *Об инвариантных подпространствах операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой* // Функц. анализ и его прилож., **14** (1980), N 4, 1–7.

[6] И. В. Гриднева, *Однопараметрические полугруппы классов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}(\mathcal{H})$* // Вестник Воронежского государственного университета, **2** (2004), 143–147.

[7] H. Langer, *Eine Veralgemeinerung eines Satz von L. S. Pontrjagin* // Math. Ann., **152** (1963), N 5, 434–436.

[8] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *О дефектных пространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$* // Функц. анализ и его прил., **5** (1971), N 2, 59–71; **5** (1971), N 3, 54–69.

[9] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, М.: Наука, 1967.

[10] Л. С. Понтрягин, *Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой* // Известия АН СССР, сер. матем., **8** (1944), 243–280.

[11] Л. С. Соболев, *Движение симметрического волчка с полостью, заполненной жидкостью* // Журнал матем. и техн. физики, **3** (1960), 20–55.

[12] А. А. Шкаликов, *О существовании инвариантных подпространств у диссипативных операторов в пространстве с индефинитной метрикой* // Фундаментальная и прикладная математика, **5** (1999), N 2, 627–635.

[13] A. A. Shkalikov, *On invariant subspaces of dissipative operators in a space with indefinite metrix*, arXiv.math/0412116v1 [math.FA] 6 Dec 2004.

[14] A. A. Shkalikov, *On the invariant subspace problem for dissipative operators in Krein spaces*, arXiv.math/0512465v2 [math.FA] 22 Dec 2005.

[15] А. А. Шкаликов, *Инвариантные подпространства диссипативных операторов в пространстве с индефинитной метрикой* // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова, **248** (2005), 294–303.

[16] А. А. Шкаликов, *Диссипативные операторы в пространстве Крейна. Инвариантные подпространства и свойства сужений*, arXiv.math/0701410v1 [math.SP] 15 Jan 2007.

[17] А. А. Шкаликов, *Диссипативные операторы в пространстве Крейна. Инвариантные подпространства и свойства сужений* // Функц. анализ и его прил., 2007, **41** (2007), N 2, 93–110.

Сведения об авторах

Томас Яковлевич Азизов
Математический факультет
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1
Воронеж, 394006
Россия
E-Mail: azizov@math.vsu.ru

Ирина Владимировна Гриднева
Агроинженерный факультет
Воронежский государственный аграрный университет им. К. Д. Глинки
ул. Мичурина, 1
Воронеж, 394087
Россия
E-Mail: gridneva_irina@bk.ru