Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 4, 488 – 506

Об устойчивости решений систем разностных уравнений в одном критическом случае

Александр О. Игнатьев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассматривается система нелинейных разностных уравнений, допускающая нулевое решение. С помощью метода функций Ляпунова изучается его устойчивость. Наряду с полной системой уравнений рассматривается линеаризованная система разностных уравнений. Известно, что если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы по модулю меньше единицы, то нулевое решение полной системы асимптотически устойчиво. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения по модулю больше единицы, то нулевое решение полной системы неустойчиво. В случае, когда часть корней характеристического уравнения по модулю меньше единицы, а часть равна единице, задача устойчивости не решается рассмотрением лишь линейных членов, и для ее решения нужно привлечь нелинейные слагаемые. Такой случай называется критическим. В настоящей работе рассмотрен критический случай одного корня, равного единице, когда задача устойчивости решается членами до третьего порядка малости в разложении правых частей исходных уравнений в ряды Маклорена.

2000 MSC. 39A11.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальные уравнения, функция Ляпунова, устойчивость.

1. Введение и основные определения

Разностные уравнения широко используются в математике, так как они, с одной стороны могут являться естественной математической моделью для описания дискретных процессов (например, в комбинаторике), а с другой стороны, они являются дискретным приближением непрерывных систем. Так, например, в работах [1–5] разностные уравнения используются в качестве моделей динамики популяций, а в [6] разностные уравнения применяются для моделирования в генетике. В статье [7] динамика экологической системы также

Статья поступила в редакцию 25.07.2008

ISSN 1810 – 3200.

описывается системой разностных уравнений. В работе [8] предложен способ построения разностных схем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот способ обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения (заметим, что так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, в случае разностных уравнений задача устойчивости произвольного решения сводится к задаче устойчивости нулевого решения).

При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят “мгновенный” характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К первым работам в этом направлении следует отнести [9,10]. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием явилась монография [11], в которой изложены основы этой теории. В последние годы заметно увеличилось число математических работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [12–18], что вызвано запросами новейшей техники. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием представляют собой совокупность обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, что также подтверждает важность изучения качественных свойств разностных уравнений. Одним из таких свойств является свойство устойчивости решений. Этому и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим систему разностных уравнений вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad f(n, 0) = 0, \tag{1.1}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ — дискретное время, $x(n) = (x_1(n), \ldots, x_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \ldots, f_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Система (1.1) допускает тривиальное решение

$$x(n) = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим $x(n, n_0, x^0)$ — решение системы (1.1), совпадающее с $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)^T$ при $n = n_0$. Мы также будем обозначать $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}_{n_0}$ — множество неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих неравенству $n \geq n_0$, $B_r = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq r\}$.

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями введем следующие определения.

Определение 1.1. *Тривиальное решение системы* (1.1) *называется устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ *такое, что если* $\|x^0\| < \delta$, *то* $\|x(n, n_0, x^0)\| < \varepsilon$ *при* $n > n_0$. *В противном случае нулевое решение уравнений* (1.1) *называется неустойчивым. Если в этом определении* δ *можно выбрать не зависящим от* n_0 (*т.е.* $\delta = \delta(\varepsilon)$), *то тривиальное решение системы* (1.1) *называется равномерно устойчивым.*

Определение 1.2. *Решение* (1.2) *системы* (1.1) *называется притягивающим, если для любого* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *существует* $\eta = \eta(n_0) > 0$, *и для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x^0 \in B_\eta$ *существует* $\sigma = \sigma(\varepsilon, n_0, x^0) > 0$, *такое, что* $\|x(n, n_0, x^0)\| < \varepsilon$ *для всех* $n \geq n_0 + \sigma$.

Другими словами, решение (1.2) системы (1.1) называется притягивающим, если

$$\lim_{n\to\infty} \|x(n, n_0, x^0)\| = 0. \tag{1.3}$$

Определение 1.3. *Тривиальное решение системы* (1.1) *называется равномерно притягивающим, если для некоторого* $\eta > 0$, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\sigma = \sigma(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *такое, что* $\|x(n, n_0, x^0)\| < \varepsilon$ *для всех* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $x^0 \in B_\eta$, $n \in \mathbb{N}_{n_0+\sigma}$.

Другими словами, решение (1.2) системы (1.1) называется равномерно притягивающим, если предельное соотношение (1.3) выполняется равномерно по $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $x^0 \in B_\eta$.

Определение 1.4. *Тривиальное решение системы* (1.1) *называется:*

- *асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее;*
- *равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Определение 1.5. *Тривиальное решение системы* (1.1) *называется экспоненциально устойчивым, если существуют такие* $M > 0$ *и* $\eta \in (0, 1)$, *что* $\|x(n, n_0, x^0)\| < M\|x^0\|\eta^{n-n_0}$ *при* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Изучению устойчивости решения (1.2) системы (1.1) посвящено большое количество работ. В монографиях [19–26] изложена общая теория разностных систем и изложены основы теории устойчивости таких систем. В работе [27] показано, что если система (1.1) автономна (т.е. f не зависит явно от n) или периодична (т.е. существует $\omega \in \mathbb{N}$ такое, что $f(n, x) \equiv f(n + \omega, x)$), то из устойчивости решения (1.2) следует его равномерная устойчивость, а из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость. В работе [28] изучена асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. Статьи [29–33] посвящены исследованию устойчивости решений периодических и почти периодических разностных систем.

Сформулируем основные теоремы прямого метода Ляпунова об устойчивости нулевого решения системы автономных разностных уравнений

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{1.4}$$

Эти формулировки приведены в [19, Theorems 4.20 and 4.27] и связаны с существованием вспомогательной функции $V(x)$, причем аналогом производной является приращение ΔV функции V в силу системы (1.4), вычисляемое по формуле $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$.

Теорема А. *Если для системы* (1.4) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *такая, что* ΔV *есть функция знакопостоянная, знака, противоположного знаку* V *или тождественно обращается в нуль, то нулевое решение системы* (1.4) *устойчиво.*

Теорема Б. *Если для системы* (1.4) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *такая, что* $\Delta V(x)$ *есть функция знакоопределенная, знака, противоположного* V, *то нулевое решение системы* (1.4) *устойчиво асимптотически.*

Теорема В. *Если для системы* (1.4) *существует функция* $V(x)$, *такая, что* $\Delta V(x)$ *есть функция знакоопределенная, а сама функция* $V(x)$ *не будет знакопостоянной, знака, противоположного с* $\Delta V(x)$, *то решение* (1.2) *системы* (1.4) *неустойчиво.*

Рассмотрим автономную систему

$$x(n+1) = Ax(n) + X(x(n)), \tag{1.5}$$

где A — матрица $k \times k$, а X — функция, имеющая порядок малости относительно x, больший единицы, т.е.

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|} = 0. \tag{1.6}$$

Следуя [19, c. 175], обозначим $\rho(A) = \max_{1 \le i \le k} |\lambda_i|$, где λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ — корни характеристического многочлена

$$\det(A - \lambda I_k) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь и далее I_k — единичная матрица порядка $k \times k$. В [20, Corollary 5.6.3 and Theorem 5.6.4] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если $\rho(A) < 1$, то нулевое решение системы* (1.5) *асимптотически устойчиво* (*более того, в этом случае имеет место экспоненциальная устойчивость*). *Если характеристическое уравнение* (1.7), *не имея корней, модули которых больше единицы, имеет корни, модули которых равны единице, то функцию $X(x)$ в системе* (1.5) *можно подобрать так, что нулевое решение системы* (1.5) *будет асимптотически устойчивым, устойчивым или неустойчивым в зависимости от выбора функции $X(x)$.*

Таким образом, из теоремы 1.1 следует, что при исследовании устойчивости нулевого решения системы (1.5) может оказаться, что задача устойчивости полностью решается системой первого приближения

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{1.8}$$

(когда $\rho(A) < 1$ или $\rho(A) > 1$). В случае же $\rho(A) = 1$ имеем критический случай, когда для решения задачи устойчивости нужно привлекать члены более высокого порядка малости.

В книге [19] для исследования устойчивости нулевого решения системы (1.5) предложено использовать функции Ляпунова в виде квадратичных форм вида

$$V(x) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=2,\\ i_j\geq 0\ (j=1,\ldots,k)}} b_{i_1,i_2,\ldots,i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}, \tag{1.9}$$

где $b_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ — константы. Было приведено без доказательства следующее утверждение [19, Corollary 4.31].

Утверждение 1.1. *Если $\rho(A) > 1$, то существуют квадратичная форма $V(x)$, не являющаяся неотрицательной, и отрицательно-определенная форма $W(x)$, такие, что*

$$W(x) = V(Ax) - V(x).$$

В настоящей статье мы покажем, что утверждение 1.1 неверно, и с помощью второго метода Ляпунова изучим задачу об устойчивости в критическом случае одного корня характеристического уравнения, равного единице. Покажем вначале, что утверждение 1.1 неверно. Для этого рассмотрим систему

$$x(n+1) = Ax(n),$$

где $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Числа 1 и 2 являются корнями его характеристического уравнения, $\rho(A) = 2 > 1$, но для любой квадратичной формы

$$V(x) = b_{2,0}x_1^2 + b_{1,1}x_1x_2 + b_{0,2}x_2^2$$

имеем
$$W(x) = V(Ax) - V(x) = b_{1,1}x_1x_2 + 3b_{0,2}x_2^2. \tag{1.10}$$
Квадратичная форма (1.10) не может являться ни определенно-положительной, ни определенно-отрицательной. Приведенный пример показывает, что утверждение 1.1 неверно.

2. Критический случай одного, равного единице, корня характеристического уравнения

В настоящем параграфе рассмотрим критический случай одного корня характеристического уравнения (1.7), равного единице, то есть будем предполагать,что уравнение (1.7) имеет один корень $\lambda_1 = 1$, при этом остальные корни удовлетворяют условиям $|\lambda_i| < 1$ ($i = 2, 3, \ldots, k$). Функцию $X = (X_1, \ldots, X_k)^T$ считаем голоморфной, разложение которой в ряд Маклорена начинается с членов второго порядка малости. То есть система (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} x_j(n+1) &= a_{j1}x_1(n) + a_{j2}x_2(n) + \cdots + a_{jk}x_k(n) \\ &\quad + X_j(x_1(n), \ldots, x_k(n)) \quad (j = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем рассматривать критический случай, когда характеристическое уравнение системы первого приближения

$$x_j(n+1) = a_{j1}x_1(n) + a_{j2}x_2(n) + \cdots + a_{jk}x_k(n) \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

имеет один корень, равный единице, при остальных $k-1$ корнях, модули которых меньше единицы.

Введем в уравнениях (2.2) вместо одной из переменных x_j переменную y при помощи подстановки

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k, \tag{2.3}$$

где β_j ($j = 1, \ldots, k$) — некоторые постоянные, которые мы выбираем так, что
$$y(n+1) = y(n). \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \beta_1 x_1(n+1) + \beta_2 x_2(n+1) + \cdots + \beta_k x_k(n+1) \\ &= \beta_1[a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n)] \\ &\quad + \beta_2[a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n)] + \cdots \\ &\quad + \beta_k[a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n)] \end{aligned}$$

$$= \beta_1 x_1(n) + \beta_2 x_2(n) + \dots + \beta_k x_k(n).$$

Приравнивая коэффициенты при $x_j(n)$ $(j = 1, 2, \dots, k)$, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно β_j $(j = 1, \dots, k)$:

$$a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \dots + a_{kj}\beta_k = \beta_j, \tag{2.5}$$

или в матричной форме

$$(A^T - I_k)\beta = 0,$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$. Так как уравнение $\det(A^T - \lambda I_k) = 0$ имеет корень $\lambda = 1$, то определитель системы (2.5) обращается в нуль, и, следовательно, эта система имеет решение, в котором не все постоянные $\beta_1, \dots, \beta_k$ равны нулю. Предположим для определенности, что $\beta_k \neq 0$. Тогда мы можем принять переменную y вместо переменной x_k. Остальные переменные x_j $(j = 1, \dots, k-1)$ сохраним прежние. Теперь, обозначая

$$c_{ji} = a_{ji} - \frac{\beta_i}{\beta_k} a_{jk}, \qquad c_j = \frac{a_{jk}}{\beta_k} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k-1),$$

приводим уравнения (2.2) к виду

$$x_j(n+1) = c_{j1}x_1(n) + c_{j2}x_2(n) + \dots + c_{j,k-1}x_{k-1}(n) + c_j y(n)$$
$$(j = 1, \dots, k-1), \tag{2.6}$$
$$y(n+1) = y(n), \tag{2.7}$$

где c_{ji} и c_j — константы.

Характеристическое уравнение системы (2.6) и (2.7) распадается на два:

$$\lambda - 1 = 0$$

и

$$\det(\mathcal{C} - \lambda I_{k-1}) = 0, \tag{2.8}$$

где $\mathcal{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^{k-1}$. Так как характеристическое уравнение инвариантно по отношению к линейным преобразованиям и в рассматриваемом случае имеет $k-1$ корней, модули которых меньше единицы, то уравнение (2.8) имеет $k-1$ корней, и все эти корни по модулю меньше единицы. Обозначим

$$x_j = y_j + l_j y \quad (j = 1, \dots, k-1), \tag{2.9}$$

где l_j $(j = 1, \dots, k-1)$ — константы, которые подберем таким образом, чтобы правые части системы (2.6) не содержали $y(n)$. В этих обозначениях, учитывая (2.7), система (2.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} y_j(n+1) &= c_{j1}y_1(n) + c_{j2}y_2(n) + \dots + c_{j,k-1}y_{k-1}(n) \\ &\quad + [c_{j1}l_1 + c_{j2}l_2 + \dots + (c_{jj}-1)l_j + \dots + c_{j,k-1}l_{k-1} + c_j]y(n) \\ &\qquad (j = 1, \dots, k-1). \end{aligned}$$

В качестве постоянных l_j выберем такие, что

$$c_{j1}l_1 + c_{j2}l_2 + \dots + (c_{jj}-1)l_j + \dots + c_{j,k-1}l_{k-1} = -c_j \quad (j = 1, \dots, k-1). \tag{2.10}$$

Учитывая, что единица не является корнем характеристического уравнения (2.8), определитель системы (2.10) отличен от нуля, и, следовательно, эта система имеет единственное решение $(l_1, \dots, l_{k-1})$. В результате замены (2.9) система (2.6) и (2.7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_j(n+1) &= c_{j1}y_1(n) + c_{j2}y_2(n) + \dots + c_{j,k-1}y_{k-1}(n) \\ &\qquad (j = 1, \dots, k-1), \\ y(n+1) &= y(n), \end{aligned}$$

а нелинейная система (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} y_j(n+1) &= c_{j1}y_1(n) + c_{j2}y_2(n) + \dots + c_{j,k-1}y_{k-1}(n) \\ &\quad + Y_j(y_1(n), \dots, y_{k-1}(n), y(n)) \quad (j = 1, \dots, k-1), \\ y(n+1) &= y(n) + Y(y_1(n), \dots, y_{k-1}(n), y(n)), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где Y_j $(j = 1, \dots, k-1)$ и Y представляют собой голоморфные функции, разложения которых в степенные ряды начинаются с членов второго порядка малости относительно $y_1, \dots, y_{k-1}, y$:

$$\begin{aligned} Y_j(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y) &= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}+i_k=2}^{\infty} v^{(j)}_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_{k-1}^{i_{k-1}} y^{i_k} \\ &\qquad (j = 1, \dots, k-1), \end{aligned}$$

$$Y(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}+i_k=2}^{\infty} v_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_{k-1}^{i_{k-1}} y^{i_k}.$$

В силу (2.9) очевидно, что задача устойчивости нулевого решения системы (2.1) эквивалентна задаче устойчивости нулевого решения системы (2.11). Форма записи (2.11) для системы (2.1) будет базовой для исследования устойчивости нулевого решения в случае, когда задача устойчивости решается членами первого и второго порядков малости.

Теорема 2.1. *Если функция Y такова, что коэффициент $v_{0,0,\ldots,0,2}$ отличен от нуля, то решение*

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \ldots, \quad y_{k-1} = 0, \quad y = 0$$

системы (2.11) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть

$$V_1(y_1, \ldots, y_{k-1}) = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}=2} B_{s_1,s_2,\ldots,s_{k-1}} y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_{k-1}^{s_{k-1}} \quad -$$

квадратичная форма, такая, что

$$V_1(c_{11}y_1 + \cdots + c_{1,k-1}y_{k-1}, \ldots, c_{k-1,1}y_1 + \cdots + c_{k-1,k-1}y_{k-1}) \\ - V_1(y_1, \ldots, y_{k-1}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k-1}^2. \quad (2.12)$$

Так как все собственные числа матрицы $\mathcal{C}$ по модулю меньше единицы, то согласно [19, Theorem 4.30] такая форма единственна и определенно-отрицательна. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(y_1, \ldots, y_{k-1}, y) = V_1(y_1, \ldots, y_{k-1}) + \alpha y, \quad (2.13)$$

где $\alpha = const$. Найдем ΔV:

$$\Delta V\Big|_{(2.11)} \\ = \sum_{s_1+\cdots+s_{k-1}=2} B_{s_1,\ldots,s_{k-1}} \{[c_{11}y_1 + \cdots + c_{1,k-1}y_{k-1} + Y_1(y_1, \ldots, y_{k-1}, y)]^{s_1} \\ \cdots \times [c_{k-1,1}y_1 + \cdots + c_{k-1,k-1}y_{k-1} + Y_{k-1}(y_1, \ldots, y_{k-1}, y)]^{s_{k-1}} \\ - y_1^{s_1} \ldots y_{k-1}^{s_{k-1}}\} + \alpha Y(y_1, \ldots, y_{k-1}, y).$$

Учитывая (2.12), ΔV можно записать в виде

$$\Delta V\Big|_{(2.11)} = W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y) + W_*(y_1, \ldots, y_{k-1}, y),$$

где

$$\begin{aligned} W = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k-1}^2) + \alpha v_{0,0,\ldots,0,2} y^2 \\ + \alpha(v_{2,0,\ldots,0} y_1^2 + v_{1,1,\ldots,0} y_1 y_2 + \cdots + v_{1,0,\ldots,1,0} y_1 y_{k-1} \\ + v_{1,0,\ldots,0,1} y_1 y + v_{0,2,\ldots,0} y_2^2 + \cdots + v_{0,0,\ldots,1,1} y_{k-1} y), \end{aligned}$$

а W_* — голоморфная функция, разложение которой по степеням $y_1, \ldots, y_{k-1}, y$ начинается с членов третьего порядка малости. Знак α выбираем таким, что $\alpha v_{0,\ldots,0,2} > 0$. Покажем, что α можно выбрать настолько малым по модулю, что квадратичная форма W будет определенно-положительной. Для этого покажем, что α можно выбрать таким, что главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha v_{2,0,\ldots,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{1,1,\ldots,0} & \cdots & \frac{1}{2}\alpha v_{1,0,\ldots,1,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{1,0,\ldots,0,1} \\ \frac{1}{2}\alpha v_{1,1,\ldots,0} & 1 + \alpha v_{0,2,\ldots,0} & \cdots & \frac{1}{2}\alpha v_{0,1,\ldots,1,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,1,\ldots,0,1} \\ \frac{1}{2}\alpha v_{1,0,1,\ldots,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,1,1,\ldots,0} & \cdots & \frac{1}{2}\alpha v_{0,0,1,\ldots,1,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,0,1,\ldots,0,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}\alpha v_{1,0,\ldots,1,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,1,\ldots,1,0} & \cdots & 1 + \alpha v_{0,\ldots,0,2,0} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,\ldots,0,1,1} \\ \frac{1}{2}\alpha v_{1,0,\ldots,0,1} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,1,\ldots,0,1} & \cdots & \frac{1}{2}\alpha v_{0,0,\ldots,1,1} & \frac{1}{2}\alpha v_{0,0,\ldots,0,2} \end{pmatrix}$$

будут положительными. Действительно, любой главный минор Δ_s этой матрицы представляет собой непрерывную функцию параметра α: $\Delta_s = \Delta_s(\alpha)$, причем $\Delta_s(0) = 1$ при $s = 1, 2, \ldots, k-1$. Таким образом, существует такое $\alpha_* > 0$, что при $|\alpha| < \alpha_*$ имеем $\Delta_s(\alpha) \geq \frac{1}{2}$ $(s = 1, 2, \ldots, k-1)$. Покажем, что при достаточно малом $|\alpha|$ справедливо неравенство $\Delta_k > 0$. Для этого разложим Δ_k по последней строке. Получим $\Delta_k = \frac{1}{2}\alpha v_{0,0,\ldots,0,2}\Delta_{k-1} + \alpha^2\Delta_*$, где Δ_* представляет собой многочлен относительно α и $v_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ $(i_1 + i_2 + \cdots + i_k = 2,\ i_j \geq 0)$. Следовательно, при достаточно малом $|\alpha|$ имеем $\Delta_k > 0$. То есть при α, достаточно малом по абсолютной величине, знак которого совпадает со знаком $v_{0,0,\ldots,2}$, квадратичная форма W является определенно-положительной, следовательно, в достаточно малой окрестности начала координат сумма $W + W_*$ также является определенно-положительной функцией. В то же время функция V вида (2.13) является знакопеременной. Следовательно, нулевое решение системы (2.11) неустойчиво, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, в случае, когда $v_{0,0,\ldots,2} \neq 0$, задача устойчивости решается независимо от членов, порядок малости которых больше двух. Рассмотрим теперь случай, когда $v_{0,0,\ldots,2} = 0$. Преобразуем систему (2.11) к виду, когда $v^{(j)}_{0,0,\ldots,2} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$. Для этого обозначим

$$y_j = \xi_j + m_j y^2 \qquad (j = 1, 2, \dots, k-1), \tag{2.14}$$

где m_j — константы. В этих обозначениях система (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned}\xi_j(n+1) = c_{j1}\xi_1(n) + c_{j2}\xi_2(n) + \dots + c_{j,k-1}\xi_{k-1}(n)\\ + y^2(n)(c_{j1}m_1 + c_{j2}m_2 + \dots + c_{j,k-1}m_{k-1})\\ + Y_j(\xi_1(n) + m_1y^2(n), \dots, \xi_{k-1}(n) + m_{k-1}y^2(n), y(n))\\ - m_j[y^2(n) + 2y(n)Y(\xi_1(n) + m_1y^2(n), \dots, \xi_{k-1}(n) + m_{k-1}y^2(n), y(n))\\ + Y^2(\xi_1(n) + m_1y^2(n), \dots, \xi_{k-1}(n) + m_{k-1}y^2(n), y(n))],\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$y(n+1) = y(n) + Y(\xi_1(n) + m_1y^2(n), \dots, \xi_{k-1}(n) + m_{k-1}y^2(n), y(n)). \tag{2.16}$$

Выберем постоянные $m_1, \dots, m_{k-1}$ таким образом, чтобы коэффициенты при $y^2(n)$ в правых частях системы (2.15) обратились в нуль. Приравнивая соответствующие коэффициенты к нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $m_1, \dots, m_{k-1}$:

$$c_{j1}m_1 + c_{j2}m_2 + \dots + c_{j,k-1}m_{k-1} = m_j - v^{(j)}_{0,0,\dots,2} \qquad (j = 1, 2, \dots, k-1),$$

которая имеет единственное решение, так как единица не является собственным числом матрицы $\mathcal{C}$. Подставляя найденные значения $m_1, \dots, m_{k-1}$ в (2.15) и (2.16), получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\xi_j(n+1) = c_{j1}\xi_1(n) + c_{j2}\xi_2 + \dots + c_{j,k-1}\xi_{k-1}(n)\\ + \Xi_j(\xi_1(n), \dots, \xi_{k-1}(n), y(n))\\ (j = 1, \dots, k-1),\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$y(n+1) = y(n) + Y_*(\xi_1(n), \dots, \xi_{k-1}(n), y(n)), \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}\Xi_j(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y) = Y_j(\xi_1 + m_1y^2, \dots, \xi_{k-1} + m_{k-1}y^2, y)\\ - 2m_jyY(\xi_1 + m_1y^2, \dots, \xi_{k-1} + m_{k-1}y^2, y)\\ - m_jY^2(\xi_1 + m_1y^2, \dots, \xi_{k-1} + m_{k-1}y^2, y) - v^{(j)}_{0,0,\dots,2}y^2,\end{aligned}$$

$$Y_*(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y) = Y(\xi_1 + m_1y^2, \dots, \xi_{k-1} + m_{k-1}y^2, y).$$

Разложения Ξ_j и Y_* в степенные ряды начинаются с членов второго порядка малости, причем коэффициенты при y^2 в разложениях

Ξ_j равны нулю. Система (2.17) и (2.18) будет базовой в дальнейшем исследовании устойчивости нулевого решения

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \dots, \quad \xi_{k-1} = 0, \quad y = 0. \tag{2.19}$$

Обозначим через $\Xi_j^{(0)}(y)$ $(j = 1, \dots, k-1)$ и $Y_*^{(0)}(y)$ соответственно совокупности всех членов в функциях Ξ_j и Y_*, не содержащие $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, так что

$$\Xi_j^{(0)}(y) = \Xi_j(0, \dots, 0, y) = h_j y^3 + \sum_{s=4}^{\infty} h_j^{(s)} y^s,$$

$$Y_*^{(0)}(y) = Y_*(0, \dots, 0, y) = h y^3 + \sum_{s=4}^{\infty} h^{(s)} y^s,$$

где $h, h_j, h^{(s)}, h_j^{(s)}$ $(j = 1, \dots, k-1;\ s = 4, 5, \dots)$ — постоянные.

Теорема 2.2. *Решение* (2.19) *системы* (2.17) *и* (2.18) *асимптотически устойчиво при* $h < 0$ *и неустойчиво при* $h > 0$.

Доказательство. Покажем, что можно построить функцию Ляпунова V, зависящую от $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y$, такую, что ΔV является функцией определенно-положительной. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\xi_j(n+1) = c_{j1}\xi(n) + c_{j2}\xi_2(n) + \dots + c_{j,k-1}\xi_{k-1}(n) \quad (j = 1, \dots, k-1). \tag{2.20}$$

Пусть $W = \sum_{i_1+\dots+i_{k-1}=2} w_{i_1,\dots,i_{k-1}} \xi_1^{i_1} \dots \xi_{k-1}^{i_{k-1}}$ — квадратичная форма переменных $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, такая, что

$$\Delta W \bigg|_{(2.20)} = \xi_1^2 + \dots + \xi_{k-1}^2. \tag{2.21}$$

Так как все собственные числа матрицы $\mathcal{C}$ лежат внутри единичного круга, форма W, удовлетворяющая (2.21), существует, единственна и определенно-отрицательна [19, Theorem 4.30].

Если бы функции Ξ_j $(j = 1, \dots, k-1)$ не зависели от y, то приращение ΔW функции W, составленное в силу системы (2.17), т.е. выражение

$$\sum_{i_1+\dots+i_{k-1}=2} w_{i_1,\cdots,i_{k-1}} \{[c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \dots + c_{1,k-1}\xi_{k-1} + \Xi_1]^{i_1}$$
$$\times \cdots [c_{k-1,1}\xi_1 + \dots + c_{k-1,k-1}\xi_{k-1} + \Xi_{k-1}]^{i_{k-1}} - \xi_1^{i_1} \cdots \xi_{k-1}^{i_{k-1}}\} \tag{2.22}$$

являлось бы при достаточно малых $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ определенно-положительной функцией переменных $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$.

С другой стороны, если бы функция Y_* не зависела от $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, т.е. если $Y_* = Y_*^{(0)}$, то приращение функции $\frac{1}{2}hy^2$ равнялось бы

$$\Delta\Big(\frac{1}{2}hy^2\Big) = \frac{1}{2}h\Big[2yY_*^{(0)} + Y_*^{(0)2}\Big] = h^2y^4 + hh^{(4)}y^5 + o(y^5), \qquad (2.23)$$

и это приращение являлось бы функцией определенно-положительной относительно y при достаточно малых $|y|$. Поэтому при указанных условиях приращение функции $V_1 = \frac{1}{2}hy^2 + W(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$, составленное в силу полной системы (2.17) и (2.18) было бы определенно-положительной функцией всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y$ в некоторой окрестности начала координат. Учитывая (2.21) и (2.23), это приращение можно было бы представить в виде

$$(h^2 + g_1)y^4 + \xi_1^2 + \dots + \xi_{k-1}^2 + \sum_{i,j=1}^{k-1} g_{ij}^{(1)}\xi_i\xi_j, \qquad (2.24)$$

где g_1 — голоморфная функция переменной y, обращающаяся в нуль при $y = 0$, а $g_{ij}^{(1)}$ — голоморфные функции переменных $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, обращающиеся в нуль при $\xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = 0$.

Но так как функции Ξ_j $(j = 1, \dots, k-1)$ содержат y, а функция Y_* содержит $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, то приращение функции V_1 в силу системы (2.17) и (2.18) не будет определенно-положительным. В нем появятся члены, нарушающие знакоопределенность.

Заметим, что выражение (2.24) останется знакоопределенным, если функция g_1 содержит не только переменную y, но и переменные $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, а функции $g_{ij}^{(1)}$ содержат не только переменные $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, но и переменную y. Важно только, чтобы функции g_1 и $g_{ij}^{(1)}$ обращались в нуль при $\xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = y = 0$. Учитывая это обстоятельство, запишем приращение функции V_1 в силу системы (2.17) и (2.18) в виде

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 = \Delta\Big(\frac{1}{2}hy^2\Big) + \Delta W = hyY_* + \frac{1}{2}hY_*^2 \\
+ \sum_{i_1+\dots+i_{k-1}=2} w_{i_1,\dots,i_{k-1}}\{[c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \dots + c_{1,k-1}\xi_{k-1} + \Xi_1]^{i_1} \\
\dots \times [c_{k-1,1}\xi_1 + \dots + c_{k-1,k-1}\xi_{k-1} + \Xi_{k-1}]^{i_{k-1}} - \xi_1^{i_1} \cdots \xi_{k-1}^{i_{k-1}}\} \\
= [h^2 + g_1(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)]y^4 + \xi_1^2 + \dots + \xi_{k-1}^2 \\
+ \sum_{i,j=1}^{k-1} g_{ij}^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)\xi_i\xi_j + Q(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y), \quad (2.25)
\end{aligned}$$

где функции g_1 и $g_{ij}^{(1)}$ $(i, j = 1, \dots, k-1)$ обращаются в нуль при $\xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = y = 0$, а Q — совокупность всех членов, которые не могут быть включены ни в выражение

$$g_1(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)y^4, \tag{2.26}$$

ни в выражение

$$\sum_{i,j=1}^{k-1} g_{ij}^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)\xi_i\xi_j. \tag{2.27}$$

Все члены, входящие в выражение Q, можно разбить на следующие четыре группы: на члены свободные от $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, на члены линейные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, на члены квадратичные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ и на члены, имеющие порядок малости выше второго относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$. Очевидно, что все члены последней группы можно включить в выражение (2.27); поэтому рассмотрим только первые три группы членов.

Все члены, свободные от $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, содержатся, очевидно, в выражениях (2.23) (где они выписаны явно) и в

$$\sum_{i_1+\dots+i_{k-1}=2} w_{i_1,\dots,i_{k-1}} {\Xi_1^{(0)}}^{i_1} \cdots {\Xi_{k-1}^{(0)}}^{i_{k-1}}$$

(где содержатся слагаемые, начиная с шестого порядка малости по y). Все эти члены могут быть включены в выражение (2.26). Следовательно, функция Q не содержит слагаемых, свободных от $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$.

Члены, линейные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, входят в выражение (2.25) как через совокупность слагаемых из $hyY_* + \frac{1}{2}hY_*^2$, так и из (2.22). Если эти члены имеют относительно y порядок не меньше четвертого, то они могут быть, очевидно, включены в выражение (2.26). Таким образом, в функции Q содержатся лишь те линейные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ члены, которые имеют относительно y порядок 2 и 3.

Рассмотрим, наконец, члены, квадратичные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$. Если эти члены имеют общий порядок выше второго, то они могут быть включены в выражение (2.27), и следовательно, в функцию Q они не входят. Члены же, квадратичные относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ и имеющие второй порядок малости (т.е. обладающие постоянными коэффициентами), содержатся все в выражении

$$\sum_{i_1+\dots+i_{k-1}=2} w_{i_1,\cdots,i_{k-1}} \{[c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \dots + c_{1,k-1}\xi_{k-1}]^{i_1}$$

$$\cdots \times [c_{k-1,1}\xi_1 + \cdots + c_{k-1,k-1}\xi_{k-1}]^{i_{k-1}} - \xi_1^{i_1} \dots \xi_{k-1}^{i_{k-1}}\} \\ = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{k-1}^2,$$

и, следовательно, в функцию Q также не входят.

Таким образом, функция Q имеет вид

$$Q = y^2 Q_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + y^3 Q_3(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}), \tag{2.28}$$

где Q_2 и Q_3 — линейные формы относительно $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$:

$$Q_2 = q_1^{(2)}\xi_1 + q_2^{(2)}\xi_2 + \cdots + q_{k-1}^{(2)}\xi_{k-1},$$
$$Q_3 = q_1^{(3)}\xi_1 + q_2^{(3)}\xi_2 + \cdots + q_{k-1}^{(3)}\xi_{k-1}.$$

Наличие в (2.25) слагаемого (2.28) нарушает знакоопределенность ΔV_1. Для того, чтобы избавиться от слагаемого $y^2 Q_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$, добавим к функции V_1 слагаемое $y^2 P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = y^2(p_1^{(2)}\xi_1 + p_2^{(2)}\xi_2 + \cdots + p_{k-1}^{(2)}\xi_{k-1})$, где $p_j^{(2)}$ $(j = 1, \dots, k-1)$ — постоянные. Другими словами, рассмотрим вместо функции V_1 функцию

$$V_2 = \frac{1}{2}hy^2 + W(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + y^2 P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}). \tag{2.29}$$

Член $y^2 P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ внесет в выражение для ΔV_2 следующие слагаемые:

$$\Delta(y^2 P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})) \\ = [y^2 + 2yY_*(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y) + Y_*^2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)] \\ \times \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(2)}[c_{j,1}\xi_1 + c_{j,2}\xi_2 + \cdots + c_{j,k-1}\xi_{k-1} + \Xi_j(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)] \\ - y^2[p_1^{(2)}\xi_1 + p_2^{(2)}\xi_2 + \cdots + p_{k-1}^{(2)}\xi_{k-1}] \\ = y^2\left[\sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(2)}(c_{j1}\xi_1 + c_{j2}\xi_2 + \cdots + c_{j,k-1}\xi_{k-1} - \xi_j)\right] \\ + G(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y),$$

где функция G представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых может быть включено либо в выражение (2.26), либо в выражение (2.27). Подберем постоянные $p_1^{(2)}, \dots, p_{k-1}^{(2)}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(2)}(c_{j1}\xi_1 + c_{j2}\xi_2 + \cdots + c_{j,k-1}\xi_{k-1} - \xi_j) = -\sum_{j=1}^{k-1} q_j^{(2)}\xi_j. \tag{2.30}$$

Для этого приравняем коэффициенты при ξ_j $(j = 1, \dots, k-1)$ в правой и левой частях равенства (2.30). Получим систему линейных уравнений относительно $p_j^{(2)}$ $\quad (j = 1, \dots, k-1)$:

$$c_{1j}p_1^{(2)} + c_{2j}p_2^{(2)} + \dots + (c_{jj}-1)p_j^{(2)} + \dots + c_{k-1,j}p_{k-1}^{(2)} = -q_j^{(2)} \qquad (j = 1, \dots, k-1). \tag{2.31}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, т.к. все собственные числа матрицы $\mathcal{C}$ лежат внутри единичного круга, следовательно, система (2.31) имеет единственное решение. Подставляя найденные значения $p_1^{(2)}, \dots, p_{k-1}^{(2)}$ в выражение $P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$, получаем, что

$$\Delta V_2 = [h^2 + g_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)]y^4 + (\xi_1^2 + \dots + \xi_{k-1}^2) + \sum_{i,j=1}^{k-1} g_{ij}^{(2)}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)\xi_i\xi_j + y^3Q_3(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}), \tag{2.32}$$

где g_2 и $g_{ij}^{(2)}$ — функции, обращающиеся в нуль при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{k-1} = y = 0$.

Аналогично предыдущему можно показать, что от слагаемого $y^3Q_3(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ в выражении (2.32) можно избавиться, если добавить к функции V_2 слагаемое

$$y^3P_3(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = y^3(p_1^{(3)}\xi_1 + p_2^{(3)}\xi_2 + \dots + p_{k-1}^{(3)}\xi_{k-1}),$$

где $p_j^{(3)}$ $(j = 1, \dots, k-1)$ — постоянные. Другими словами, рассмотрим вместо функции V_2 функцию

$$V = \frac{1}{2}hy^2 + W(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + y^2P_2(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + y^3P_3(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}). \tag{2.33}$$

Ее приращение в силу системы (2.17) и (2.18) равно

$$\Delta V = [h^2 + g(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)]y^4 + (\xi_1^2 + \dots + \xi_{k-1}^2) + \sum_{i,j=1}^{k-1} g_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, y)\xi_i\xi_j, \tag{2.34}$$

где g и g_{ij} — функции, обращающиеся в нуль при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{k-1} = y = 0$.

Из (2.34) следует, что ΔV является определенно-положительным в достаточно малой окрестности начала координат, а функция V вида

(2.33) определенно-отрицательна при $h < 0$ и знакопеременна при $h > 0$. Следовательно, воспользовавшись соответственно теоремами Б и В, можно сделать вывод, что решение (2.19) системы (2.17) и (2.18) асимптотически устойчиво при $h < 0$ и неустойчиво при $h > 0$, что и требовалось доказать. □

Замечание 2.1. Очевидно, что в силу замен переменных (2.3), (2.9), (2.14), исследование устойчивости решения (2.19) системы (2.17) и (2.18) эквивалентно исследованию нулевого решения системы (2.1).

Замечание 2.2. В теоремах 2.1 и 2.2 приведены условия, при выполнении которых задача устойчивости нулевого решения системы (2.1) решается в критическом случае одного корня характеристического уравнения, равного единице, независимо от членов выше соответственно второго и третьего порядков малости в разложении функций X_j в ряды Маклорена. Если же в теореме 2.2 получаем $h = 0$, то задача устойчивости не решается членами до третьего порядка малости включительно, и для ее решения нужно будет привлечь члены более высокого порядка.

Литература

[1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York, 2001.

[2] E. Braverman, *On a discrete model of population dynamics with impulsive harvesting or recruitment* // Nonlinear Analysis, **63**:5–7 (2005), e751–e759.

[3] M. L. Castro, J. A. L. Silva, D. A. R. Justo, *Stability in an age-structured metapopulation model* // J. Math. Biol., **52**:2 (2006), 183–208.

[4] F. Chen, *Permanence and global attractivity of a discrete multispecies Lotka-Volterra competition predador-prey systems* // Applied Mathematics and Computation, **182**:1 (2006), 3–12.

[5] J. E. Franke, A. A. Yakubu, *Globally attracting attenuant versus resonant cycles in periodic compensatory Leslie models* // Mathematical Biosciences, **204**:1 (2006), 1–20.

[6] R. Continho, B. Fernandez, R. Lima, A. Meyroneinc, *Discrete time piecewise affine models of genetic regulatory networks* // J. Math. Biol., **52**:4 (2006), 524–570.

[7] V. A. A. Jansen, A. L. Lloyd, *Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems* // J. Math. Biol., **41**:3 (2000), 232-252.

[8] А. Ю. Александров, А. П. Жабко, *Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем* // Сибирский математический журнал, **44**:6 (2003), 1217–1225.

[9] В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис, *Об устойчивости движения при наличии толчков* // Сиб. мат. журнал., **1**:2 (1960), 233–237.

[10] А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко, *Системы с толчками в заданные моменты времени* // Мат. сборник., **74**:2 (1967), 202–208.

[11] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987.

[12] А. О. Игнатьев, *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* // Мат. сборник, **194**:10 (2003), 117–132.

[13] R. I. Gladilina, A. O. Ignatyev, *On the necessary and sufficient conditions of the asymptotic stability for impulsive systems* // Ukrainian Mathematical Journal, **55**:8 (2003), 1035–1043.

[14] А. О. Игнатьев, *Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием* // Сибирский математический журнал, **49**:1 (2008), 125–133.

[15] A. O. Ignatyev, O. A. Ignatyev, A. A. Soliman, *On the asymptotic stability and instability of solutions of systems with impulse effect* // Math. Notes, **80**:4 (2006), 516–525.

[16] W. M. Haddad, V. Chellaboina, S. G. Nersesov, *Hybrid Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems* // Mathematical Problems in Engineering, **8**:3, 493–515.

[17] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapure–New Jersey–London, 1989.

[18] W. M. Haddad, V. Chellaboina, S. G. Nersesov, *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006.

[19] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations. Third Edition*, Springer, New York, 2005.

[20] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[21] И. В. Гайшун, *Системы с дискретным временем*, Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2001.

[22] P. Cull, M. Flahive, R. Robson, *Difference Equations. From Rabbits to Chaos*, Springer, New York, 2005.

[23] А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, М., 1971.

[24] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. Second edition*, Marcel Dekker, New York, 2002.

[25] Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1972.

[26] П. В. Бромберг *Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования*, Наука, Москва, 1967.

[27] A. O. Ignatyev, O. A. Ignatyev, *On the stability in periodic and almost periodic difference systems* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **313**:2 (2006), 678–688.

[28] К. Айдын, А. Я. Булгаков, Г. В. Демиденко, *Асимптотическая устойчивость разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал, **43**:3 (2002), 493–507.

[29] С. М. Добровольский, А. В. Рогозин, *Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте* // Сибирский математический журнал, **46**:1 (2005), 98–105.

[30] К. Айдын, А. Я. Булгаков, Г. В. Демиденко, *Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал, **41**:6 (2000), 1227–1237.

[31] A. O. Ignatyev, O. A. Ignatyev, *On the stability of discrete systems* // Integral methods in science and engineering, Birkhauser, Boston, (2006), 105–116.

[32] О. В. Кириченова, *Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений* // Сибирский математический журнал, **39**:1 (1998), 45–48.

[33] О. В. Кириченова, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский, *Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал, **37**:1 (1996), 170–174.

Сведения об авторах

Александр Олегович Игнатьев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: ignat@iamm.ac.donetsk.ua, aoignat@mail.ru